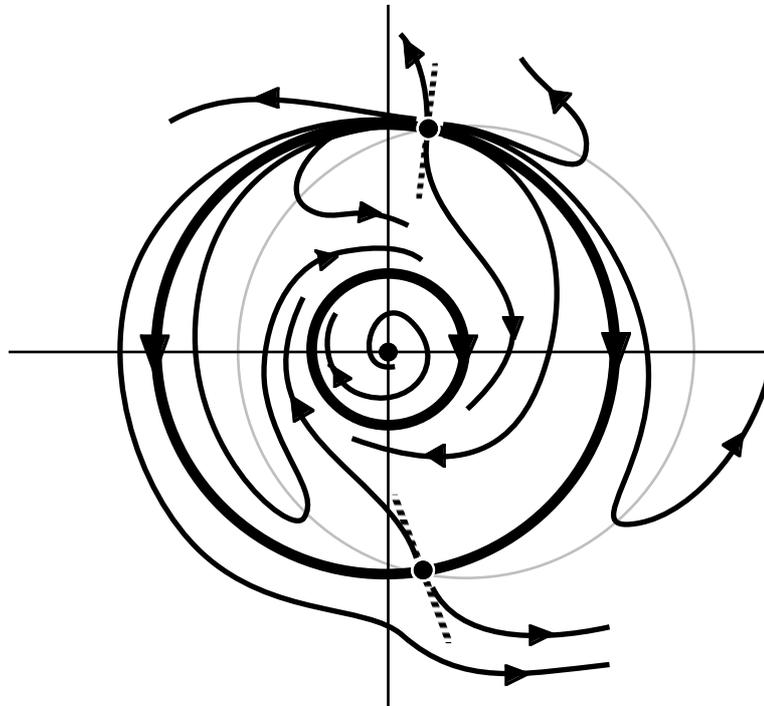


# apuntes de ecuaciones diferenciales ordinarias



**Pepe Aranda**  
**Métodos Matemáticos**  
**Físicas Complutense**  
**[pparanda@fis.ucm.es](mailto:pparanda@fis.ucm.es)**

# Indice

<b>Introducción</b>	<b>1</b>	
<b>1. Ecuaciones de primer orden</b>	<b>3</b>	
1.1 Métodos elementales de resolución	4	
1.2 Dibujo aproximado de soluciones	7	
1.3 Métodos numéricos	9	
1.4 Existencia y unicidad	11	
1.5 Prolongabilidad	15	
1.6 Dependencia continua	17	
1.7 Estabilidad	18	
1.8 Ecuaciones autónomas	22	
1.9 Unos ejemplos de bichos	24	
<b>2. Sistemas y ecuaciones lineales</b>	<b>27</b>	
2.1 Propiedades generales de sistemas y ecuaciones	28	
2.2 Sistemas de dos ecuaciones lineales y ecuaciones lineales de segundo orden	30	
2.3 Sistemas y ecuaciones lineales de orden n. Estabilidad	37	
2.4 Transformada de Laplace	42	
2.5 Soluciones periódicas de ecuaciones lineales	46	
<b>3. Soluciones por medio de series</b>	<b>49</b>	
3.1 Puntos regulares	50	
3.2 Puntos singulares regulares	53	
3.3 Ecuación de Legendre	57	
3.4 Ecuación de Bessel	59	
<b>4. Mapas de fases</b>	<b>61</b>	
4.1 Sistemas de dos ecuaciones autónomas	62	
4.2 Clasificación de puntos críticos	65	
4.3 Ecuaciones autónomas de segundo orden	69	
4.4 Sistemas y ecuaciones exactos	71	
4.5 ¿Centro o foco?	73	
4.6 Ejemplos con puntos no elementales	75	
4.7 Funciones de Lyapunov	77	
<b>problemas 1</b>	<b>p1</b>	
<b>problemas 2</b>	<b>p5</b>	
<b>problemas 3</b>	<b>p9</b>	
<b>problemas 4</b>	<b>p13</b>	

# Bibliografía

- BD **Boyce-Di Prima.** ECUACIONES DIFERENCIALES Y PROBLEMAS CON VALORES EN LA FRONTERA . (Limusa)
- R **Ross.** ECUACIONES DIFERENCIALES. (Reverté)
- Br **Braun.** ECUACIONES DIFERENCIALES Y SUS APLICACIONES. (Interamericana)
- P **Plaat.** ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS. (Reverté)
- S **Simmons.** ECUACIONES DIFERENCIALES (con aplicaciones y notas históricas). (McGraw-Hill)
- E **Elsgolts.** ECUACIONES DIFERENCIALES Y CALCULO VARIACIONAL. (Mir)
- G **Guzmán.** ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS. TEORIA DE ESTABILIDAD Y CONTROL. (Alhambra)

Las secciones 1.1 y 1.2 se pueden encontrar en cualquiera de los siete libros.

Para ampliar el cálculo numérico (1.3) está muy bien el capítulo 8 del BD; véanse también R y Br.

Hay resultados de existencia y unicidad (1.4) en todos los libros, aunque las demostraciones no suelen citar los espacios de Banach; la muy larga demostración del Teor 6 está en G.

Las ideas sobre prolongabilidad de 1.5 sólo suelen ser tratadas con rigor en libros más abstractos y difíciles de leer (como el G); algo se dice sobre el tema en R y P.

De dependencia continua (1.6) hablan R, E y G.

La teoría de estabilidad es propia de libros más avanzados y se suele tratar en el marco más general de los sistemas de ecuaciones; en 1.7 se dan un par de versiones para ecuaciones de primer orden de teoremas de G; los demás libros se suelen limitar a hablar de estabilidad de soluciones constantes de sistemas autónomos (en los apuntes en el capítulo 4); algunos de ellos tratan también la estabilidad de sistemas y ecuaciones lineales con coeficientes constantes (2.3 en los apuntes).

La sección 1.8 sigue, en general, al P.

Los cinco primeros libros incluyen bastantes aplicaciones de las ecuaciones diferenciales a los problemas reales; tal vez las más curiosas se encuentren en el Br.

Los teoremas generales de 2.1 se puede estudiar en G.

Todos los libros, excepto G, empiezan estudiando directamente las ecuaciones lineales y se ocupan después de los sistemas, lo que tal vez resulte más pedagógico (los apuntes, para ahorrar tiempo, lo hacen al revés); además suelen incluir repases, más o menos detallados, de la teoría de matrices (véase, por ejemplo, el BD).

La transformada de Laplace (2.4) se utiliza en BD, Br, R y S, especialmente en los dos primeros.

Para ecuaciones con coeficientes periódicos (2.5), ver P.

La solución por medio de series (capítulo 3), tanto en torno a puntos regulares como en torno a singulares regulares, se puede consultar en BD, Br, R y S; el último incluye un estudio sobre las propiedades de diferentes funciones especiales.

Los sistemas autónomos (capítulo 4) se tratan con detalle y rigor en P (incluyendo la complicada demostración del Teor 1 de 4.2), aunque también son recomendables las diferentes formas de estudiarlos de BD, Br y R; se puede profundizar en las funciones de Lyapunov en E y G; se puede leer el estudio de los ciclos límite, no incluido en los apuntes, de alguno de los otros cinco libros.

Hay un capítulo dedicado a la historia de las ecuaciones diferenciales en G, una pequeña sección en BD y diversos apuntes históricos en S.

BD, R, Br y S estudian además los problemas de contorno y el método de separación de variables para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales lineales de segundo orden; las de primer orden, lineales y no lineales, se tratan en E; otro tema relacionado con las ecuaciones diferenciales, el cálculo de variaciones, se ve en E y S.

