

Primer parcial de Métodos Matemáticos II (1980-81)

A (5). Sea la ecuación (A) $\frac{dx}{dt} = \frac{2tx - x^2}{t^2}$.

- i) Determinar para qué valores de a existe exactamente una solución de (A) que satisfice $x(1)=a$.
- ii) Hallar la solución de (A) que satisfice $x(1)=-1$.
- iii) Determinar si es estable la solución de (A) que satisfice $x(1)=0$.

B (3). Sea el problema (P) $\begin{cases} x' = tx^2 - 1 \\ x(0) = 0 \end{cases}$.

- i) Utilizar el método de las aproximaciones sucesivas para encontrar una solución aproximada de dicho problema (aplicar sólo 2 veces el operador T a $x_0(t)=0$).
- ii) Dibujar las isoclinas del campo de direcciones de pendientes $-1, -1/2, 0$ y 1 , y dibujar aproximadamente la solución de (P).

C (7). Sea la ecuación (C) $x'' + x' - 2x + ax^2 = 0$, con a constante real.

- i) Hallar los puntos singulares de (C) y clasificarlos, según los valores de a . Determinar en cada caso la estabilidad de dichos puntos singulares.
- ii) Sea $a=0$. Escribir el sistema equivalente a (C) y hallar la solución general de dicho sistema por medio de matrices. Utilizando transformadas de Laplace, hallar la solución particular de (C) (con $a=0$) que cumple $x(0)=2, x'(0)=-1$.
- iii) Dibujar aproximadamente las órbitas en el plano de fases para $a=1$. Si (C) rige el movimiento de un punto sobre el eje x a lo largo del tiempo, describir (a la vista del mapa de fases) el movimiento de un punto situado inicialmente en reposo en el punto $x=1$.

D (5). Sea (D) $(1-t)y'' + ty' - y = e^t(1-t)^2$.

- i) Hallar la solución general de la ecuación homogénea asociada a (D) por medio de series (observar que las dos soluciones linealmente independientes que se obtienen son funciones elementales).
- ii) Hallar una matriz fundamental del sistema equivalente a (D) y utilizarla para calcular la solución general de dicha ecuación no homogénea (D).

Primer parcial de junio (1981)

A (4). Sea $x' = x^2(x+2)$ (no resolverla).

Dibujar algunas isoclinas del campo de direcciones y la forma aproximada de las soluciones.

Para cada $a \in \mathbb{R}$ se considera el problema: $(P_a) \begin{cases} x' = x^2(x+2) \\ x(0) = a \end{cases}$.

Estudiar según los valores de a si la solución de (P_a) existe, si es única, si es prolongable hasta ∞ , si depende continuamente del dato inicial a y si es estable.

(Justificar lo más posible las afirmaciones que se hagan y citar los teoremas que se apliquen).

B (2). Comprobar que $x = e^t$ es solución de la ecuación homogénea asociada a

$$tx'' - (t+1)x' + x = t^2e^t$$

y hallar la solución general de esta ecuación no homogénea.

C (2). Resolver $x''' + 2x'' + 5x' = 5t$ con las condiciones $x(0)=0, x'(0)=0, x''(0)=1/5$. Comprobar el resultado.

D (2). Sea $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = y(1-y) + x^2 \end{cases}$. Hallar los puntos singulares y clasificarlos. Dibujar el mapa de fases.

Primer parcial de septiembre (1981)

A (3). Sea $x' = \frac{x}{x-t}$.

Dibujar las isoclinas del campo de direcciones y la forma aproximada de las soluciones.

¿Existe solución única de la ecuación satisfaciendo $x(1)=0$?

¿Es una ecuación exacta? Hallar la solución general.

B (3). Hallar la solución particular de la ecuación $t^2x'' - 2tx' + 2x = \ln t$ que satisfice las condiciones iniciales $x(1)=1, x'(1)=1$.

C (1). Sea la ecuación $x' = (7+5\sin t)x + e^{7+5\sin t}$ (no resolverla). ¿Es estable? ¿Cuántas soluciones 2π -periódicas tiene?

D (1). Calcular la transformada inversa de Laplace de $F(s) = \frac{1}{s^2+4s} + \frac{1}{s^2+4s+8}$.

E (1). Clasificar el punto singular del sistema autónomo $\begin{cases} x' = y \\ y' = 1-x+5y+xy^2 \end{cases}$.

F (1). Determinar si el 0 es punto singular regular de alguna de las ecuaciones:

a) $ty'' + 2y' + 4y = 0$; b) $t^2y'' + 2y' + 4y = 0$.

En caso afirmativo, indicar qué tipo de series se probarían en la ecuación para resolverla.

Primer parcial (1981-82)

A (3). Sea (A) $y' = \frac{y-y^2}{t}$.

- i. Utilizar el teorema de existencia y unicidad para estudiar para qué instantes iniciales t_0 existe solución única local de (A) satisfaciendo $y(t_0)=2$.
- ii. Hallar la solución general de (A).
- iii. Estudiar la estabilidad de las soluciones que cumplen $y(1)=0$ e $y(1)=1$.

B (3). Sea (B) $y'' = (2-y')y$.

- i. Dibujar el mapa de fases de la ecuación (B).
- ii. Sea $y(t)$ la solución de (B) que satisface $y(-2)=0, y'(-2)=1$. A la vista del mapa de fases anterior: ¿Están acotadas $y(t)$ o $y'(t)$ para $t \rightarrow \infty$?
- iii. Escribir la ecuación de las órbitas.

C (4). Sea (D) $(1+t^2)y'' - 2y = 1$.

- i. Hallar la solución general de la homogénea mediante series en torno a $t=0$. Observar que una de las soluciones obtenidas es una función elemental sencilla.
- ii. Hallar la solución general de (D) en términos de funciones elementales y la solución particular de (D) que satisface $y(0)=y'(0)=0$.

Primer parcial de junio (1982)

A (5). Sea $y' = t - |y|$. Hacer un dibujo aproximado de las soluciones.

Sean: $(P_1) \begin{cases} y' = t - |y| \\ y(0) = -1 \end{cases}$; $(P_2) \begin{cases} y' = t - |y| \\ y(2) = 0 \end{cases}$.

Para cada uno de estos dos problemas: ¿existe solución única?, ¿es prolongable hasta infinito?, ¿es estable? Calcular el valor aproximado de la solución de (P_2) en $t = 2.2$, con 2 cifras decimales, a partir de la segunda aproximación sucesiva de Picard y por el método de Euler con $h=0,1$.

B (2.5). Calcular la solución de:

$$t^2 y'' + t y' + \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)y = t^{3/2}; \quad y(1)=1, \quad y'(1)=-\frac{1}{2}.$$

C (2.5). Hallar la solución de: $\begin{cases} x' = x - 2y - t \\ y' = 2x - 3y - t \end{cases}$; $x(0)=1, \quad y(0)=1$.

¿Es estable esta solución?

Primer parcial de septiembre de Métodos II (grupo piloto) (1982)

1) Sea $y^2 y'' = y'(yy' - 2)$. Hallar su solución general.

Considerar los problemas $(P_b) \begin{cases} y^2 y'' = y'(yy' - 2) \\ y(0)=1, y'(0)=b, b \in [0,1] \end{cases}$.

Determinar los valores de b para los que (P_b) tiene solución única.

Hallar la solución y_b en esos casos y el $\lim_{t \rightarrow \infty} y_b(t)$. ¿Es estable y_1 ?

2) Sea la ecuación (E) $y'' = 1 - y^2 - ky'$, donde k es una constante real.

- a) Hallar y clasificar los puntos singulares en función de los valores de k .
- b) Dibujar aproximadamente el mapa de fases para $k=0$ y $k=3$.
- c) Suponiendo que la ecuación (E) describe el movimiento de un punto sobre una recta sometido a una fuerza $g(y)=1-y^2$ con rozamiento proporcional a su velocidad (si $k>0$), describir cualitativamente el comportamiento de un punto situado inicialmente en el origen para $k=0$ y $k=3$.

3) Sea $t^2 y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 0$ (C).

Hallar una primera solución de (C) por medio de series en torno a $t=0$.

Calcular la solución general de (C).

Primer parcial (1982-83)

A (4). Sean las ecuaciones: (1) $y' = y^2 - (\cos t)y$.

$$(2) y' = -y^3 + (\cos^2 t)y^2 - (\cos^2 t)y.$$

Para la ecuación (1):

- i. Resolverla.
- ii. Dibujar las zonas del plano (t, y) en las que sus soluciones crecen o decrecen.
- iii. Basándose en i) y ii) hacer un esquema de las soluciones de (1).

Para las dos ecuaciones (1) y (2):

- i. Precisar para qué valores de a la solución con $y(0)=a$ se prolonga hasta ∞ .
- ii. Estudiar la estabilidad de las soluciones con $y(0)=0$ e $y(0)=-1$.

Para la ecuación (2):

- i. Dibujar la poligonal de Euler entre 0 y 2 con $h=1$ si $y(0)=-1$.

B (4). i. Resolver $y'' + y' = \begin{cases} t+1, & t < 1 \\ 3-t, & 1 \leq t \end{cases}$ con $y(0)=-1, y'(0)=0$.

- ii. Hallar la matriz fundamental canónica del sistema homogéneo equivalente (es decir, la $W(t)$ con $W(0)=I$).

- iii. Hallar la solución general de $y'' + y' = t+1$ exclusivamente por medio de series (probar series directamente en la ecuación no homogénea). Hallar a partir de esta solución en forma de series la solución particular que satisface $y(0)=-1, y'(0)=0$.

C (2). Construir una teoría para el dibujo de órbitas de ecuaciones autónomas de primer orden en la "recta de fases" (definición y tipos de órbitas, clasificación de puntos singulares en ecuaciones lineales y no lineales, algunos ejemplos,...).

Primer parcial de junio, grupo piloto (1983)

A (6). Sea la ecuación (A) $x'' - \frac{1}{2}(x')^2 + \frac{1}{2}x(x-2) = 0$.

Clasificar los puntos singulares de su mapa de fases. Hallar la ecuación de sus órbitas y dibujar el mapa de fases de (A).

Sea (E) la ecuación diferencial $v' = f(x, v)$ que se ha debido resolver para hallar la ecuación de las órbitas. Estudiar existencia y unicidad de soluciones de (A) y de (E).

Comprobar que existen dos soluciones de (E) que pasan por el origen y que existe una única solución de (A) con $x(0)=0, x'(0)=0$. Explicar por qué no es contradictorio.

Precisar a la vista del mapa de fases la estabilidad de la solución de (A) que satisface:

- i) $x(0)=0, x'(0)=0$; ii) $x(7)=2, x'(7)=0$; iii) $x(-1)=1, x'(-1)=-1$.

B (4). Sea la ecuación (B) $t^2 y'' - 2ty' + (2-t^2)y = 2t^3 \cosh t$.

Hallar una solución de la homogénea por medio de series, identificándola como una función elemental.

Hallar la solución general de (B) en términos de funciones elementales y la solución particular de (B) que satisface $y(1)=0, y'(1)=\sinh 1$.

$$\text{Dato } \sinh t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Primer parcial de septiembre (1983)

A (5). Sea $y' = \frac{2y-2t+1}{y-t+1}$.

- i. Dibujar aproximadamente las soluciones.

- ii. Estudiar existencia y unicidad.

- iii. ¿Es prolongable la solución que satisface $y(0)=2$?
¿Es prolongable la que satisface $y(0)=-2$?

- iv. Estudiar la estabilidad de la solución con $y(0)=0$.

- v. Resolver la ecuación.

B (5). i. Resolver el problema $\begin{cases} y'' + 2cy' + y = \delta(t-1), & c > 0 \text{ constante} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$,

distinguiendo los casos $c < 1, c = 1$ y $c > 1$.

- ii. Escribir el resultado para $c=0$ prescindiendo de funciones paso, dibujar la solución y comentarla físicamente.

- iii. Hallar la matriz fundamental canónica del sistema equivalente a la ecuación homogénea.

Parcial de Métodos Matemáticos II - Febrero 1984

1 (3.5 puntos). Dibujar con el mayor detalle posible el mapa de fases del sistema:

$$\begin{cases} x' = 2y + 2xy \\ y' = 2x - x^2 - y^2 \end{cases}$$

Calcular la ecuación de las órbitas.

2 (3.5 puntos). Dada la siguiente ecuación $t^2 y'' - 2ty' + (2 + t^2)y = t^3 \cos t$:

- Hallar una solución de la ecuación homogénea, por medio de series. Sumar la serie obtenida.
- Hallar la solución general de la no homogénea en términos de funciones elementales (una posibilidad es hacer el cambio $y = tx$).

3 (3 puntos). Estudiar existencia y unicidad, hallar el intervalo máximo en el cual están definidas las soluciones y precisar la estabilidad de la solución $y \equiv 0$, para las ecuaciones:

a) $y' = \frac{y^3}{1+y^2}$

b) $y' = f(y)$ donde $f(y) = \begin{cases} -y & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$

Examen Final (Primer Parcial) - Julio 1984

1) Se tiene el sistema:

$$(1) \quad \begin{cases} x' = x^2 \\ y' = x - y + x^2 \end{cases}$$

A) a) Dibujar las isoclinas de la ecuación asociada: (2) $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y+x^2}{x^2}$.

b) Resolver (2).

c) Con a) y b) dibujar las curvas integrales de (2).

d) Dibujar el mapa de fases de (1).

B) Determinar la estabilidad del origen en (1) y la de la solución que satisface $y(1)=1$ en (2).

2) Calcular la solución del sistema para $t > 0$:

$$\begin{cases} x' = -y + f(t) \\ y' = x + f(t) \end{cases} \quad \text{con } x(0)=y(0)=0, \text{ donde } f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \pi \\ 0 & t \geq \pi \end{cases}$$

Dibujar aproximadamente $x(t)$ para $t \geq 0$.

Métodos Matemáticos II - Primer Parcial - Septiembre 1984

1 (5 puntos). Calcular la solución general por medio de series (hallando la expresión del término general) de la ecuación:

$$y'' - 2ty' = 0.$$

Estudiar la estabilidad de la solución $y=0$.

2 (5 puntos). Dibujar el mapa de fases de:

$$x'' + 3x' + 1 - x^4 = 0.$$

Interpretar físicamente la ecuación y algunas de las órbitas.

Métodos Matemáticos II (Grupo C) - Febrero 1985

1 (3 puntos). Sea $(1-t^2)y'' - ty' + y = 1 - t^2$.

- i) Hallar la solución general de la homogénea por medio de series.
- ii) Hallar la solución general de la no homogénea en términos de funciones elementales.
- iii) Comprobar ii) realizando el cambio de variable $t = \cos z$ (o similar).

2 (5 puntos). Todas las preguntas de 2 y 2' se refieren a dos funciones g diferentes:

a) $g(x, v) = 4x - 3v$ y b) $g(x, v) = 2x^3$.

Sean las ecuaciones (E) $x'' = g(x, x')$ y (O) $v \frac{dv}{dx} = g(x, v)$. Para ambos casos:

- i) Hallar la ecuación de las órbitas y dibujar el mapa de fases de (E).
 - ii) Si (E) describe el movimiento de una partícula, discutir el significado de las órbitas que pasan por $(1, a)$. Si la partícula satisface $x(0) = x'(0) = 1$, ¿en qué instante pasa por $x = 10^{10}$?
 - iii) Estudiar la prolongabilidad de las soluciones $v(x)$ de (O) con $v(1) = a$, $a > 0$ y de las soluciones $x(t)$ de (E) con $x(0) = 1$, $x'(0) = a$, $a > 0$.
- 2' (2 puntos). iv) Estudiar la estabilidad de la solución de (O) con $v(1) = 1$ y de la solución de (E) con $x(0) = x'(0) = 1$, cuando sean prolongables.
- v) Estudiar existencia y unicidad para (E) y (O).

3 (2 puntos). Hallar las extremales del funcional: $V(y) = \int_a^b y^2 (y' - 1)^2 dx$.

Estudiar si existen mínimos con las condiciones:

- i) $y(0) = y(1) = 0$; ii) $y(1) = 0, y(2) = 1$; iii) $y(0) = 0, y(2) = 1$.

(elegir entre 2' y 3)

Métodos Matemáticos II (Grupo C) - Junio 1985 - 1er Parcial

A (3.5 puntos). Hallar la solución general de:

$$(t^3 + 1)y' + 3t^2y = (t^3 + 1)^2.$$

B (3.5 puntos). Hallar la solución de $(P_b) \begin{cases} y' = y - (2 + 2 \cos t)y^2 \\ y(0) = b \end{cases}$.

Determinar la estabilidad de y_0 e $y_{1/3}$.

C (3 puntos). Sea (s) $\begin{cases} x' = ax - 2y + x^3 \\ y' = 2x + ay + 2x^2y + y^3 \end{cases}$.

Escribir el sistema (s) en coordenadas polares.

Clasificar el punto singular $(0, 0)$ según los valores de a .

C* (3.5 puntos). Si $a = -1$, dibujar el mapa de fases de (s). ¿Para qué valores de b la solución de (s) con $x(0) = b$, $y(0) = 0$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$.

(elegir entre B y C*)

Métodos Matemáticos - 1er Parcial - Septiembre 1985

1 (6.5 puntos). (a) Sea el problema $(P_a) \begin{cases} \frac{dv}{dx} = \frac{x}{v} - xv \\ v(0) = a \end{cases}$.

- i) Hallar la solución de (P_a) .
- ii) Estudiar para qué valores de a tiene (P_a) solución única.
- iii) Estudiar la unicidad y la estabilidad de la solución de (P_{-1}) .

(b) Sea (E) $\frac{d^2x}{dt^2} = x \left[1 - \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right]$.

- i) Dibujar su mapa de fases.
- ii) Hallar la solución con $x(0) = 0, x'(0) = 1$ (no se intente hallar la solución general).
- iii) Determinar si está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ la solución $x(t)$ de (E) que satisface $x(0) = 0, x'(0) = 2$.

2 (3.5 puntos). Sea $y'' + y = f(t)$ con $f(t) = \begin{cases} \sin t & 0 \leq t < 3\pi \\ 0 & t \geq 3\pi \end{cases}$.

Hallar la solución con $y(0) = y'(0) = 0$ por Laplace y por algún otro método diferente.

¿Era esperable dicha solución interpretando físicamente el problema?

Métodos Matemáticos II - Parcial - Curso 85/86

1 (2 puntos). Resolver $\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = x - y + 2\delta(t-1) \end{cases}$ con $x(0)=0, y(0)=0$ y dibujar $x(t)$ e $y(t)$.

2 (6 puntos). Sea el sistema $(S_a) \begin{cases} x' = ax \\ y' = 2ay - y^2 \end{cases}$.

Para todo a : i) Hallar sus puntos singulares y clasificar los elementales.
ii) Hallar la ecuación de sus órbitas. Determinar la curva del plano xy en que dichas órbitas poseen puntos de inflexión.

Para $a=1$: iii) Dibujar el mapa de fases de (S_1) .

iv) Hallar la solución con $x(0)=y(0)=2$. ¿Es estable a la derecha dicha solución? Comprobar que dicha estabilidad no coincide con la de la órbita $y(x)$ que define, vista como solución de la ecuación diferencial de las órbitas, ¿a qué se debe?

v) ¿Es prolongable hasta ∞ la solución de (S_1) con $x(0)=y(0)=-1$.

vi) Estudiar existencia y unicidad para la ecuación diferencial de las órbitas.

Para $a=0$: vii) Dibujar el mapa de fases de (S_0) .

3 (2 puntos). Sea (E) $(t^2-t)y'' - ty' + y = 0$.

Sabiendo que $y_1(t)=t$ es solución de (E) seguir el método de Frobenius para calcular una segunda solución $y_2(t)$ por medio de series en torno a $t=0$.

4 (2 puntos). Hallar la extremal del funcional $V(y)=\int_1^2 (x^2 y'^2 + 2y^2) dx$ sometida a la condición adicional $\int_1^2 y dx = 0$, satisfaciendo las condiciones de contorno $y(1)=-1, y(2)=1$.

(elegir entre 3 y 4)

Métodos II (C) - Examen Final (1er Parcial) - 3 de Julio de 1986

1 (4 puntos). (a) Hallar la solución de $\begin{cases} y' + y = f(t) \\ y(0)=1 \end{cases}$, siendo $f(t)=\begin{cases} 0 & t \leq 1 \\ e^{-1} - e^{-t} & t \geq 1 \end{cases}$.

(b) Dibujar las curvas integrales de (E).

(c) ¿Es estable la solución calculada en (a)?

2 (3 puntos). Dibujar el mapa de fases de: $\begin{cases} x' = 3x(1-y) \\ y' = y(1-x^3) \end{cases}$.

3 (3 puntos). Sea la ecuación (E) $y'' = 2y'y$. Hallar la solución con y_b de (E) que satisface $y(0)=0, y'(0)=b$ para $b \geq 0$. ¿Para qué valores de $b \geq 0$ está definida dicha solución y_b en todo $[0, \infty)$? ¿Es estable y_0 ?

Métodos II (C) - Septiembre 1986 - primera parte

1 (3 puntos). Sea $y' = \frac{2t-y}{t-y}$.

a) Resolver por dos métodos diferentes.

b) Dibujar las curvas integrales.

c) ¿Cuántas soluciones satisfacen $y(0)=-1$?

2 (2 puntos). Estudiar según los valores de a si la solución trivial $x \equiv 0$ de la ecuación autónoma

$$x'' + ax' + e^x - 1 = 0$$

es estable, asintóticamente estable o inestable.

3 (5 puntos). Sea $t^2 y'' - 3ty' + 3y = t^3$.

Hallar solución general de la no homogénea.

Hallar la solución general de la homogénea utilizando series de potencias centradas en $t=1$.

MÉTODOS MATEMÁTICOS II - PRIMER PARCIAL - Febrero 1987

- 1) Se considera una partícula que se mueve sobre el eje x según la ecuación:

$$(E) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{x}{(x^2+9)^2}$$

- a) Dibujar el mapa de fases de (E). Describir brevemente los posibles movimientos de la partícula.
- b) Determinar la órbita que pasa por $x=0, v=1/3$. ¿Qué velocidad tiene la partícula si se mueve según esta órbita cuando pasa por $x=4$? ¿Cuánto tiempo tarda en llegar a $x=4$?
- c) ¿Qué soluciones $x(t)$ de (E) están definidas para todo t ?

Consideremos ahora la ecuación diferencial de primer orden:

$$(O) \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{x}{v(x^2+9)^2}$$

cuyas curvas integrales son las órbitas de (E).

- d) ¿Es estable la solución $v(x)$ de (O) que satisface $v(0)=1/3$? ¿Alguna solución de (O) es asintóticamente estable?
- e) Calcular aproximadamente el valor en $x=1$ de la órbita $v(x)$ que pasa por $(0,1/3)$, bien utilizando el método de la poligonal de Euler con $h=0.5$, o bien la primera aproximación de Picard (comparar con el valor exacto).

(5 puntos)

$$2) \text{ Resolver: } \begin{cases} x' = -y + f(t) \\ y' = x + f(t) \\ x(0) = -e, y(0) = 0 \end{cases} \quad \text{con } f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \pi \\ 0 & t \geq \pi \end{cases}. \quad (2 \text{ puntos})$$

- 3) Sea (E) $t(t-1)y'' + y' - \lambda y = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- a) Calcular una solución en serie de potencias de t . Determinar para qué valores de λ se obtiene un polinomio. Probar que todas las soluciones de (E) están acotadas en $t=0$.
- b₁) Probar que para $\lambda=2$ existen soluciones de (E) que tienden a 0 cuando $t \rightarrow \infty$ (es fácil probarlo si se clasifica el punto del infinito de (E)).
- b₂) Determinar, si existe, la función $y(t)$ que satisface $y(2)=y(3)=1$ y que hace mínimo el valor de la integral $\int_2^3 (1-\frac{1}{t})y^2 dt$.

(3 puntos)

Métodos II A, B, C - Final - Primer Parcial - 27 de Junio de 1987

$$1(7.5). \quad \text{a) Sea el sistema } \begin{cases} x' = 1 - x + 3y \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$$

- i) Dibujar su mapa de fases.
- ii) Escribir su solución general.
- iii) ¿Es estable la solución que satisface $x(0)=2, y(0)=1$?

$$b) \text{ Sea la ecuación diferencial: } y' = \frac{x+y-1}{1-x+3y}.$$

- iv) Estudiar la existencia y unicidad de sus soluciones.
- v) Calcular su solución general.
- vi) Si $y_a(x)$ es la solución que verifica $y_a(0)=a$, estudiar si está definida para todo $x \geq 0$ según los valores de a .
- vii) Estudiar si es estable la solución con $y(2)=1$.

- 2(2.5) En el estudio de las vibraciones de una molécula diatómica se llega a una ecuación del tipo:

$$u'' + \frac{2u'}{x} + (2e^{-x} - e^{-2x} - 1)u = 0$$

- a) Calcular hasta x^4 el desarrollo en serie de una de sus soluciones.
- b) ¿Están todas las soluciones de la ecuación acotadas en el origen?

MÉTODOS MATEMÁTICOS II - 1er PARCIAL - Septiembre 1987

$$1) \text{ Dado el sistema de ecuaciones: } \begin{cases} x' = 2x - 4y + ax^3 + by^2 \\ y' = 2x - 2y \end{cases}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a^2 + b^2 \neq 0.$$

Elegir a y b de forma que el sistema tenga un centro en el origen y dibujar el mapa de fases. Calcular la ecuación de las órbitas. Señalar en el mapa de fases una órbita correspondiente a una solución del sistema que sea inestable y otra asociada a una solución definida para todo t .

- 2) Calcular la solución del problema

$$y''' + y' - 10y = 36te^{-t}, \quad y(0)=0, y'(0)=-3, y''(0)=2.$$

Determinar el límite de la solución cuando $t \rightarrow \infty$ y discutir su estabilidad.

MÉTODOS MATEMÁTICOS II - Parcial - Febrero 1988

1 (3 puntos). Hallar la solución de

$$\begin{cases} y'' - y' = f_n(t) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ n e^{n-t} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}.$$

Estudiar lo que sucede cuando $n \rightarrow \infty$.

2 (3 puntos). La ecuación (E) $x^2(x^2-1)y'' + 2x^3y' + 2y = 0$ ($y' = \frac{dy}{dx}$)

aparece al hacer el cambio $t = \frac{1}{x}$ en la ecuación

$$(F) \quad (1-t^2)\ddot{y} - 2t\dot{y} + 2y = 0 \quad (\dot{y} = \frac{dy}{dt}).$$

Calcular una solución no trivial de (E) acotada en $x=0$.

Si en el desarrollo en serie de esta solución deshacemos el cambio $x = \frac{1}{t}$ ¿dónde converge la nueva serie?

3 (4 puntos). a) Sea $\frac{dy}{dx} = \frac{x^{1/2}}{y}$.

Dibujar algunas isoclinas, hallar su solución general y dibujar sus curvas integrales. Determinar la solución que satisface $y(1/9) = 2/9$. ¿Es estable?

b) Sea $\frac{d^2x}{dt^2} = x^{1/2}$.

Determinar la solución que satisface $x(2) = \frac{1}{9}$, $\dot{x}(2) = \frac{2}{9}$.

¿Existe más de una solución satisfaciendo $x(0) = \dot{x}(0) = 0$?

Sea $\bar{x}(t)$ la solución que verifica $\bar{x}(0) = 2$, $\dot{\bar{x}}(0) = -1$. ¿Existe algún $T > 0$ tal que $\bar{x}(T) = 2$?

MÉTODOS II - EXAMEN FINAL - 1ª PARTE - Junio 1988 - Grupo C

1) (3 puntos). Sea la ecuación $2t^2y'' - 3ty' + 3y = t^{5/2}$.

a) Calcular su solución general.

b) Imponer (si es posible) unas condiciones iniciales para las que exista más de una solución.

2) (3 puntos). Sea $y' = (1 - \cos t)y - 1$.

a) ¿Cuántas soluciones de período 2π tiene?

b) ¿Es estable la solución que satisface $y(0) = 1$?

c) Calcular aproximadamente en $t = 0.2$ el valor de la solución con $y(0) = 1$

i) bien por el método de Euler con $h = 0.1$.

ii) bien por el método de Euler modificado con $h = 0.2$.

iii) o bien a través del cálculo de la segunda aproximación sucesiva de Picard.

3) (4 puntos). Sea el sistema (s) $\begin{cases} \dot{x} = y^p \\ \dot{y} = x^q \end{cases}$ donde $p > 0, q > 0, x \geq 0, y \geq 0$.

a) Considérese en primer lugar el caso $p = q > 0$; hállese la ecuación de las órbitas y dibújense estas aproximadamente.

b) En el caso anterior, tómese la solución que verifica $x(0) = y(0) = 1$. ¿Existe algún valor de p para el que esta solución explote (es decir, tienda a infinito) en tiempo finito?

c) Sea ahora el caso general $p \neq q$. ¿Cuándo se puede garantizar que existan soluciones que explotan en tiempo finito?

MÉTODOS II - SEPTIEMBRE 1988 - 1er PARCIAL

1) (4 puntos). a) Comprobar que una ecuación de la forma $\frac{dy}{dx} = x^{n-1}f(y+ax^n)$ se convierte en una de variables separadas haciendo el cambio $z = y + ax^n$.

b) Hallar la solución general de $\frac{dy}{dx} = 2x(y+x^2)^2$.

c) Hallar después esta solución considerándola como ecuación de Ricatti.

d) ¿Está definida para todo x la solución que satisface $y(1) = 2$?

2 (3 puntos). Resolver: $\begin{cases} x' = -x + e^{\frac{2}{e}\delta(t-1)} \\ y' = x - y \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{matrix} x(0) = 0 \\ y(0) = 2 \end{matrix}.$

3 (3 puntos). Sea $x'' = A \sin x \cos x$.

a) Discutir para todos los valores de A la estabilidad de la solución trivial $x = y = 0$.

b) ¿Para qué valores de A existen soluciones periódicas no triviales de la ecuación?