

8. Cálculo de variaciones

Fijemos dos puntos del plano $P=(a,A)$ y $Q=(b,B)$ y consideremos todas las curvas posibles que los unen; ¿cuál de ellas engendra la menor superficie al girar en torno al eje x ?; si miramos las curvas anteriores como curvas toboganes contenidas en un plano vertical, ¿para cuál de ellas es mínimo el tiempo empleado por una masa puntual para deslizarse de P a Q sin velocidad inicial y despreciando el rozamiento? (problema de la braquistócrona). Ambos problemas son típicos del cálculo de variaciones (o cálculo variacional); planteados matemáticamente en ambos se trata de minimizar el valor de una integral de la forma

$$\int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx.$$

Planteemos lo anterior en otros términos más precisos. Sea $E = \{y \in C^2[a, b], y(a)=A, y(b)=B\}$ (conjunto de funciones admisibles) y consideremos en E la norma $\|y\| = \max_{x \in [a, b]} |y(x)|$.

Definimos en E el funcional v (es decir, la aplicación $v: E \rightarrow \mathbb{R}$) que a cada función y hace corresponder el número real

$$v(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx \text{ donde } f(x, y, y') \text{ es una función dada de } C^2.$$

Decimos que v tiene un máximo (mínimo) en la función y_0 si su valor en cualquier función y de E cercana a y_0 no es mayor (menor) que $v(y_0)$ (es decir, existe un real r tal que si $y \in E$ y $\|y - y_0\| < r$ se tiene que $v(y) - v(y_0) \leq 0$ (≥ 0)). En ambos casos diremos que v tiene un extremo en y_0 .

El objetivo del cálculo de variaciones es el estudio de los extremos de los funcionales.

Este capítulo es una breve introducción a dicha teoría. En la sección 8.1 se comprueba que si el funcional v definido anteriormente tiene un extremo en y esta función ha de satisfacer una ecuación diferencial (ecuación de Euler), lo que nos remite el problema variacional al problema de resolver dicha ecuación. Se estudia entonces en qué casos es esto posible. Al final de la sección se generaliza la ecuación de Euler para cuando v depende de dos funciones o de derivadas de segundo orden.

En otros problemas variacionales las funciones admisibles entre las que buscamos los extremos de v no se pueden escoger libremente sino que (aparte de satisfacer las condiciones de contorno $y(a)=A, y(b)=B$) están sujetas a condiciones adicionales como, por ejemplo, la de dar un valor fijo a otra integral. Estos problemas, que se llaman isoperimétricos, se estudian en la sección 8.2. Un ejemplo clásico es: ¿cuál es la línea cerrada de longitud dada L que limita el área máxima?

8.1. la ecuación de euler

Sea $E = \{y \in C^2[a, b] : y(a) = A, y(b) = B\}$ y sea v el funcional
 $v(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx$ (1), con $f \in C^2$ dada.

Supongamos que en y se tiene un extremo de v . Comparando los valores de v en y con los correspondientes a funciones admisibles cercanas vamos a obtener una ecuación diferencial para y .

Sea $h(x)$ cualquier función $C^2[a, b]$ con $h(a) = h(b) = 0$. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ la función $y_\alpha(x) = y(x) + \alpha h(x)$ es también admisible y estará cercana a y si α es pequeño (e $y_0 = y$).

Con h fija sustituimos y_α, y'_α en (1):

$$v(y_\alpha) = \int_a^b f(x, y_\alpha, y'_\alpha) dx = \int_a^b f(x, y + \alpha h, y' + \alpha h') dx$$

Esta nueva integral se puede considerar como una función de una variable ($I(\alpha) = v(y_\alpha)$).

Como para $\alpha = 0$ I tiene un extremo (pues v lo tiene en y) debe satisfacerse $I'(0) = 0$. La derivada $I'(\alpha)$ puede calcularse derivando bajo el signo integral:

$$\begin{aligned} I'(0) &= \int_a^b \frac{d}{d\alpha} f(x, y_\alpha, y'_\alpha) \Big|_{\alpha=0} dx = \int_a^b [f_y(x, y, y') h + f_{y'}(x, y, y') h'] dx = \\ &= \int_a^b \left[f_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} f_{y'}(x, y, y') \right] h(x) dx = 0 \end{aligned}$$

(donde hemos integrado por partes y tenido en cuenta que $h(a) = h(b) = 0$)

Si esta integral ha de anularse cualquiera que sea h satisfaciendo las condiciones de arriba debe cumplirse:

$$(2) \quad f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0$$

(pues si el corchete no fuese 0 en algún punto, al ser una función continua sería distinta de 0 en un entorno y evidentemente podrían encontrarse funciones h tales que

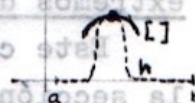
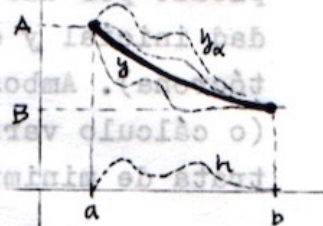
$\int_a^b h dx \neq 0$).

La ecuación (2) se llama ecuación de Euler. Podemos escribirla con más detalle de la siguiente forma:

$$(2^*) \quad f_{y'y'} y'' + f_{yy'} y' + (f_{xy'} - f_y) = 0$$

Hemos demostrado que si el funcional v tiene un extremo en una función admisible y entonces necesariamente y satisface la ecuación de Euler. Pero en una función y que satisfaga (2-2*) no necesariamente debe darse un extremo de (1) (de la misma forma que $f'(a) = 0$ no implica que la función de una variable $f(x)$ deba tener un mínimo o un máximo en $x=a$).

A las soluciones de la ecuación de Euler las llamaremos extremales de v .



Como la ecuación $(2-2^*)$ es de segundo orden su solución contendrá en general dos constantes arbitrarias que deberán ser determinadas por las condiciones de contorno $y(a)=A$, $y(b)=B$. Sólo en las extremales que satisfagan esas condiciones puede alcanzarse un extremo del funcional.

Existen condiciones suficientes para precisar si en alguna de estas extremales se alcanza o no en realidad un máximo o mínimo, pero estas condiciones son complicadas. Sin embargo, frecuentemente, se puede, a partir del análisis del problema concreto, determinar si una extremal nos proporciona un mínimo, por ejemplo, o si no lo hace.

La ecuación no lineal $(2-2^*)$ es en general imposible de resolver; veamos una serie de casos particulares en los que sí se puede:

caso A. Si f no depende de x e y las extremales son líneas rectas:

(2^*) se reduce a $f_{y'}(y') \cdot y'' = 0$; si $f_{y'}(y') \neq 0$ entonces $y'' = 0$, $y = kx + c$; si $f_{y'}(y')$ tiene algún cero real $y' = k$ obtenemos de nuevo líneas rectas $y = kx + c$.

caso B. Si f no depende de y tenemos $\frac{d}{dx} f_{y'}(x, y') = 0$, así que

$f_{y'}(x, y') = c$ ecuación de primer orden que no contiene la y .

caso C. Si f no depende de x : $f_{y'} y' y'' + f_{yy'} y' - f_y = 0$, de donde

$$\frac{d}{dx} [y' f_{y'} - f] = y'' f_{y'} + y' f_{y' y'} y'' + y' f_{y' y'} y'' - f_y y' = y' [f_{y' y'} y' + f_{y' y'} y'' - f_y] = 0$$

y por tanto

$$y' f_{y'}(y, y') - f(y, y') = c$$

ecuación de primer orden sin la x .

Observemos que tanto en el caso B como en el C nos aparecen en general ecuaciones de primer orden no resueltas respecto de la derivada (de la forma $F(x, y') = c$ en el B y de la forma $F(y, y') = c$ en el C). La forma natural de resolver estas ecuaciones es, en el caso de que se pueda, despejar la y' e intentar resolver la o las ecuaciones que se obtengan. Si no es posible despejar la y' pero se puede despejar la otra variable (x o y en cada caso) una posible vía de resolución es la siguiente:

Sea la ecuación (3) $x = g(y')$. Llamemos $y' = p$, $x = g(p)$; entonces $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p} = g'(p) \cdot \frac{dp}{dy}$; es decir $\frac{dy}{dp} = p \cdot g'(p)$; así que

$y = \int p \cdot g'(p) dp + k$; esta ecuación junto con $x = g(p)$ nos dan la solución de (3) paramétricamente en función del parámetro p .

Análogamente, si (4) $y = g(y')$, $y' = p$, $\frac{dy}{dx} = p = g'(p) \cdot \frac{dp}{dx}$; $x = \int \frac{g'(p)}{p} dp + k$, $y = g(p)$ definen paramétricamente la solución de (4).

Acabamos esta discusión sobre la ecuación de Euler comprobando que el problema de minimizar o maximizar no tiene sentido si f depende de forma "poco complicada" de y' . En concreto, sea

$$f(x, y, y') = M(x, y) + N(x, y)y' \quad (\text{un caso particular es una } f(x, y));$$

(2) toma la forma:

$$M_y(x, y) + N_y(x, y)y' - N_x(x, y) - N_{y'}(x, y)y' = M_y(x, y) - N_x(x, y) = 0$$

ecuación que no es diferencial y cuya solución, sin constantes arbitrarias, no satisfará en general las condiciones de contorno (si $M_y = N_x$, $v(y) = \int_a^b (M + Ny') dx$ es la integral de un gradiente y es constante para cualquier camino de integración).

Ejemplo 1. Buscamos la curva que une $(0, 1)$ y $(b, 1)$ y origina la superficie mínima de revolución al girar en torno al eje x .

Se trata de minimizar el funcional $S(y) = 2\pi \int_0^b y \sqrt{1+y'^2} dx$.

Como f no depende de x (caso 0) la ecuación de Euler se reduce a

$$\frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} - y \sqrt{1+y'^2} = - \frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = c;$$

despejando la y' :

$$y^2 = -c^2 + c^2 y'^2; \quad cy' = \sqrt{y^2 - c^2};$$

separando variables e integrando:

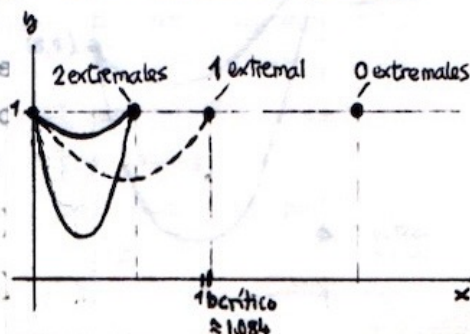
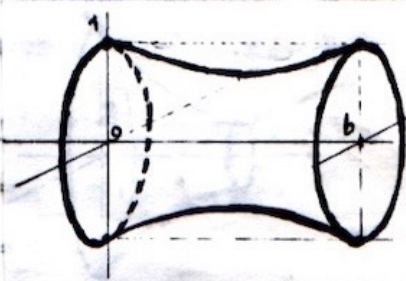
$$x + k = c \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - c^2}} = c \cdot \ln \left[\frac{y + \sqrt{y^2 - c^2}}{c} \right]; \quad \text{o despejando la } y:$$

$y = c \operatorname{ch} \left[\frac{x+k}{c} \right]$; estas son las extremales; imponiendo $y(0) = 1$ se

$$\text{tiene} \quad k = -c \ln \frac{1 + \sqrt{1-c^2}}{c}; \quad y = c \cdot \operatorname{ch} \left[\frac{x}{c} - \ln \frac{1 + \sqrt{1-c^2}}{c} \right]$$

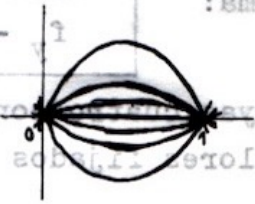
y se ve que al imponer la otra condición $y(b) = 1$ nos queda una ecuación en c no resoluble elementalmente, aunque no es difícil ver que, según b tenga un valor $>$, $=$ o $<$ que uno crítico, pueden existir 0, 1 ó 2 extremales que satisfacen las condiciones de contorno y .

que sólo algunas de las soluciones generan superficies mínimas (por ejemplo, cuando hay dos extremales pasando por $(0, 1)$ y $(b, 1)$ sólo la que está por encima genera superficie mínima).



Ejemplo 2. Buscamos la función y que minimiza $v(y) = \int_0^1 (y')^2 dx$ con las condiciones de contorno $y(0)=y(1)=0$. Estamos en el caso A. Las extremales son líneas rectas $y=kx+c$. Imponiendo $y(0)=y(1)=0$ obtenemos $y=0$, que es candidato a minimizar $v(y)$. Pero $v(y) \geq 0$ para cualquier y . Por tanto $y=0$ minimiza de hecho el funcional.

Ejemplo 3. $v(y) = \int_0^1 (y')^3 dx$, $y(0)=y(1)=0$ nos conduce a la misma extremal. Sin embargo en esta extremal no se tiene un mínimo de v . Consideremos las funciones admisibles más sencillas: las parábolas que pasan por $(0,0)$ y $(1,0)$, es decir, $y=mx(x-1)$; $y' = m(2x-1)$; $\int_0^1 (y')^3 dx = m^3 \int_0^1 (2x-1)^3 dx = m^3 \left[\frac{1}{8}(2x-1)^4 \right]_0^1 = 0$.



En todas ellas v toma el mismo valor. Buscamos otras funciones admisibles que me puedan demostrar que $y=0$ no minimiza:

$$y = mx^2(x-1); \quad y' = m(3x^2-2x); \quad (y')^3 = m^3(27x^6-54x^5+36x^4-8x^3);$$

$$\int_0^1 (y')^3 dx = m^3 \left[\frac{27}{7}x^7 - 9x^6 + \frac{36}{5}x^5 - 2x^4 \right]_0^1 = \frac{2}{35}m^3.$$



Luego tan próximas como queramos de $y=0$ hay funciones admisibles en las que v es positivo y otras en las que v es negativo. v no tiene un extremo en $y=0$.

Ejemplo 4. Hallamos las extremales para $f(x,y') = xy' - (y')^4 - (y')^2$

Caso B. $x - 4(y')^3 - 2y' = c$, ecuación de Euler. No podemos despejar y' pero fácilmente la x ; hacemos $y' = p$; $x = 4p^3 + 2p + c$; $y = \frac{4}{3}p^4 + p^2 + kp$ paramétricamente me dan las extremales (que dependen, desde luego, de dos constantes arbitrarias c y k).

Acabemos esta sección generalizando (sólo un paso) la ecuación de Euler en dos direcciones diferentes (las demostraciones son similares y se omiten).

Funcionales que dependen de derivadas de orden superior.

Sea $v(y) = \int_a^b f(x,y,y',y'') dx$; si en y se tiene un extremo de v entonces y

debe satisfacer la ecuación

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} f_{y''} = 0$$

ecuación de cuarto orden cuya integración da cuatro constantes, a determinar con la condición de pasar la curva por dos puntos dados y tener en ellos rectas tangentes prefijadas (es decir, imponiendo $y(a)=A$, $y(b)=B$, $y'(a)=A'$, $y'(b)=B'$).

Funcionales que dependen de varias funciones.

Sea

$$v(y, z) = \int_a^b f(x, y, y', z, z') dx ; \text{ si } y(x), z(x) \text{ hacen}$$

máximo o mínimo el

funcional v entonces dichas funciones deben satisfacer el sistema:

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0 ; f_z - \frac{d}{dx} f_{z'} = 0$$

cuyas cuatro constantes de integración se determinan con los valores fijados previamente de $y(a)$, $y(b)$, $z(a)$, $z(b)$.

Ejemplo 5. Hallemos la extremal de $v(y) = \int_0^1 (16y^2 - (y'')^2 + x^2) dx$

con las condiciones $y(0)=1$, $y'(0)=2$, $y(1)=e^2$, $y'(1)=2e^2$.

$32y - \frac{d^2}{dx^2}(2y'') = 0$; $y^{IV} - 16y = 0$; $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x$; imponiendo las condiciones de contorno obtenemos $y = e^{2x}$.

Ejemplo 6. Encontremos las trayectorias de propagación de la luz en un medio refringente isótropo. Según el principio de Fermat la luz se propaga de un punto cualquiera del medio (a, A_1, A_2) a otro (b, B_1, B_2) siguiendo la curva $(y(x), z(x))$ para la cual sea mínimo el tiempo de paso. Por tanto $(y(x), z(x))$ debe minimizar:

$$T(y, z) = \frac{1}{v} \int_a^b \sqrt{1+y'^2 + z'^2} dx \text{ y por tanto satisfacer}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2 + z'^2}} \right] = 0 ; \frac{1+z'^2}{(1+y'^2 + z'^2)^{3/2}} y'' - \frac{y'z'}{(1+y'^2 + z'^2)^{3/2}} z'' = 0 \\ \frac{d}{dx} \left[\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2 + z'^2}} \right] = 0 ; \frac{-y'z'}{(1+y'^2 + z'^2)^{3/2}} y'' + \frac{1+y'^2}{(1+y'^2 + z'^2)^{3/2}} z'' = 0 \end{cases}$$

como $\begin{vmatrix} 1+z'^2 & -y'z' \\ -y'z' & 1+y'^2 \end{vmatrix} = 1+y'^2 + z'^2 \neq 0$ debe ser $\begin{cases} y'' = 0, y = cx+k \\ z'' = 0, z = dx+l \end{cases}$.

La luz se propaga rectilíneamente.

(es fácil ver en general que las extremales de $v(y, z) = \int_a^b f(y', z') dx$ son rectas)

8.2. problemas isoperimétricos

Recordamos el método de los multiplicadores de Lagrange para la determinación de extremos condicionados. Supongamos que queremos encontrar los máximos y mínimos de la función de dos variables $f(x,y)$ sobre la curva dada por $g(x,y)=0$. El método natural de resolución es despejar una de las variables de la segunda ecuación, por ejemplo $y=h(x)$, y estudiar entonces los extremos de la función de una variable $f(x,h(x))$. Pero a menudo suele ser más cómodo considerar la función $F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$ e investigar los extremos de F (hay pues que encontrar los valores de (x,y) que satisfacen para algún valor de λ el sistema: $f_x + \lambda g_x = 0$, $f_y + \lambda g_y = 0$, $g=0$). Se demuestra que los extremos condicionados de f se encuentran entre los extremos de F .

Consideremos ahora el problema de cálculo variacional siguiente:

- (P) encontrar una función y que maximice o minimice el funcional (1) $v(y) = \int_a^b f(x,y,y') dx$ donde y es $C^2[a,b]$, toma los valores dados $y(a)=A$, $y(b)=B$ y está sujeta a la condición adicional (2) $u(y) = \int_a^b g(x,y,y') dx = L$.

Supongamos que en y se da tal extremo de v y sean $h, l \in C^2[a,b]$ que se anulan en a y b . Sea $y_{\alpha\beta} = y + \alpha h + \beta l$ donde α, β son dos parámetros reales ligados por la condición

$$J(\alpha, \beta) \equiv u(y_{\alpha\beta}) = \int_a^b g(x, y_{\alpha\beta}, y'_{\alpha\beta}) dx = L.$$

Buscamos condiciones necesarias para que $I(\alpha, \beta) \equiv v(y_{\alpha\beta})$ tenga un extremo en $\alpha = \beta = 0$, con α, β satisfaciendo $J(\alpha, \beta) = L$.

Para ello consideremos la función

$K(\alpha, \beta, \lambda) = I(\alpha, \beta) + \lambda J(\alpha, \beta) = \int_a^b F(x, y_{\alpha\beta}, y'_{\alpha\beta}) dx$ con $F = f + \lambda g$ y calculamos sus extremos; debe ser $J(\alpha, \beta) = 0$ además de

$$K_{\alpha}(0,0,\lambda) = \int_a^b \left[F_y h + F_{y'} h' \right] dx = \int_a^b \left[F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right] h dx = 0$$

$$K_{\beta}(0,0,\lambda) = \int_a^b \left[F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right] l dx = 0$$

Estas dos últimas condiciones (que son de hecho la misma ya que h y l son arbitrarias) llevan a que y debe satisfacer

$$(3) \quad F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

Resumiendo:

Para resolver (P) hay que hallar las funciones y que satisfagan la ecuación (3). Los tres parámetros indeterminados (las constantes de integración y λ) se determinan imponiendo las condiciones de contorno y la condición integral (2).

Ejemplo 1. Hallamos la curva de longitud $\frac{2\pi}{3}$ que une los puntos $(-1,0)$ y $(1,0)$ y encierra el área máxima entre ella y el eje x .

Se trata de minimizar $v(y) = \int_{-1}^1 \sqrt{1+y'^2} dx$,

con las condiciones adicionales

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1+y'^2} dx = \frac{2\pi}{3}, \quad y(-1) = y(1) = 0.$$

Sea $F = y + \lambda \sqrt{1+y'^2}$. La ecuación de Euler lleva (caso C) a:

$$\frac{\lambda y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} - y - \lambda \sqrt{1+y'^2} = c; \text{ operando } y' = \frac{\lambda}{y+c} \sqrt{1 - \left(\frac{y+c}{\lambda}\right)^2};$$

separando variables e integrando se tiene

$$(x+k)^2 + (y+c)^2 = \lambda^2,$$

con lo que las extremales son circunferencias. Imponiendo

$$y(-1) = y(1) = 0 \text{ se tiene que } k=0, c = \pm \sqrt{\lambda^2 - 1}.$$

Falta por imponer la condición integral.

Analíticamente:

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}}; \quad \int_{-1}^1 \sqrt{1+y'^2} dx =$$

$$= 2 \int_0^1 \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} dx = 2\lambda \arcsen \frac{1}{\lambda} = \frac{2\pi}{3}$$

que se satisface si $\lambda=2$.

(podíamos también determinar el λ geométricamente; a la vista del

dibujo está claro que la longitud

del arco de circunferencia es

$$L = \lambda 2\theta = \lambda 2 \arcsen \frac{1}{\lambda}$$

Por tanto el arco de circunferencia (de centro $(0, -\sqrt{3})$ y

radio 2) (o el simétrico) resuelve el problema. Gráficamente

se ve que existe máximo del funcional, con las condiciones da-

das y que sin embargo el ínfimo de las áreas no es alcanzable

en las funciones admisibles (es fácil imaginar

curvas de longitud $\frac{2\pi}{3}$ que encierran un área

tan pequeña como queramos).

$$0 = \frac{d}{dx} \left(\frac{y}{\lambda} \right) = 0$$

problemas 8

1. Hallar las extremales que se indican:

$$\int_0^{\pi/2} (y^2 - y'^2) dx ; y(0)=0, y(\pi/2)=1$$

$$\int_1^2 x^2 y'^2 dx ; y(1)=2, y(2)=1$$

$$\int_0^1 (y^2 + 2xyy') dx ; y(0)=0, y(1)=0$$

$$\int_0^1 [(1-x^2)y'^2 - 2y^2] dx ; y(0)=0, y(1)=2$$

$$\int_0^3 (y + y'^2 + y'^3) dx ; y(0)=0, y(3)=5$$

$$\int_4^5 \frac{1}{x} \sqrt{1+y'^2} dx ; y(4)=3, y(5)=0$$

$$\int_0^1 (2yz - 2y^2 + y'^2 - z'^2) dx ; y(0)=0, y(\pi)=0, z(0)=0, z(\pi)=0$$

$$\int_0^1 (y'^2 + y''^2) dx ; y(0)=1, y'(0)=1, y(1)=2, y'(1)=1$$

2. Hallar las extremales que se indican y precisar si minimizan o maximizan el funcional:

$$\int_0^2 (xy' - y'^2) dx ; y(0)=0, y(2)=1$$

$$\int_0^1 x^2 y^2 dx ; y(0)=0, y(1)=1$$

$$\int_0^1 x^3 y^2 dx ; y(0)=y(1)=0$$

$$\int_0^1 y' dx ; y(0)=0, y(1)=1$$

$$\int_0^1 yy'^2 dx ; y(0)=y(1)=0$$

$$\int_0^1 y^2 y'^2 dx ; y(0)=y(1)=0$$

3. Hallar la curva de menor longitud que une dos puntos fijos de un plano minimizando el funcional adecuado i) en cartesianas, ii) en polares ($r=r(\theta)$), iii) en polares ($\theta=\theta(r)$).

4. El problema de la braquistócrona (curva de descenso más rápido) conduce a minimizar el funcional

$$V(y) = \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx$$

Comprobar que las extremales son arcos de cicloides: $x(\theta)=C(\theta-\operatorname{sene}\theta)$, $y(\theta)=C(1-\operatorname{cose}\theta)$.

5. Demostrar que las geodésicas en un cilindro son hélices o generatrices.

6. Hallar la trayectoria de los rayos luminosos en un medio en el que la velocidad de propagación es proporcional a la altura.

7. Hallar las extremales de $\int_0^1 (x^2 + y'^2) dx$ con $y(0)=y(1)=0$, $\int_0^1 y^2 dx=2$ y las de $\int_1^2 (x^2 y'^2 + 2y^2) dx$ con $y(1)=-1$, $y(2)=1$, $\int_1^2 y dx=0$.

8. Una curva en el primer cuadrante une $(0,0)$ con $(1,0)$ y tiene un área dada bajo ella. Demostrar que la curva más corta de este tipo es un arco de circunferencia.

9. Una cadena flexible uniforme de longitud dada cuelga entre dos puntos. Encontrar su forma. (Imponer que el centro de gravedad ocupe la posición más baja posible).

10. Hallar las extremales del funcional $v(y) = \int_a^b y^2 (y'-1)^2 dx$. Estudiar si existen mínimos del funcional v con las condiciones: i) $y(0)=y(1)=0$; ii) $y(1)=0$, $y(2)=1$; iii) $y(0)=0$, $y(2)=1$.