Introducción

Una **ecuación diferencial** es una ecuación en la que aparecen una función incógnita y alguna de sus derivadas. Si la función es de una variable la ecuación se llama **ordinaria**. Si es de varias variables, la ecuación es en **derivadas parciales**. Ejemplos de ecuaciones ordinarias son:

[1] $y'(t) = -ky(t)$ [ecuación que rige la desintegración radiactiva]

[2] $y'(t) = by(t)\,[\,M - y(t)\,]$ [describe la evolución de una población animal]

[3] $x''(t) + a\,\mathrm{sen}[x(t)] = 0$ [ecuación del péndulo]

[4] $x''(t) + px'(t) + qx(t) = f(t)$ [oscilaciones forzadas de un sistema muelle-masa]

[5] $x^{iv}(t) - cx(t) = 0$ [ecuación de las vibraciones de una viga]

(k, b, m, a , p, q y c son constantes positivas que se determinan experimentalmente)

Y son ecuaciones en derivadas parciales, por ejemplo:

[6] $\frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)$, con $u=u(x,t)$ [ecuación del calor]

[7] $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)$, con $u=u(x,t)$ [ecuación de ondas]

[8] $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, con $u=u(x,y)$ [ecuación de Laplace]

Se llama **orden** de una ecuación al orden más alto de las derivadas que aparecen en ella. Así, [1] y [2] son de primer orden, [3], [4] y las tres en derivadas parciales son de segundo orden, y la ecuación [5] es de cuarto orden.

Solución de una ecuación diferencial es una función, tantas veces derivable como sea el orden de la ecuación, que al ser sustituida en ésta la convierte en una identidad. Por ejemplo, $y(t) = e^{-kt}$ es solución de [1] pues $y'(t)= -ke^{-kt} =-ky(t)$. Más aún, toda función de la forma $y(t) = Ce^{-kt}$ para cualquier constante C es también solución. A esta expresión, que recoge todas las soluciones de la ecuación, se le llama **solución general**. Para precisar una **solución particular** de una ecuación será necesario imponer además alguna **condición inicial**. Para la ecuación [1] de primer orden basta imponer el valor de la solución en un instante dado: por ejemplo, $y(0)=7$ nos determina $y(t)=7e^{-kt}$ (para una ecuación órdinaria de orden n la solución general contendrá n constantes arbitrarias y será necesario imponer n datos iniciales). Al conjunto de una ecuación y unos datos iniciales se le llama **problema de valores iniciales**.

Aunque nuestro principal deseo a la vista de cualquier ecuación diferencial que nos pueda aparecer sería calcular su solución general, esto será posible sólo en contadas ocasiones (será más difícil cuanto mayor sea su orden y más aún si es en derivadas parciales). Parte de la teoría de ecuaciones diferenciales se dedica a describir estos escasos métodos de resolución. Pero otra parte importante se dedica a obtener información sobre las soluciones de una ecuación sin necesidad de resolverla: existencia, unicidad, dependencia continua de los datos iniciales y de los parámetros que puedan aparecer, comportamiento asintótico, valores aproximados de las soluciones (más precisos con ayuda de ordenadores),...

Esta parte de los apuntes trata las ecuaciones diferenciales ordinarias. El primer capítulo está dedicado a las de primer orden. Comienza describiendo los métodos elementales de integración, para pasar pronto al resto de su teoría: dibujo aproximado, cálculo numérico, teoremas de existencia y unicidad (si la ecuación no es regular puede que no exista ninguna solución o que haya más de una satisfaciendo un dato inicial dado), prolongabilidad (¿cuál es el máximo intervalo en el que está definida cada solución?), dependencia continua, estabilidad (¿se parecen las soluciones con datos iniciales próximos cuando t tiende a ∞?), propiedades de las ecuaciones autónomas (aquellas en las que no aparece la t explícitamente en su expresión). Acaba utilizando parte de la teoría para estudiar unos ejemplos concretos.

El segundo capítulo trata de los sistemas de ecuaciones y de las ecuaciones de orden superior a 1 para los que más información se puede obtener y para los que en más ocasiones se puede calcular su solución: los lineales. Primero se da la generalización de las propiedades vistas de las ecuaciones de primer orden a esta situación más complicada. Luego se tratan, para ir fijando ideas, los sistemas de dos ecuaciones y las ecuaciones de orden 2. Se pasa después a dimensión n y se introduce la técnica de resolución mediante transformadas de Laplace, para acabar estudiando la existencia de soluciones periódicas.

El capítulo tercero describe cómo resolver mediante series de potencias las ecuaciones lineales de segundo orden (único método posible en bastantes ocasiones), primero en torno a los llamados puntos regulares y después en torno a los singulares regulares. Se aplica entonces el método anterior a dos ecuaciones particulares de interés físico: la de Legendre y la de Bessel.

El cuarto capítulo está destinado a obtener los dibujos de las proyecciones sobre un plano de las soluciones de los sistemas y ecuaciones autónomos de segundo orden (los llamados mapas de fase), ya que tales sistemas y ecuaciones casi nunca se pueden resolver y sin embargo aparecen en muchas ocasiones en ejemplos físicos. Empieza por las propiedades generales, luego clasifica los mapas de fases en las cercanías de los puntos proyección de las soluciones constantes, trata el caso particular de las ecuaciones, se centra a continuación en un tipo concreto de sistemas: los exactos, analiza casos dudosos de la clasificación citada y acaba analizando la estabilidad mediante las llamadas funciones de Lyapunov.

1. Ecuaciones de primer orden

Este primer capítulo está dedicado a las ecuaciones de primer orden con la variable despejada, es decir, a las ecuaciones [e] $y'(t)=f(t,y(t))$, o como usualmente se escriben, [e] $y'=f(t,y)$ (utilizaremos la notación $y(t)$, frente a las más usuales $y(x)$ o $x(t)$, pues la y siempre es variable dependiente y la t es variable independiente).

Ante cualquier ecuación diferencial lo primero que intentamos es resolverla. Pero esto se consigue sólo en contadas ocasiones, incluso si es de primer orden, la más sencilla que se puede considerar. En la sección 1.1 hallaremos la solución los escasos tipos de ecuaciones resolubles (separables, lineales, exactas y otras que se pueden reducir a ellas).

Dedicaremos el resto del capítulo a obtener información sobre las soluciones de [e] sin necesidad de resolverla. Así en la sección 1.2 veremos como dibujarlas aproximadamente a partir del llamado campo de direcciones, conjunto de segmentos con pendiente proporcionada por la $f(t,y)$.

En la sección 1.3, mediante diversos métodos numéricos programables (Euler, Euler modificado y Runge-Kutta), será mucho mayor la precisión en el cálculo aproximado de la solución que satisface un determinado dato inicial, es decir, la solución del problema de valores iniciales:

$$\boxed{[P] \quad \begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_o) = y_o \end{cases}}$$

En la sección 1.4 veremos los teoremas de existencia y unicidad: si la f es lo bastante regular en un entorno del punto (t_o,y_o) existirá una única solución $y(t)$ de [P], definida al menos en un pequeño intervalo que contiene a t_o. Más complicado será determinar si el máximo intervalo en que dicha solución está definida es finito o infinito. A ello está dedicada la sección 1.5.

La sección 1.6 nos asegura que si la f es regular la solución de [P] se parecerá en intervalos finitos a la de los problemas obtenidos variando ligeramente los datos iniciales o los posibles parámetros que pueden aparecer en la ecuación. Si el intervalo es infinito no siempre las soluciones con datos iniciales próximos son parecidas para valores grandes de t . Al estudio de cuándo sucede esto (es decir, de cuándo la solución es estable) está dedicada la sección 1.7. Trataremos en especial las ecuaciones lineales y las obtenidas perturbándolas ligeramente.

La sección 1.8 se dedica a las ecuaciones autónomas (generalizadas en el capítulo 4) sobre las que es fácil conseguir mucha información sin resolverlas.

Por último, en la sección 1.9 aplicaremos parte de la teoría vista al estudio de diferentes ecuaciones que pueden describir la evolución de la población de una especie animal.

1.1 Métodos elementales de resolución

Ecuaciones separables.

Son ecuaciones que se pueden escribir en la forma [s] $\boxed{y' = \frac{p(t)}{q(y)}}$.

Entonces $\int q(y)\,dy = \int p(t)\,dt + C$ y si podemos encontrar P y Q primitivas de p y q:

$$Q(y) = P(t) + C \,.$$

Si pudiésemos despejar y de la última ecuación obtendríamos explícitamente la solución general; en caso contrario se diría que la solución viene dada implícitamente. Para determinar la constante arbitraria C que aparece en la solución general necesitamos imponer una condición inicial.

Ej 1. $\boxed{y' = ty^3} \;\to\; \int y^{-3}\,dy = \int t\,dt + C \;\to\; -\frac{1}{2}y^{-2} = \frac{1}{2}t^2 + C \;\to\; y = \pm[C^* - t^2]^{-1/2}$

que es la solución general (hemos llamado $C^*=-2C$; a partir de ahora, como se hace normalmente por comodidad en la escritura, no cambiaremos el nombre de las constantes arbitrarias que nos vayan apareciendo: todas ellas serán C).

Hallemos diferentes soluciones particulares que satisfacen distintos datos iniciales (por ahora, mientras no tengamos el teorema de existencia y unicidad, no nos preocuparemos de si las funciones obtenidas son la únicas que los satisfacen):

$$y(0)=1 \;\to\; 1 = \pm[C^*]^{-1/2} \;\to\; C^* = 1 \;\to\; y = [1-t^2]^{-1/2}$$

pues, evidentemente, sólo nos sirve el signo + de la raíz ($y(0)=-1 \to y = -[1-t^2]^{-1/2}$)

$$y(0)=0 \;\to\; 0 = \pm[C^*]^{-1/2} \quad \text{que no se satisface para ningún } C^* .$$

Sin embargo, es claro que $y\equiv 0$ satisface la ecuación y cumple esa condición inicial. No es raro que en el proceso de cálculo desaparezca alguna solución particular.

Hay ecuaciones que no son de la forma [s] , pero que se convierten en ecuaciones separables haciendo un cambio de variable. Los dos tipos principales son:

Ecuaciones **homogéneas:** $\boxed{y' = f(y/t)}$.

Se convierten en separables mediante el cambio $z = \frac{y}{t}$, pues

$$y = tz \;\to\; y' = tz' + z = f(z) \;\to\; \frac{z'}{f(z)-z} = \frac{1}{t} \;\to\; \int \frac{dz}{f(z)-z} = \ln|t| + C$$

Ej 2. $\boxed{t^2y' = ty+3y^2} \;\to\; y'=y/t+3(y/t)^2 \;\to\; tz'+z=z+3z^2 \;\to\; z^{-1}=C-3\ln|t| \;\to\; y = \frac{t}{C-3\ln|t|}$

Ecuaciones del tipo: $\boxed{y' = f(at+by)}$, con a y b constantes.

Se hace $z = at+by$ y se tiene: $z' = a+by' = a+bf(z) \;\to\; \int \frac{dz}{a+bf(z)} = t + C$

Ej 3. $\boxed{y' = (y+2t)^{-2}-1}$ $z=y+2t \;\to\; z'=z^{-2}+1 \;\to\; \int \frac{z^2dz}{1+z^2} = z - \operatorname{arc\,tag} z = t+C \;\to$

$y - \operatorname{arc\,tag}(y+2t) = C - t$, expresión de la que no se puede despejar la y.

Ecuaciones lineales.

Son de la forma [l] $\boxed{y' = a(t)y + f(t)}$.

Si $f(t)\equiv 0$ la ecuación se dice **homogénea**: $y' = a(t)y$, que ya sabemos resolver:

$$\ln|y| = \int a(t)\,dt + C \;\to\; |y| = e^C e^{\int a(t)dt} \;\to\; \boxed{y = C\,e^{\int a(t)dt}}$$

(al sustituir e^C por C hemos incluido las soluciones positivas y negativas provenientes del valor absoluto y además la solución $y\equiv 0$ que nos habíamos comido al dividir por y).

Para [l], ecuación **no homogénea**, hallamos su solución sustituyendo la C de la solución general de la homogénea por una función C(t) (método de variación de las constantes aplicable a situaciones más generales). Llevando nuestra conjetura a [l] :

$$y = C(t)\,e^{\int a(t)dt} \;\to\; C'e^{\int a} + a\,C\,e^{\int a} = a\,C\,e^{\int a} + f \;\to\; C(t) = \int C'(t)dt = \int e^{-\int a(t)dt} f(t)dt + C$$

Por tanto, la solución **general** de [l] es: $\boxed{y = C e^{\int a(t)dt} + e^{\int a(t)dt} \int e^{-\int a(t)dt} f(t)dt}$

(observemos que la solución general de una ecuación lineal resulta ser la suma de la solución general de la homogénea más una solución particular de la no homogénea)

Se comprueba inmediatamente que la solución **particular** que satisface $y(t_o)=y_o$ es:

$$\boxed{y = y_o\, e^{\int_{t_o}^{t} a(s)ds} + e^{\int_{t_o}^{t} a(s)ds} \int_{t_o}^{t} e^{-\int_{t_o}^{s} a(u)du} f(s)\,ds}$$

Si $a(t)\equiv a$ se le llama a [l] ecuación lineal con **coeficientes constantes** y su solución general adopta la forma: $\boxed{y = C e^{at} + e^{at} \int e^{-at} f(t)dt}$

Ej 4. $\boxed{y' = -\frac{y}{t} + e^t \text{ con } y(1)=1}$ $\to$ $y = 1.e^{-\ln t} + e^{-\ln t}\int_1^t e^{\ln s} e^s\,ds = \frac{1}{t} + e^t - \frac{e^t}{t}$

Hay otras ecuaciones que se pueden reducir a lineales:

Ecuación de **Bernouilli**: $\boxed{y' = a(t)y + f(t)y^p}$, $p\neq 1$. O sea, $y^{-p}y' = a(t)y^{1-p} + f(t)$.

Haciendo $z = y^{1-p}$ se convierte en $z' = (1-p)a(t)z + (1-p)f(t)$ que es lineal.

Ecuación de **Ricatti**: $\boxed{y' = a(t)y + b(t)y^2 + f(t)}$

Se puede resolver si se conoce una solución particular y_p de la ecuación (en general es imposible). En ese caso, el cambio $u = y - y_p$ la convierte en una de Bernouilli con $p=2$: $u' = [a(t)+2b(t)y_p(t)]u + b(t)u^2$, que con $z = u^{-1}$ se convierte en lineal.

Ej 5. $\boxed{(1+t^3)y' + 2ty^2 + t^2y + 1 = 0}$ Tanteando obtenemos la solución particular $y = -t$.

Haciendo $u = y+t$ y $z = u^{-1}$ se llega a la lineal $z' = -\frac{3t^2}{1+t^3}z + \frac{2t}{1+t^3}$.

Resolviéndola y deshaciendo los cambios obtenemos la solución general: $y = \frac{1-Ct}{C+t^2}$.

Ecuaciones exactas.

Consideremos una ecuación escrita en la forma: [e] $\boxed{M(t,y) + N(t,y)\, y' = 0}$.

[e] se dice **exacta** si existe una función de dos variables $U(t,y)$ tal que $U_t = M$ y $U_y = N$.

En ese caso la solución general de [e] es $\boxed{U(t,y) = C}$, pues cualquier función derivable y(t) definida implícitamente por esta expresión satisface la ecuación:

$$0 = \frac{d}{dt} U(t,y(t)) = U_t + U_y\, y' = M + N\, y'$$

Dicho de otra forma, [e] es exacta si existe una función potencial U para el campo vectorial (M,N). Para que tal U exista se sabe que es necesario que $M_y \equiv N_t$ (y que es suficiente si M_y y N_t son continuas en un abierto simplemente conexo). Una vez que comprobemos que U existe se puede calcular como en el ejemplo siguiente.

Ej 6. $\boxed{y' = -\frac{3t^2+6ty^2}{6t^2y+4y^3}}$, o sea, $(3t^2+6ty^2) + (6t^2y+4y^3)\, y' = 0$. Es exacta: $M_y = 12ty = N_t$.

La U debe cumplir : $\left\{ \begin{array}{l} U_t = 3t^2+6ty^2 \to U = t^3+3t^2y^2+g(y) \\ U_y = 6t^2y+4y^3 \to U = 3t^2y^2+y^4+h(t) \end{array} \right\} \to U = t^3+3t^2y^2+y^4$

Y la solución general en forma implícita es $t^3+3t^2y^2+y^4 = C$

Aunque [e] no sea exacta podríamos intentar encontrar una función $f(t,y)$, **factor integrante** de [e] , tal que $fM+fNy'=0$ sí lo sea. Debería entonces cumplirse:

$$[fM]_y \equiv [fN]_t \ , \text{ es decir, } \quad [*]\ N f_t - M f_y = [M_y - N_t]\, f$$

ecuación en derivadas parciales bastante más complicada que la inicial. Encontrar la f es, pues, un problema irresoluble en general, pero posible en ciertos casos especiales. Por ejemplo, si $\mathbf{[M_y - N_t]/N}$ resulta ser una función que sólo depende de t , [e] admite un factor integrante $\mathbf{f(t)}$ que sólo depende de la variable t , pues [*] pasa a ser una ecuación ordinaria (lineal homogénea) que sabemos resolver :

$$f'(t) = \frac{M_y - N_t}{N} f(t) \quad \to \quad f(t) = e^{\int [M_y - N_t]/N} \quad \text{(eligiendo C=1).}$$

Ej 7. $\boxed{(t - t^2 y)\, y' - y = 0}$ $M = -y$, $N = t - t^2 y$, $M_y - N_t = 2ty - 2 \not\equiv 0$. No es exacta.

Sin embargo, $\frac{M_y - N_t}{N} = -\frac{2}{t} \to f(t) = e^{-2\ln t} = \frac{1}{t^2} \to \left(\frac{1}{t} - y\right) y' - \frac{y}{t^2} = 0$ es exacta .

Siguiendo como en el ejemplo anterior se tiene la solución general: $\frac{y}{t} - \frac{1}{2} y^2 = C$.

1.2 Dibujo aproximado de soluciones

Consideremos la ecuación [e] $\boxed{y' = f(t,y)}$.

Cada una de sus soluciones es una función y(t) cuya gráfica tiene en cada uno de sus puntos (t,y(t)) la pendiente asignada por la conocida función f(t,y) . Supongamos que a cada punto (t,y) del plano le asociamos un segmento de pendiente f(t,y) (a este conjunto de segmentos se le llama **campo de direcciones** de [e]). Las soluciones de [e] serán entonces **curvas tangentes en cada punto a los segmentos del campo de direcciones**. Para dibujar este campo de forma organizada conviene considerar las **isoclinas**, curvas en que la pendiente asignada por f es constante: f(t,y) = K . Otras ideas útiles para el dibujo aproximado las iremos viendo en los ejemplos.

Ej 1. Dibujemos aproximadamente las soluciones de $\boxed{y'=\frac{2t-y}{t-y}}$

Trazamos algunas isoclinas $\frac{2t-y}{t-y}=K \rightarrow y=\frac{2-K}{1-K}t$ (rectas que pasan por el origen), para diferentes valores de K y sobre cada una de ellas dibujamos algunos segmentos de pendiente K:

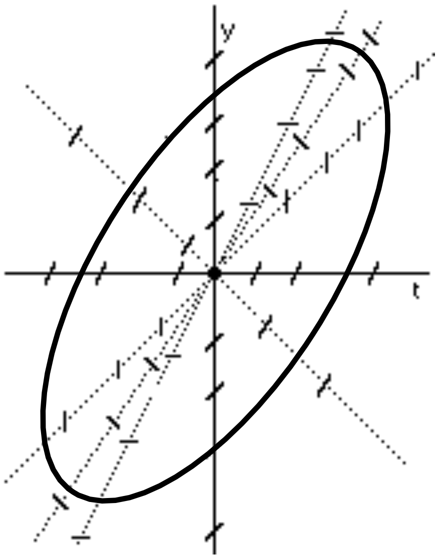
$K=0 \rightarrow y=2t$ (segmentos horizontales: posibles máximos y mínimos de las soluciones)

$K=1 \rightarrow t=0$; $K=-1 \rightarrow y=\frac{3}{2}t$; ...

Una vez que sabemos que las isoclinas son rectas y=mt (es trivial ver que esto sucede en toda ecuación homogénea) es más cómodo dibujar la recta de pendiente m que uno quiera y trazar sobre ella segmentos de pendiente $K=f(t,mt)=(2-m)/(1-m)$:

$m=0 \rightarrow K=2$; $m=1 \rightarrow K=\infty$; $m=-1 \rightarrow K=\frac{3}{2}$

Las curvas tangentes a estos segmentos parecen ser cerradas (o tal vez espirales poco abiertas).



Podemos resolver la ecuación y comprobar (el ejemplo es poco práctico). Hay dos formas de hacerlo: mirándola como ecuación homogénea o como exacta:

$$y'=\frac{2-(y/t)}{1-(y/t)} \quad \text{ó} \quad (2t-y)+(y-t)\,y'=0 \ .$$

Por los dos caminos se llega a $y^2-2ty+2t^2=C$ con lo que las soluciones son elipses.

Con más propiedad, cada una de ellas define de hecho dos soluciones en $(-\sqrt{C},\sqrt{C})$:

$y=t+\sqrt{C-t^2}$, $y=t-\sqrt{C-t^2}$ funciones definidas en $[-\sqrt{C},\sqrt{C}]$ no derivables en $t=\pm\sqrt{C}$

.

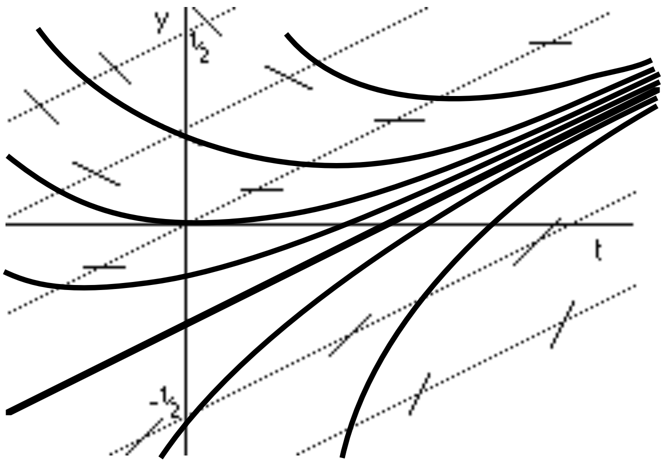
Ampliando el concepto de solución, llamaremos **curva integral** de [e] a una curva tangente en cada punto a su campo de direcciones, aunque no esté descrita por una única función y(t) o tenga tangente vertical en algún punto (como las elipses de antes).

De otra forma, una curva integral de [e] será aquella formada por soluciones y(t) o por soluciones t(y) de la ecuación obtenida mirando t como función de y: [e*] $\boxed{\frac{dt}{dy}=\frac{1}{f(t,y)}}$

Recordando que la derivada de la función inversa es la inversa de la derivada de la función (si ambas derivadas son no nulas) es claro que [e] y [e*] tienen las mismas curvas integrales, aunque tal vez haya soluciones de una que no lo sean de la otra (las elipses del ejemplo están descritas por funciones derivables t(y) cerca de la isoclina y=t de pendiente ∞; cerca de y=2t no se puede poner la t como función derivable de y)

Ej 2. $\boxed{y' = t - 2y}$ $= K \to y = \frac{1}{2}(t-K)$ isoclinas (rectas de pendiente 1/2).

Dibujamos las de K= –1, –1/2, 0, 1/2, 1 y 3/2 (que cortan respectivamente t=0 en y = 1/2, 1/4, 0, –1/4, –1/2 y –3/4).
Si K=1/2, la recta y los segmentos trazados sobre ella tienen la misma pendiente y por tanto la isoclina es solución de la ecuación (por ser tangente al campo de direcciones).



Podemos, también en este caso, resolver la ecuación (que es lineal) y comprobar. Bastará sumar la solución general de la homogénea a la particular ya encontrada:

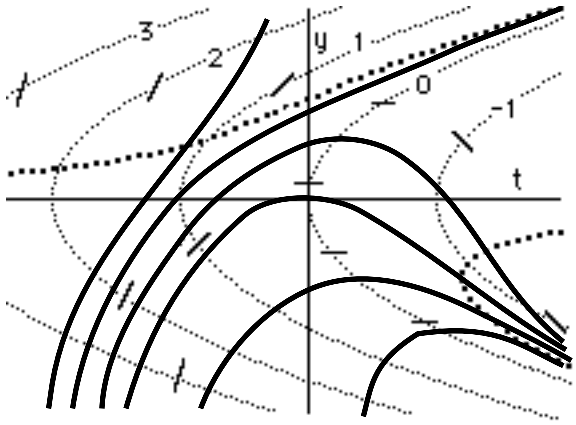
$y = \frac{t}{2} - \frac{1}{4} + Ce^{-2t}$ (a lo mismo llegaríamos con la fórmula: $y = Ce^{-2t} + e^{-2t}\int te^{2t}$).

Ej 3. $\boxed{y' = y^2 - t}$ $= K \to$ las isoclinas son las parábolas $t = y^2 - K$.

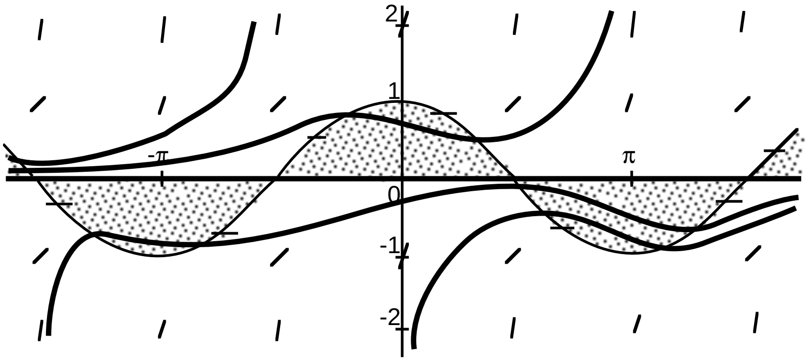
Dibujamos alguna de ellas. La de K=0 nos da máximos de las soluciones (como $y'>0$ si $t<y^2$ e $y'<0$ si $t>y^2$ las soluciones crecen a su izquierda y decrecen a su derecha) .
La curva de puntos de inflexión (a puntos en la figura) la encontramos hallando y'':

$y'' = 2yy'-1 = 2y^3-2ty-1 = 0 \to t = y^2 - \frac{1}{2y}$

Con esos datos se pueden dibujar ya las soluciones aproximadas (y esta ecuación no era resoluble elementalmente).



Ej 4. $\boxed{y' = y^2 - (\cos t)\, y}$ Las isoclinas son complicadas, salvo la de K=0 que nos da la solución y=0 y la curva y=cos t. Es fácil ver que y'<0 en las regiones punteadas (e y'>0 fuera).



Haciendo y''=0 se obtiene una curva poco tratable e y=0 (las rectas solución aparecen entre los puntos de inflexión al ser y''=0 en ellas).
Siempre podemos pintar de uno en uno varios segmentos tras calcular su f(t,y). Con los datos obtenidos podemos esquematizar las soluciones.
(La ecuación es de Bernouilli; su solución es $y = e^{-\operatorname{sen} t}\left(C - \int e^{-\operatorname{sen} t}\,dt\right)^{-1}$, pero al ser la primitiva no calculable nos ayuda poco para el dibujo).

1.3 Métodos numéricos

Ya hemos visto los escasos tipos de ecuaciones de primer orden resolubles y hemos comprobado que las técnicas de dibujo aproximado fallan si la expresión de la ecuación no es especialmente sencilla. Pero aunque la f(t,y) sea complicada siempre podremos acudir a los métodos numéricos (iterativos y fácilmente programables), una pequeña parte de los cuales se presenta en esta sección.

Queremos calcular aproximadamante la solución del problema de valores iniciales:

$$[P] \begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

(suponemos la f suficientemente regular de forma que los teoremas de la próxima sección nos aseguran que dicho problema [P] tiene una única solución y(t) cerca de t_0)

En los tres métodos que vamos a describir iremos hallando valores $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots$ cercanos a los de la solución y(t) en una serie de puntos $t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < \cdots$ separados entre sí una distancia (paso) h, es decir, $t_1 = t_0 + h$, $t_2 = t_0 + 2h$,…, $t_k = t_0 + kh$, …

El más sencillo (y menos preciso) de los métodos el de **Euler**, que consiste en aproximar la solución desconocida por su tangente conocida. Es decir, si h es pequeño es de esperar que el valor de la solución $y(t_0+h)=y(t_1)$ sea próxima al valor de la recta tangente en ese mismo punto: $y_0+hf(t_0,y_0)$, que llamamos y_1. Puesto que (t_1,y_1) se parece al desconocido $(t_1,y(t_1))$ podemos aproximar $y(t_2)$ por el y_2 que obtendremos de (t_1,y_1) de la misma forma que obtuvimos el y_1 a partir del (t_0,y_0) inicial. Prosiguiendo así vamos obteniendo los y_k aproximados (más inexactos según nos alejamos de t_0) dados por:

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + h\, f(t_k, y_k)}$$

Es previsible que se mejore la aproximación si tomamos

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(t_k,y_k) + f(t_k+h\,,\, y_k+hf(t_k,y_k)) \right]}$$ (método de **Euler modificado**)

es decir, si en cada paso elegimos, en lugar de la pendiente en un extremo, el valor medio de las pendientes correspondientes a dos puntos: el de partida y el previsto por la poligonal de Euler.

El tecer método, muy utilizado y bastante más exacto, es el de **Runge-Kutta**, que exige un mayor número de operaciones (aunque a un ordenador no le llevará mucho más tiempo realizarlas) y que en cada paso toma el promedio ponderado de cuatro pendientes, cuyo significado geométrico ya no es fácil de intuir:

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}\left[f_{k1} + 2f_{k2} + 2f_{k3} + f_{k4} \right]}$$

donde $f_{k1} = f(t_k\,,\, y_k)$, $f_{k2} = f(t_k+\frac{h}{2}\,,\, y_k+\frac{h}{2} f_{k1})$, $f_{k3} = f(t_k+\frac{h}{2}\,,\, y_k+\frac{h}{2} f_{k2})$, $f_{k4} = f(t_k+h\,,\, y_k+h\, f_{k3})$

Se puede demostrar que el error local (cometido en cada paso) para cada uno de los métodos citados es proporcional, respectivamente, a h^2, h^3 y h^5, mientras que el error acumulado en sucesivas iteraciones es de orden h, h^2 y h^4. Como era de esperar los resultados mejoran al tomar h más pequeño (pero sólo hasta un límite ya que el error de redondeo que posee toda calculadora u ordenador hace que si disminuimos demasiado el paso h, aparte de incrementarse de tiempo de cálculo, puede aumentar el error).

Ej 1. $\boxed{y'=y^2-t}$ Hallemos numéricamente entre –1 y 3 la solución con $y(-1)=0$.

El dibujo aproximado de la sección anterior no nos aclara si se trata de una de las soluciones que se van a infinito o de una de las que cruzan la isoclina de máximos. Comenzamos con el paso h=0.1. Los y_k obtenidos por los tres métodos están en la siguiente tabla (sólo hemos escrito los correspondientes a los t enteros para t ≥0):

t	Euler	Euler-mod	Runge-Kutta
–1	0	0	0
–0.9	0.1	0.0955	0.0953100738
–0.8	0.191	0.1826934847	0.1823176520
–0.7	0.2746481	0.2629009594	0.2623378481
–0.6	0.3521912579	0.3371304370	0.3363726607
–0.5	0.4245951261	0.4061567380	0.4051902841
–0.4	0.4926232282	0.4705749490	0.4693783604
–0.3	0.5568909927	0.5308364662	0.5293796824
–0.2	0.6179037505	0.5872727793	0.5855155255
–0.1	0.6760842550	0.6401101498	0.6379997588
0	0.7317932469	0.6894770720	0.6869456018
1	1.214197534	0.9357162982	0.9176486326
2	1.988550160	–0.1256257297	–0.1884460868
3	272.5279419	–1.528819223	–1.541258296

Aunque inicialmente los números son similares, los errores acumulados del método de Euler nos dan para t positivos unos valores de la solución ya totalmente diferentes a los reales, que serán más parecidos a los hallados por otros métodos más exactos (convendrá, siempre que se pueda, hacerse una idea de las soluciones que se están tratando antes de meterse con el cálculo numérico para estar avisados sobre las posibles anomalías). Repitiendo los cálculos con pasos más pequeños se obtiene si:

	t	Euler	Euler-mod	Runge-Kutta
h=0.05:	0	0.7100063518	0.6875612633	0.6869451577
	3	–1.361623743	–1.538408604	–1.541275123
h=0.01:	0	0.6916677024	0.6869692560	0.6869451313
	3	–1.526589427	–1.541165493	–1.541276176

Ej 2. $\boxed{y'=t-2y}$ En la sección anterior hallamos su solución general: $y=\frac{t}{2}-\frac{1}{4}+Ce^{-2t}$.

Vamos a resolverla numéricamente con $y(0)=1$ para comparar con los valores exactos (para ese dato inicial es C=5/4). Para h=0.1 listamos todos los resultados parciales:

t	Euler	Euler-mod	Runge-Kutta	exacto
0	1	1	1	1
0.1	0.8	0.825	0.8234166667	0.8234134413
0.2	0.65	0.6905	0.6879053389	0.6879000575
0.3	0.54	0.58921	0.5860210311	0.5860145451
0.4	0.462	0.5151522	0.5116682856	0.5116612051
0.5	0.4096	0.463424804	0.4598565477	0.4598493015
0.6	0.37768	0.4300083393	0.4264998841	0.4264927649
0.7	0.362144	0.4116068382	0.4082530051	0.4082462049
0.8	0.3597152	0.4055176073	0.4023770104	0.4023706475
0.9	0.36777216	0.4095244380	0.4066294710	0.4066236103
1	0.384217728	0.4218100392	0.4191744355	0.4191691040

Comparamos ahora el resultado para t=1 con diferentes pasos:

h=0.1	0.3842177280	0.4218100392	0.4191744355	0.4191691040
h=0.05	0.4019708182	0.4197780719	0.4191694105	0.4191691040
h=0.01	0.4157744449	0.4191920025	0.4191691045	0.4191691040
h=0.001	0.4188306531	0.4191693299	0.4191691040	0.4191691040
h=0.0001	0.4191352691	0.4191691063	0.4191691040	0.4191691040

(obsérvese por ejemplo como el Runge-Kutta con h=0.1 da un valor más exacto que el Euler con h=0.0001 [y son 40 frente a 10000 evaluaciones de la función f(t,y)])

1.4 Existencia y unicidad

Consideremos el problema de valores iniciales $[P] \begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_o) = y_o \end{cases}$

Supondremos la f definida en un determinado subconjunto $D \subset \mathbf{R}^2$ y que $(t_o,y_o) \in D$.

Precisamos con detalle la definición dada de solución: una **solución** de [P] es una función $y(t)$ **derivable en un intervalo** $I \ni t_o$ tal que $y(t_o)=y_o$ y tal que para todo $t \in I$ se cumple que $(t,y(t)) \in D$ e $y'(t) = f(t,y(t))$.

Nuestro objetivo es precisar en qué condiciones existe una única solución de [P].

Sea $E = \{y:I \to \mathbf{R} \,/\, y \text{ continua}\}$. Dada una $y \in E$ la función Ty definida por:

$$\boxed{Ty(t) = y_o + \int_{t_o}^{t} f(s,y(s))\, ds}$$

será también continua si f es continua. Hemos definido así un operador $T:E \to E$ que será importante en la demostración de los teoremas de existencia y unicidad.

Teor 1. $\boxed{\text{y es solución de [P]} \Leftrightarrow \text{y es punto fijo de T (es decir, si } Ty=y\text{)}}$

El teorema fundamental del asegura que y es solución de [P] si y sólo si satisface la ecuación integral $y(t) = y_o + \int_{t_o}^{t} f(s,y(s))\, ds$ de donde se sigue el resultado.

En la teoría de análisis funcional hay resultados de existencia y unicidad para puntos fijos de operadores, como el siguiente **teorema de la aplicación contractiva:**

Teor 2. Sea E un espacio de Banach (normado y completo) y sea $T:E \to E$ un operador tal que para todo $y,y^* \in E$ se tiene $\| Ty - Ty^* \| \le a \| y - y^* \|$, $0 \le a < 1$.
Entonces existe un único punto fijo para T.

A partir de cualquier y_0 de E definimos la sucesión: $y_1=Ty_0$, $y_2=Ty_1$, … , $y_{n+1}=Ty_n$, …

Probamos que $\{y_n\}$ es una sucesión de Cauchy:

$$\| y_n - y_{n+1} \| = \| Ty_{n-1} - Ty_n \| \le a \| y_{n-1} - y_n \| \le a^2 \| y_{n-2} - y_{n-1} \| \le \dots \;\to\; \| y_n - y_{n+1} \| \le a^n \| y_0 - y_1 \|$$

$$\to\; \| y_n - y_{n+k} \| = \| y_n - y_{n+1} + y_{n+1} - \dots - y_{n+k-1} + y_{n+k-1} - y_{n+k} \| \le \| y_n - y_{n+1} \| + \dots + \| y_{n+k-1} - y_{n+k} \| \le$$

$$\le \left[a^n + a^{n+1} + \dots + a^{n+k-1} \right] \| y_0 - y_1 \| = \frac{a^n - a^{n+k}}{1-a} \| y_0 - y_1 \| \le \frac{a^n}{1-a} \| y_0 - y_1 \| < \varepsilon$$

para cualquier ε dado, si n es suficientemente grande.

Como E es completo $\{y_n\}$ converge a un elemento y de E. Veamos que y es punto fijo:

$$T(y) = T(\lim_{n\to\infty} y_n) = \lim_{n\to\infty} T(y_n) = \lim_{n\to\infty} y_{n+1} = y$$

pues T es continua ($\| Ty - Ty^* \|$ es lo pequeño que queramos si $\| y - y^* \|$ es pequeño).

Nos falta ver que y es el único punto fijo. Si y^* también satisface que $Ty^* = y^*$ entonces

$$\| y - y^* \| = \| Ty - Ty^* \| \le a \| y - y^* \| \;\to\; y^* = y$$

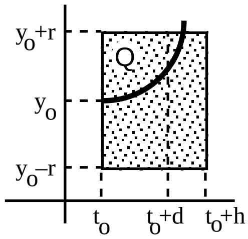
En el enunciado del primer teorema de existencia y unicidad que daremos aparece el término que definimos a continuación:

Diremos que una $f(t,y)$ es **lipschitziana respecto de la y** en $D\subset\mathbf{R}^2$ si existe un L (constante de Lipschitz) tal que $|f(t,y)-f(t,y^*)| < L\,|y-y^*|$ para todo $(t,y),(t,y^*)\in D$.

Teor 3. Sea f continua y lipschitziana respecto de la y en

$$Q=[t_o,t_o+h]\times[y_o-r,y_o+r]$$

Entonces [P] posee solución única definida al menos en el intervalo $I=[t_o,t_o+d]$ donde $d=\text{mín}\left\{h,\frac{r}{M},\frac{1}{2L}\right\}$, siendo M el máximo de $|f(t,y)|$ en Q y L la constante de Lipschitz.



(observemos que el teorema asegura que existe solución única definida al menos en un intervalo (lo que se llama solución **local**) y que este intervalo podría ser pequeño (aún menor que el $[t_o,t_o+h]$ en el que es continua la f); en la próxima sección ya nos preocuparemos de cuál es el intervalo máximo de definición de las soluciones)

Utilicemos el teorema de la aplicación contractiva para el operador $T:E\to E$ definido para el teorema 1, con $E=\{y: I\equiv[t_o,t_o+d]\to\mathbf{R}\ /\ y \text{ continua}\}$. Se supone conocido que este conjunto es un espacio de Banach con la norma del supremo: $\|y\| = \text{máx}\,\{|y(t)|: t\in I\}$.

Probemos primero que T es contractiva: sean $y,y^*\in E$ entonces:

$$|(Ty-Ty^*)(t)| \le \int_{t_o}^{t} |f(s,y(s))-f(s,y^*(s))|\,ds \le L\int_{t_o}^{t} |y(s)-y^*(s)|\,ds \le L\int_{t_o}^{t} \|y-y^*\|\,ds \le$$
$$\le Ld\|y-y^*\| \le \tfrac{1}{2}\|y-y^*\| \quad \forall t\in I \qquad \to \qquad \|Ty-Ty^*\| \le \tfrac{1}{2}\|y-y^*\|$$

Como la f sólo la suponemos continua en Q, dada una $y\in E$ en principio Ty podría no ser continua. Pero si la gráfica de y se mueve en $[t_o,t_o+d]\times[y_o-r,y_o+r]$ sí podemos asegurar que lo es pues entonces $f(t,y(t))$ es continua y Ty, primitiva de continua, también lo será. Además esta Ty tiene también su gráfica contenida en ese mismo rectángulo, pues para todo $t\in I$ se tiene que $(t,Ty(t))\in Q$ ya que:

$$|Ty(t)-y_o| \le \int_{t_o}^{t} |f(s,y(s))|\,ds \le M\int_{t_o}^{t} ds \le M(t-t_o) \le Md \le r \quad \text{si } t\in I$$

Según esto, son continuas las funciones de la sucesión $\{y_n\}$ obtenida aplicando el operador T indefinidamente a la función constante $y_o(t)\equiv y_o$, es decir, la sucesión:

$$y_o(t)=y_o \ ,\quad y_1(t)=y_o+\int_{t_o}^{t} f(s,y_o)\,ds \ ,\quad y_2(t)=y_o+\int_{t_o}^{t} f(s,y_1(s))\,ds \ ,\ \ldots$$

(llamadas **aproximaciones sucesivas de Picard**)

Esta $\{y_n\}$, según la demostración del teorema 2, converge hacia el único punto fijo de T en E que por el teorema 1 resulta ser la solución única de [P].

(hemos enunciado y demostrado el teorema a la derecha de t_o, pero igual se podría haber demostrado a la izquierda, sustituyendo los intervalos $[t_o,t_o+h]$ y $[t_o,t_o+d]$ por los intevalos $[t_o,t_o-h]$ y $[t_o,t_o-d]$)

Observemos que además de demostrar el teorema hemos obtenido una forma de hallar funciones próximas a la solución de [P]. Si estamos en las hipótesis del teorema, las aproximaciones de Picard convergen uniformemente en I (lo hacen en norma) hacia la solución única. [En la práctica las cosas no serán tan fáciles, pues nos pueden salir primitivas no elementales o complicadas de calcular; además, a diferencia de los métodos de 1.3, éste no es programable].

La hipótesis de lipschitzianidad del teorema 3 se puede sustituir por otra más fuerte (pero mucho más fácil de comprobar) basándonos en:

Teor 4. $\boxed{f \text{ y } f_y \text{ continuas en } Q \subset \mathbf{R}^2 \text{ compacto } \Rightarrow f \text{ lipschitziana respecto de la y en } Q}$

Sean $(t,y),(t,y^*) \in Q$. Aplicando el teorema del valor medio a f vista sólo como función de la segunda variable y se tiene que: $f(t,y) - f(t,y^*) = f_y(t,c)\,[y-y^*]$ para algún $c \in (y,y^*)$.

Como $|f_y|$ es continua en el compacto Q alcanza en él su valor máximo L y por tanto:

$$| f(t,y) - f(t,y^*) | = | f_y(t,c) |\, | y-y^* | \le L\, | y-y^* |$$

La implicación contraria no es cierta (aunque casi todas las funciones lipschitzianas que aparezcan en la práctica tengan derivada continua) :

$f(t,y) = |y|$ es lipschitziana en todo $\mathbf{R}^2$ pues $\big|\, |y| - |y^*| \,\big| \le | y-y^* |$ $\forall (t,y),(t,y^*) \in \mathbf{R}^2$
(L=1 o cualquier real > 1) , y sin embargo para ella no existe f_y cuando y=0 .

Podemos pues escribir el siguiente teorema de existencia y unicidad (sólo algo más débil que el anterior) que será el que aplicaremos normalmente y cuyas hipótesis serán, en la mayoría de los casos, comprobables a simple vista:

Teor 5. Si f y f_y son continuas en un entorno de (t_o,y_o) el problema [P] posee solución única definida al menos en un intevalo que contiene a t_o

(no nos molestaremos en precisar el d que nos da el teorema 3, pues la solución y(t) estará usualmente definida en un intervalo mayor que el $[t_o-d,t_o+d]$).

Por último, si a f se le exige sólo la continuidad se puede demostrar (aunque el camino sea mucho más largo) que hay solución aunque puede fallar la unicidad:

Teor 6. Si f es continua en un entorno de (t_o,y_o) posee [P] al menos una solución definida en un entorno de t_o

Ej 1. El problema $\boxed{\begin{array}{l} y' = \text{sen}\left(t-\ln[y^2+e^t]\right) \\ y(t_o) = y_o \end{array}}$ tiene solución única local para todo t_o y todo y_o pues f y f_y son continuas en un entorno de (t_o,y_o) (son continuas en todo $\mathbf{R}^2$) .

Ej 2. Sea $\boxed{\begin{array}{l} y' = y^2 - t \\ y(-1)=0 \end{array}}$ f y f_y continuas en un entorno de $(-1,0) \to$ solución única.

Hallemos las dos primeras aproximaciones de Picard (ahora las integrales son sencillas):

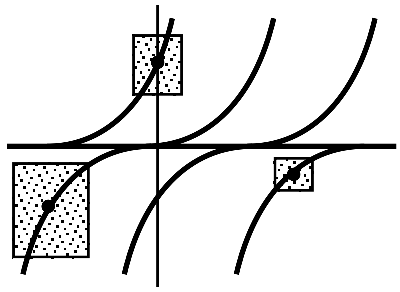
$$y_o(t) = 0 \;\to\; y_1(t) = 0 + \int_{-1}^{t} (-s)\,ds = \tfrac{1}{2}[1-t^2] \;\to$$

$$y_2(t) = \int_{-1}^{t} \left(\tfrac{1}{2}[1-t^2]^2 - s\right) ds = \frac{19}{30} + \frac{t}{4} - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{20}$$

Los valores de y_1 e y_2 para diferentes t están a la derecha. Comparando con los números obtenidos en la sección 1.3 se ve que las aproximaciones no son malas para t cercano a –1 aunque no tienen nada que ver con la realidad para valores grandes de t . Pero este método nos ha dado expresiones analíticas aproximadas de la solución.

t	y_1	y_2
–1	0	0
–0.9	0.095	0.09530883333
–0.8	0.18	0.1822826667
–0.7	0.255	0.2620965
–0.6	0.32	0.3354453333
–0.5	0.375	0.4026041667
–0.4	0.42	0.463488
–0.3	0.455	0.5177118333
–0.2	0.48	0.5646506667
–0.1	0.495	0.6034995
0	0.5	0.6333333333
1	0	0.2666666667
2	–1.5	–0.6
3	–4	4.533333333

Ej 3. $\boxed{\begin{array}{c} y' = 3y^{2/3} \\ y(t_o) = y_o \end{array}}$ Como $f(t,y)=3y^{2/3}$ es continua en todo $\mathbf{R}^2$ existe solución $\forall (t_o,y_o)$.



Además $f_y(t,y)=2y^{-1/3}$ es continua en $\mathbf{R}^2$–{y=0} y por tanto la solución es única si $y_o \neq 0$.
Si $y_o=0$, como f_y no está definida (y ni siquiera, como se puede comprobar, es f lipschitziana en un entorno) puede fallar la unicidad (los teoremas son sólo condiciones suficientes). De hecho podemos resolver y comprobar que tanto y=0 como $y=(t-t_o)^3$ son soluciones de la ecuación satisfaciendo $y(t_o)=0$ (a las soluciones formadas por puntos en los que falla la unicidad (como la y=0 del ejemplo) se les llama soluciones singulares y no suelen estar recogidas por las expresiones de las soluciones generales).

Los teoremas anteriores hablan de existencia y unicidad de soluciones. Deduzcamos de ellos resultados para **curvas integrales** que eran soluciones tanto de la ecuación

$$[e] \ \frac{dy}{dt} = f(t,y) \ , \ \text{como de la ecuación equivalente} \ [e^*] \ \frac{dt}{dy} = \frac{1}{f(t,y)} \ .$$

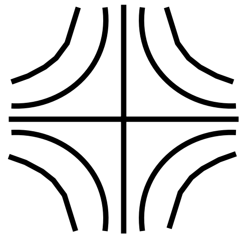
Si por un punto pasa una única solución y(t) de [e] evidentemente pasará también una única curva integral. Pero por un punto (t_o,y_o) tal que en un entorno suyo f o f_y no sean continuas pero tal que 1/f y $\partial(1/f)/\partial t$ sí lo sean pasará una única solución t(y) de [e*] y, por tanto, una única curva integral (que probablemente no será solución de [e]).

Ej 4. $\boxed{\frac{dy}{dt} = (t^2+y^2)^{-1}}$ cuya equivalente es $\frac{dt}{dy} = t^2+y^2$ (ni una ni otra son resolubles)

El teorema de existencia y unicidad nos asegura que hay una única solución y(t) de la ecuación dada satisfaciendo $y(t_o)=y_o$ para todo $(t_o,y_o) \neq (0,0)$. Por (0,0), al no tener problemas de unicidad la equivalente, pasa una única curva integral (como la solución t(y) que pasa por dicho punto es creciente y tiene pendiente t'(0)=0 esta curva integral será de hecho también una función y(t) pero con derivada ∞ en t=0).

Ej 5. Sean [e] $\boxed{\frac{dy}{dt} = -\frac{y^3}{t^3}}$ y su equivalente [e*] $\frac{dt}{dy} = -\frac{t^3}{y^3}$.

El teorema de existencia y unicidad nos asegura que hay una única solución y(t) de [e] con $y(t_o)=y_o$ para todo $t_o \neq 0$ y todo y_o. Con dicho teorema no podemos precisar si hay ninguna, una, varias o infinitas soluciones satisfaciendo $y(0)=y_o$.
Por otra parte [e*] posee una única solución t(y) que cumple $t(y_o)=t_o$ si $y_o \neq 0$. Por tanto, por cada punto del plano, salvo tal vez por el origen, pasa una única curva integral.
Por (0,0) pasan al menos dos curvas: y=0 y t=0 (soluciones a ojo de [e] y de [e*]). Para ver si pasan más tenemos que dibujarlas aproximadamente o intentar resolverla.
Con unas pocas isoclinas se obtiene el siguiente dibujo:



En este caso podemos hallar las soluciones: $t^{-2}+y^{-2}=C$ (que no son fáciles de pintar) y podríamos dar la expresión de la solución única que pasa por (t_o,y_o) (determinando la C y despejando la y).
Por un punto $(0,y_o)$ con $y_o \neq 0$ pasa la única curva integral t=0 (y ninguna solución pues está claro que t=0 no es solución de [e]).
Por (0,0) pasan sólo las dos curvas integrales vistas: y=0 y t=0 , de las cuales sólo la primera es solución de [e]. A pesar de no ser ni continua la f en ese punto hay solución única con y(0)=0 (hablando con rigor, no podemos decir que y=0 sea solución en t=0 pues ahí la $f(t,y)=-y^3/t^3$ de nuestra ecuación no está definida, pero podríamos definir f(0,t)=0).

1.5 Prolongabilidad

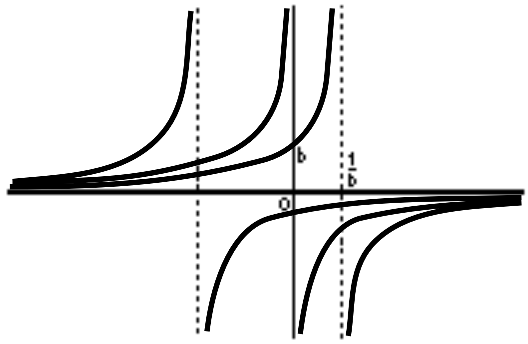
Seguimos tratando el problema de valores iniciales $\boxed{[P]\ \begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_o) = y_o \end{cases}}$

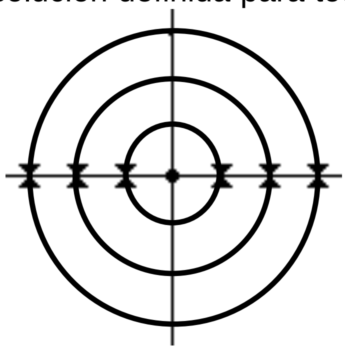
Supongamos que la f y la f_y son continuas en $D\subset\mathbf{R}^2$ y que (t_o,y_o) es un punto interior de D. Sabemos que entonces existe una única solución y(t) que está definida al menos en un intervalo $[t_o-d,t_o+d]$. Pero, ¿hasta dónde se puede prolongar esta solución?, es decir, ¿cuál es el máximo intervalo I en el que está definida? En particular, nos interesa saber si y(t) es prolongable hacia la derecha hasta $+\infty$ y si lo es hacia la izquierda hasta $-\infty$ (con otras palabras, si está definida en $[t_o,\infty)$ y si lo está en $(-\infty,t_o]$).

Aunque D sea todo $\mathbf{R}^2$ esto puede no suceder como muestra el sencillo ejemplo

$$\begin{cases} y'= y^2 \\ y(0)=b \end{cases} \quad \text{cuya solución es} \quad y = \frac{b}{1-bt}$$

y que si b>0, sólo puede prolongarse (hacia la derecha) al intervalo $[0,1/b)$ (la expresión de la y tiene sentido para todo $t\neq b$, pero para $t>1/b$ describe otra solución diferente) y que si $b<0$ no alcanza $-\infty$, pues antes se encuentra la asíntota $t=1/b<0$. Sólo para b=0 se obtiene una solución definida para todo t : la y=0 .





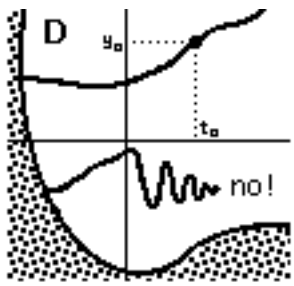
Otra forma en que la solución pasa a estar definida sólo en un intervalo finito viene ilustrada por la ecuación

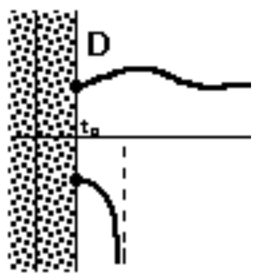
$$y' = -\frac{t}{y} \quad , \text{ de curvas integrales: } \quad t^2+y^2 = C \ .$$

Esta ecuación presenta problemas de existencia y unicidad sobre la recta y=0 que es precisamente donde va a morir cada una de las semicircunferencias solución. (Obsérvese de paso que por el origen, único punto en que fallan los teoremas de existencia y unicidad tanto para la ecuación dada como la equivalente no pasa ninguna curva integral).

Nuestro objetivo es obtener información sobre la prolongabilidad de las soluciones cuando, como es usual, no se pueda resolver la ecuación. Aceptaremos para ello dos teoremas (intuitivamente claros) sin entrar en detalles técnicos de demostraciones.

Teor 1. En las hipótesis citadas arriba la gráfica de la solución y(t) de [P] no se para en el interior de D.
En particular, si D es el semiplano $\{t \geq t_o\}$ o bien existe un $t_1 > t_o$ tal que $|y(t)| \to \infty$ cuando $t \to t_1$ o bien y(t) está definida en todo $[t_o,\infty)$.





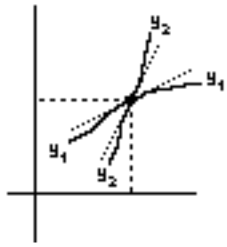
(evidentemente se tiene un resultado enteramente análogo para la izquierda de t_o)

La gráfica no se puede parar en un punto interior ya que, por el teorema de existencia y unicidad, existiría una solución local partiendo de dicho punto.

Podríamos escribir el teorema con otras palabras: la gráfica de las soluciones tienden hacia la frontera de D, entendiendo que si D es no acotado "el infinito" pertenece a dicha frontera.

Para distinguir entre las posibilidades que ofrece el teorema anterior es útil comparar las soluciones de un problema [P] complicado con las de otros fáciles de resolver:

Teor 2. Sean $\begin{cases} y' = f_1(t,y) \\ y(t_o) = y_o \end{cases}$ y $\begin{cases} y' = f_2(t,y) \\ y(t_o) = y_o \end{cases}$ con f_i y $(f_i)_y$ continuas en $D \ni (t_o,y_o)$ y cuyas soluciones respectivas y_1 e y_2 están definidas en un intervalo común $I \ni t_o$.
Si $f_1 \leq f_2$ en D entonces: $y_1(t) \leq y_2(t)$ para $t \geq t_o$, $t \in I$.
$y_1(t) \geq y_2(t)$ para $t \leq t_o$, $t \in I$.



La idea del teorema es clara: si la pendiente de y_1 es más pequeña que la de y_2, la propia solución y_1 es más pequeña a la derecha y mayor a la izquierda que y_2.

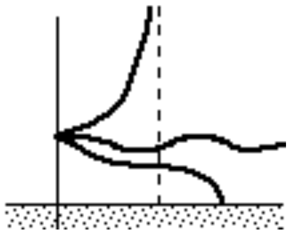
Ej 1. $\begin{cases} y' = 2t - \operatorname{sen} y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ La ecuación no es resoluble. f y f_y son continuas en $\mathbf{R}^2$.

Consideremos los dos sencillos problemas: $\begin{cases} y' = 2t-1 \\ y(0)=1 \end{cases}$ y $\begin{cases} y' = 2t+1 \\ y(0)=1 \end{cases}$.

El teorema 2 asegura que la solución única del problema inicial está comprendida entre las de los dos últimos (que son $y = t^2-t+1$ e $y = t^2+t+1$) y por tanto no puede irse a infinito en tiempo finito. Por el teorema 1, está definida para todo t real.

Ej 2. $\begin{cases} y' = y^2 + t^2\sqrt{y} \\ y(0)=1 \end{cases}$ f y f_y son continuas en $\{y>0\}$.

El teorema 1 da tres posibilidades para $t \geq 0$: que la solución muera en y=0, que esté definida en $[0,\infty)$ o que tenga una asíntota. Como está por encima de $y=1/(1-t)$, solución de $y'=y^2$ con $y(0)=1$, el teorema 2 asegura que "explota" antes de t=1.



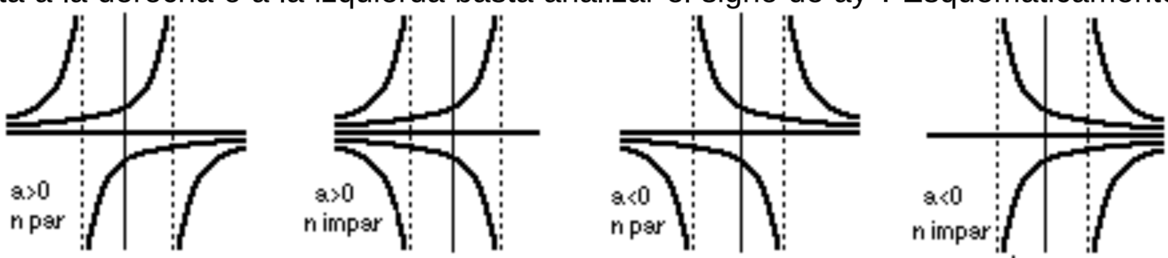
Veamos dos tipos de problemas clásicos para comparar. Primero el lineal:

$$[\text{Pl}] \begin{cases} y' = a(t)y+f(t) \\ y(t_o) = y_o \end{cases}$$ (su solución la conocemos desde la sección 1.1)

Supongamos que a y f son continuas en un intervalo $I \ni t_o$ (el I puede ser finito o infinito, cerrado o abierto). Como tanto el segundo miembro de la ecuación como su derivada con respecto a y son continuas en un entorno del punto, [Pl] tiene solución única. Además, como esta solución viene dada por exponenciales e integrales de las funciones a y f, se tiene que **la solución de** [Pl] **está definida para todo** t **de** I.

$\begin{cases} y' = ay^n,\ a \neq 0,\ n=2,3,\dots \\ y(t_o) = y_o \end{cases}$ tiene por solución $y = \dfrac{y_o}{[1-a(n-1)y_o^{n-1}(t-t_o)]^{1/(n-1)}}$,

cuyo denominador se anula (si $y_o \neq 0$) en $t_1 = t_o + [a(n-1)y_o^{n-1}]^{-1}$. Luego (salvo $y \equiv 0$) **todas las soluciones de la ecuación tienen una asíntota**. Para saber si la asíntota está a la derecha o a la izquierda basta analizar el signo de ay^n. Esquemáticamente:



1.6 Dependencia continua

El estudio de un sistema físico nos puede conducir a un problema

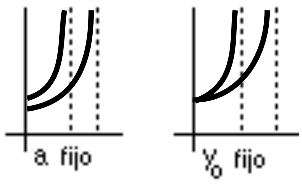
$$[P]\quad \begin{cases} y' = f(t,y,a) \\ y(t_o) = y_o \end{cases}$$

donde la f depende de t y de un parámetro a. En la determinación experimental del parámetro exístirán errores de medición. No sería útil nuestra ecuación para describir el sistema real si a valores del parámetro parecidos no correspondiesen soluciones semejantes, es decir, si la solución no fuese una función continua de a.

De la misma forma, tampoco será exacta la determinación del dato inicial. Si y_o es el verdadero dato inicial y nosotros hemos estimado y_o^* , ¿serán cercanas las soluciones correspondientes a ambos datos iniciales?

El teorema de esta sección (que admitiremos sin demostrar), nos asegurará que **si la f es regular existirá siempre dependencia continua de parámetros y datos iniciales**. Pero antes de enunciarlo estudiemos un ejemplo sencillo.

Ej 1. Sea $\begin{cases} y' = ay^2 \\ y(0)=y_o \end{cases}$ Su solución es $y = \frac{y_o}{1-ay_ot}$.



Consideremos un a y un y_o dados y supongamos que ambos, por ejemplo, son positivos. Ocupándonos sólo de la solución para $t \geq 0$ observamos que está definida hasta $t_1 = a^{-1}y_o^{-1}$.
Para valores del parámetro y del dato inicial próximos la solución tendrá un intervalo de definición distinto pero similar. En un intervalo en el que todas estas soluciones próximas esten definidas (es decir, en el que el denominador de las soluciones no se anule) está claro que la expresión obtenida de la solución, que podemos mirar como una función de las variables t , y_o y a , depende de las tres de forma continua.

Consideremos ya el problema general [P]. Llamemos $y(t,y_o,a)$ a su solución (ya que dependerá del valor del parámetro y del dato inicial además de depender de la variable independiente). Sean a e y_o dados y supongamos que f y f_y son funciones continuas de sus tres variables en un entorno de (t_o,y_o,a). Sabemos que entonces $y(t,y_o,a)$ está definida al menos en un intervalo $I = [t_o,t_o+d]$. En estas condiciones se tiene:

Teor 1. Si $|y_o-y_o^*|$ y $|a-a^*|$ son suficientemente pequeños entonces $y(t,y_o^*,a^*)$ está también definida en ese mismo intervalo I y además cuando $y_o^* \to y_o$ y $a^* \to a$, se tiene que $y(t,y_o^*,a^*) \to y(t,y_o,a)$ para todo t de I .

Ej 2. $\begin{cases} y' = at^{-1}y-1 \\ y(1)=0 \end{cases}$ Como la f(t,y,a) es continua para todo a en un entorno de (1,0,a) , existe dependencia continua del parámetro a .

Comprobémoslo resolviendo la ecuación. Como es lineal y sus coeficientes son continuos en {t>0} sabemos que la solución va a estar definida en todo $(0,\infty)$ para cualquier a , con lo que no nos preocuparemos del intervalo I del teorema.

$$\text{La solución es}\quad y = t^a\int_1^t t^{-a}\,dt = \begin{cases} \frac{1}{1-a}(t-t^a) & \text{si } a\neq 1 \\ t^a \ln t & \text{si } a=1 \end{cases}$$

Que, aunque no lo parezca en a=1, es función continua de a (hallando por L'Hôpital el límite cuando $a\to 1$ de la expresión de arriba se obtiene la expresión de abajo).

1.7 Estabilidad

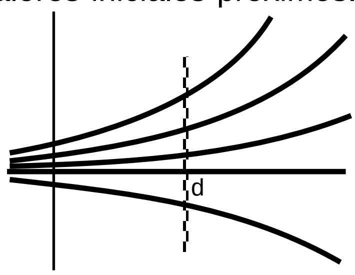
En la sección anterior vimos que el problema $[P]\ \begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_o) = y_o \end{cases}$

con f y f_y continuas en un entorno de (t_o,y_o) dependía continuamente de los datos iniciales. Se tenía que si la solución y(t) de [P] estaba definida en $[t_o,t_o+d]$, las soluciones y*(t) correspondientes a datos iniciales y_o^* cercanos estaban también definidas en todo ese intervalo y se parecían en él a la solución de [P] pues constituían una función continua de y_o. Lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ tal que si $|y_o-y_o^*|<\delta$ entonces $|y(t)-y^*(t)|<\varepsilon$ para todo $t\in[t_o,t_o+d]$.

Supongamos ahora que la solución de [P] está definida para todo $t\geq t_o$. ¿Se parecerán a ella en todo el intervalo infinito $[t_o,\infty)$ las soluciones y*(t) de datos inciales similares? Ya hemos visto ejemplos en que esto no sucede. Por ejemplo, la solución de $y'=y^2$ que satisface $y(0)=0$ (la solución constante y=0) está definida para todo $t\geq 0$ y sin embargo la correspondiente a un dato inicial $y(0)=y_o^*$ (que como vimos es $y=y_o^*/[1-t\,y_o^*]$) ni siquiera está definida hasta ∞ cuando $y_o^*>0$, puesto que tiene una asíntota en $t=1/y_o^*$.

Incluso aunque todas las soluciones estén definidas en $[t_o,\infty)$ pueden ser para t grande muy diferentes entre sí, a pesar de que (por la dependencia continua) en todo intervalo finito se parezcan las soluciones que satisfacen valores iniciales próximos. Por ejemplo, las soluciones de los problemas:



$\begin{cases} y' = y \\ y(0)=0 \end{cases}$ e $\begin{cases} y' = y \\ y(0)=y_o^* \end{cases}$, que son $y\equiv 0$ e $y^* = e^t y_o^*$,

en cualquier intervalo finito [0,d] satisfacen

$|y^*-y| = e^t|y_o^*| \leq e^d|y_o^*| < \varepsilon$ si $|y_o^*-0| < e^{-d}\varepsilon \quad \forall t\in[0,d]$

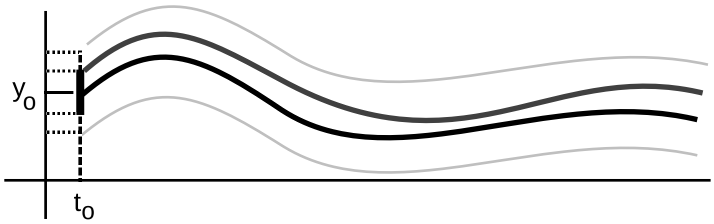
pero difieren entre sí tanto como queramos para valores de t suficientemente grandes.

Llamaremos **estables** a aquellas soluciones definidas hasta infinito para las que sí sucede que modificando ligeramente los datos iniciales se obtienen soluciones próximas para todo valor de $t\geq t_o$. Definiéndolo con rigor:

> Supongamos que [P] tiene solución única y(t) definida en $[t_o,\infty)$. Decimos que y(t) es **estable** si $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ tal que toda solución y*(t) con $|y(t)-y^*(t)|<\delta$ satisface:
>
> **1]** y*(t) existe y esta definida en $[t_o,\infty)$
>
> **2]** $|y(t)-y^*(t)|<\varepsilon$ para todo $t\geq t_o$
>
> Decimos que y(t) es **asintóticamente estable** si además y*(t) satisface:
>
> **3]** $|y(t)-y^*(t)|\to 0$ cuando $t\to\infty$
>
> Una solución que no es estable se dice **inestable**.

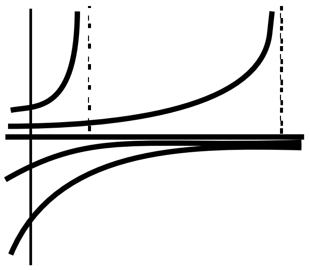
(a veces se dice que la estabilidad definida es "a la derecha" para distinguirla de la estabilidad "a la izquierda" que se define análogamente para el intervalo $(-\infty,t_o]$)

Gráficamente, que y(t) es estable significa que para cualquier banda de altura 2ε en torno a ella existe un segmento de altura 2δ en torno a y_o tal que las soluciones que parten de él permanecen para todo $t\geq t_o$ dentro de la banda.



Para las ecuaciones de primer orden que estamos tratando se puede demostrar que
1] y **3]** $\Rightarrow$ **2]** (esto no es cierto para sistemas y ecuaciones de mayor orden) ;
así pues, para ver que la solución de una ecuación de primer orden es asintóticamente estable basta comprobar que toda solución que parte cerca de ella llega hasta ∞ y que la diferencia entre las dos soluciones tiende a 0 en el infinito, con lo que podemos evitar las acotaciones de **2]** que son siempre mucho más complicadas.

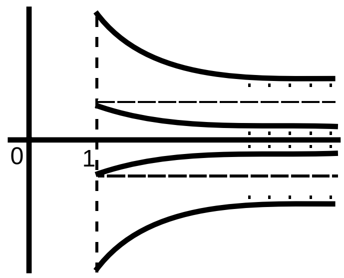
Ej 1. Analicemos la estabilidad de las soluciones de la conocida ecuación $\boxed{\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0)=y_o \end{cases}}$



Como las soluciones con $y_o>0$ no llegan hasta ∞ no tiene sentido para ellas hablar de estabilidad. La solución $y=0$ es claramente inestable pues las que parten cerca de ella por arriba ni siquiera están definidas para todo $t\geq 0$ (las que parten por debajo sí se parecen a $y=0$, pero esto debe suceder para toda solución que parta cerca). Cualquier solución con $y_o<0$ (definida hasta ∞) es asintóticamente estable: si $|y_o-y_o^*|$ es lo suficientemente pequeño la solución y^* también llega hasta ∞ y la diferencia $|y-y^*| = \left| \frac{y_o}{1-ty_o} - \frac{y_o^*}{1-ty_o^*} \right| \to 0$ cuando $t\to\infty$.

Ej 2. $\boxed{\begin{cases} y' = -y^3/t^3 \\ y(1)=0 \end{cases}}$ (en la sección 1.4 la dibujamos y la resolvimos: $t^{-2}+y^{-2}=C$)

La solución cuya estabilidad analizamos es la $y=0$.
La que satisface $y(1)=b$ resulta ser $y_b = bt\left[b^2(t^2-1)+t^2\right]^{-1/2}$
Para todo b esta solución está definida para $t\geq 1$, pero cuando $t\to\infty$ no tiende a 0 sino a $b\left[b^2+1\right]^{-1/2}$.
Por tanto $y=0$ no es asintóticamente estable.
Estable simplemente sí lo es: dado cualquier ε tomando $\delta=\varepsilon$ se tiene que si $|b|<\delta$ es $|y_b|\leq|b|<\varepsilon$ para todo $t\geq 1$.



(la estabilidad se puede probar sin conocer la expresión de y_b: como las soluciones decrecen en el primer cuadrante y crecen en el cuarto, a partir de $t=1$ se mueven entre las rectas $y=0$ e $y=b$, luego todas estan definidas hasta ∞ y es estable $y=0$).

El estudio de la estabilidad es, en general, complicado. Como se pueden resolver muy pocas ecuaciones normalmente no será posible acudir a las soluciones. En otros casos muy particulares se podrán obtener conclusiones estudiando la propia ecuación. Veamos resultados en ese sentido para **ecuaciones lineales**:

Sea $\boxed{[P] \begin{cases} y' = a(t)y+f(t) \\ y(t_o) = y_o \end{cases}}$, con a y f continuas en $[t_o,\infty)$.

Como sabemos, para cualquier y_o , [P] tiene solución única definida para todo $t\geq t_o$, cuya expresión conocemos. La diferencia entre dos soluciones cualesquiera es entonces:

$$|y(t)-y^*(t)| = |y(t_o)-y^*(t_o)|\, e^{\int_{t_o}^{t} a(s)ds} \qquad \text{y por tanto:}$$

Teor 1.

> La solución de [P] es estable si y sólo si $e^{\int_{t_o}^{t} a(s)ds}$ está acotada.
>
> Es asintóticamente estable si y solo si $e^{\int_{t_o}^{t} a(s)ds} \to 0$ cuando $t\to\infty$.

(observemos que **la estabilidad no depende de** y_o **ni de** f(t) [ni del t_o si los coeficientes son continuos a partir de ese punto]. Para una lineal tiene pues sentido hablar de la **estabilidad de la ecuación** pues o todas las soluciones son estables, o todas son asintóticamente estables, o todas son inestables. Esto era esperable pues las soluciones de una lineal son suma de una solución particular más la general de la homogénea y es ésta la que nos dice si todas las soluciones se acercan o no a una dada. De hecho tenemos que **una ecuación lineal es estable [asintóticamente estable] si y sólo si lo es la solución** y=0 **de la homogénea**).

Ej 3. $\boxed{y' = -\frac{y}{t} + \cos(\ln t)}$ La solución que satisface cualquier dato inicial $y(t_o)=y_o$ con $t_o>0$ es asintóticamente estable pues $e^{-\int dt/t} = \frac{1}{t} \to 0$ cuando $t \to \infty$

(si $t_o<0$ las soluciones $y=C/t + y_p$ sólo llegan hasta t=0; el teorema se ha enunciado para el caso en que los coeficientes son continuos a partir de t_o).

Ej 4. $\boxed{y' = ay + f(t)}$ es asintóticamente estable, estable simplemente o inestable según sea, respectivamente, a<0, a=0 o a>0

(pues e^{at} tiende a 0, está acotada o no está acotada en cada uno de los tres casos).

El siguiente teorema que veremos (y que no demostraremos) permite analizar la estabilidad de y=0 para una ecuación no lineal que, en general, ya no será resoluble.

Consideremos [n] $\boxed{y' = a(t)y + h(t,y)}$ con h(t,0)=0 (así pues y=0 es solución).

Suponemos h y h_y continuas al menos en una banda $[t_o,\infty)$x$[-r,r]$ (para tener unicidad). Parece razonable que si la parte no lineal h(t,y) es "pequeña" la estabilidad de y=0 coincida con la estabilidad de la solución y=0 de la lineal [l] $y' = a(t)y$. En efecto:

Teor 2. Supongamos que a(t) es constante o periódica y continua y que h(t,y)=o(|y|) uniformemente en $t \geq t_o$, es decir, que para $t \geq t_o$ se tiene

$|h(t,y)| \leq H(y)$ con $H(y)=o(|y|)$ cuando $y \to 0$ $[\, H(y)/|y| \to 0$ cuando $y \to 0 \,]$.

En esas condiciones:

si [l] es asintóticamente estable entonces y=0 es solución asintóticamente estable de [n] a la derecha de t_o

si [l] es inestable entonces y=0 es inestable como solución de [n]

(intentemos hacer intuitivas las hipótesis: se obtendría la ecuación [n] al desarrollar por Taylor una ecuación no lineal y'=f(t,y) en torno a y=0, englobando en h(t,y) los términos de orden mayor que 1 que son o(|y|); para conseguir que la parte no lineal no varíe la estabilidad de la parte lineal hay que exigir tres cosas: que [l] tenga una tendencia fuerte a acercarse o alejarse de y=0, que la parte dependiente de t de h(t,y) se pueda acotar para que no sea demasiado grande y que a(t) no sea demasiado pequeña (en concreto se pide que a(t) sea constante o periódica porque el mayor interés de este teorema se da en los sistemas de ecuaciones (a los que se generaliza casi literalmente) y para ellos sólo se puede hablar de la estabilidad de la parte lineal en esos dos casos)).

Ej 5. $\boxed{y' = 4\cos^2 t\, y + \operatorname{sen} t\, y^2 - y^5}$ (ecuación no resoluble)

Como $e^{4\int \cos^2 t\, dt} = e^{2t+\operatorname{sen}2t}$ no está acotada en $+\infty$ la lineal $y' = 4\cos^2 t\, y$ es inestable.

Como $4\cos^2 t$ es continua y periódica y además $|h(t,y)| = |\operatorname{sen} t\, y^2 - y^5| \leq |y|^2 + |y|^5 = o(|y|)$ su inestabilidad la hereda la solución y=0 de la no lineal.

Ej 6. Veamos la importancia de que la $h(t,y)$ sea $o(|y|)$ uniformemente en t . Para ello consideramos para $t \geq 0$ las tres siguientes ecuaciones resolubles (de Bernouilli):

[1] $\boxed{y' = -y + e^{-t} y^2}$ [2] $\boxed{y' = -y + t\, y^2}$ [3] $\boxed{y' = -y + e^{t} y^2}$

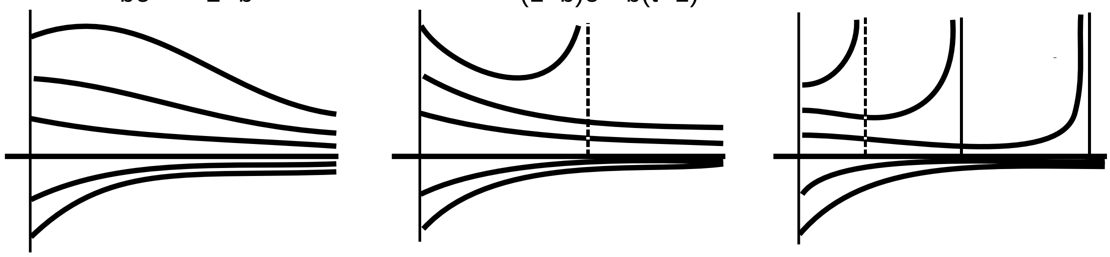
La parte lineal es en los tres casos $y' = -y$, asintóticamente estable. La no lineal es también en los tres casos $o(|y|)$, pero sólo se puede acotar para $t \geq 0$ en el primero:

$$|e^{-t} y^2| \leq |y|^2 = o(|y|) .$$

Sólo podemos deducir, aplicando el teorema, que la solución $y=0$ de la no lineal es asintóticamente estable a la derecha de $t=0$ para la ecuación [1].

Comprobemos esto y veamos lo que sucede para [2] y [3] hallando la solución y_b que satisface $y(0)=b$. Se obtiene, respectivamente:

$$y_b = \frac{2be^{-t}}{be^{-2t}+2-b} \qquad y_b = \frac{b}{(1-b)e^{t}+b(t+1)} \qquad y_b = \frac{be^{-t}}{1-bt}$$

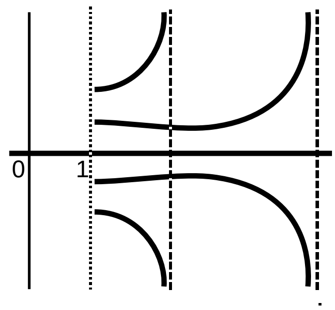


Como se observa, las tres expresiones tienden a 0 cuando $t \to \infty$. Además debe y_b estar definida en $[0,\infty)$ para b próximo a 0. Analizando los denominadores se ve que esto sucede para [1] y [2] pero no para [3] (tiene asíntota en $t=1/b$). Por tanto $y=0$ es estable asintóticamente como solución de [1] y [2] e inestable como solución de [3].

Ej 7. $\boxed{y' = -\frac{y}{2t} + y^3}$ La lineal es asintóticamente estable (pues $e^{-\int dt/2t} = t^{-1/2} \to 0$) pero no es constante ni periódica. Por tanto no podemos aplicar el teorema, a pesar de que la parte no lineal es $o(|y|)$ y no depende de t . De hecho, imponiendo el dato inicial $y(1)=b$ (a partir de 1 no hay problemas de unicidad) se obtiene la solución:

$y_b = \frac{b}{\sqrt{t}\sqrt{1-2b^2 \ln t}}$ que tiene una asíntota en $t=e^{1/2b^2}$ si $b \neq 0$.

Así pues, $y=0$ es inestable a partir de $t=1$ en la no lineal.



Ej 8. $\boxed{y' = y^2 - (\cos t)\, y}$ Ahora tampoco podemos aplicar el teorema al ser la lineal simplemente estable (puesto que $e^{-\int \cos t\, dt} = e^{-\operatorname{sen} t}$ está acotada pero no tiende a 0). En la sección 1.2 hallamos su solución general: $y = e^{-\operatorname{sen} t}\left(C - \int e^{-\operatorname{sen} t} dt\right)^{-1}$ e hicimos un dibujo aproximado de sus soluciones que sugiere la inestabilidad de $y=0$. Para hallar la solución que satisface el dato inicial $y(0)=b$ debemos precisar la primitiva de la que hablamos para lo que fijamos los límites de integración. Entonces:

$y_b = \frac{e^{-\operatorname{sen} t}}{\frac{1}{b} - \int_0^t e^{-\operatorname{sen} s} ds}$ cuyo denominador se anula para todo $b>0$ al ser la integral una función continua que toma todos los valores reales positivos (es divergente si $t=\infty$). Confirmamos pues que $y=0$ es inestable.

1.8 Ecuaciones autónomas

Son ecuaciones en las que la variable independiente no aparece explícitamente

$$[a] \quad \boxed{y' = f(y)}$$

Suponemos f' continua en **R** con lo que hay solución única para cualquier condición inicial. [a] es de variables separables. Sin embargo muchas de las características importantes de las soluciones se deducen fácilmente del estudio de la propia f :

Teor 1. $\boxed{y(t) \text{ solución de [a]} \;\Rightarrow\; y(t+C) \text{ es también solución de [a]}}$

Sea $z(t) = y(t+C)$; entonces $z'(t) = y'(t+C) = f(y(t+C)) = f(z(t))$

Teor 2. $\boxed{\text{Si } a\in \mathbf{R} \text{ es tal que } f(a)=0 \;\Rightarrow\; y(t)\equiv a \text{ es solución de [a]}}$

$y'(t) = 0 = f(a) = f(y(t))$

(a estas soluciones constantes se les llama también **soluciones de equilibrio**)

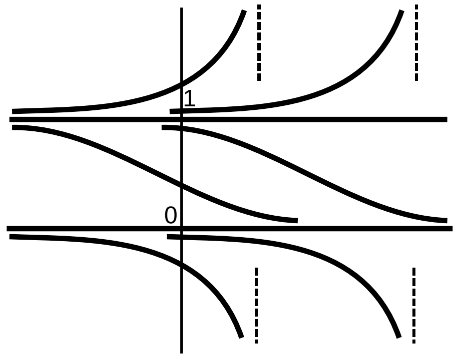
Teor 3. Cada solución de [a] o es constante, o es estrictamente creciente, o es estrictamente decreciente

Sea y solución. Si existe un t_o para el que $y'(t_o)=0$ entonces $f(y(t_o))=0$ y por el teorema 2 $y(t)\equiv y(t_o)$ es solución, única que pasa por ese punto. Ninguna solución puede tener ni máximos ni mínimos a no ser que sea constante.

Teor 4. Toda solución acotada a la derecha de un t_o tiende hacia una solución de equilibrio cuando $t\to\infty$ [si lo está a la izquierda lo hace cuando $t\to-\infty$]

Si y(t) es constante, ya está. Sea y(t) monótona y acotada para $t\geq t_o$ (por los teoremas de prolongabilidad y(t) está definida en $[t_o,\infty)$). Un resultado elemental de análisis asegura que y(t) tiende hacia un límite a cuando $t\to\infty$. Probemos que f(a)=0. Como f es continua $y'(t)=f(y(t))$ también tiene límite si $t\to\infty$ y ese límite es f(a). Aplicando el teorema del valor medio a la y(t) en $[t,t+1]$ tenemos que existe un $c\in(t,t+1)$ tal que $y'(c) = y(t+1) - y(t)$. Por tanto: $f(a) = \lim_{c\to\infty} y'(c) = \lim_{t\to\infty} [y(t+1)-y(t)] = a - a = 0$. [Análogo a la izquierda].

Ej 1. $\boxed{y'= y^3-y^2}$ Como $y^2(y-1)=0 \to y=0$, $y=1$, estas son las soluciones constantes.



Como $y^2(y-1)>0$ si $y>1$ e $y^2(y-1)<0$ si $y<0$ o $y\in(0,1)$ sabemos qué soluciones crecen o decrecen y las soluciones de equilibrio a que tienden (sin llegar a tocarlas). Las soluciones que están por encima de y=1 llegan hasta ∞ pues si estuviesen acotadas deberían tender hacia una solución constante (la teoría vista no dice si en tiempo finito o infinito, pero como $y^3-y^2\geq y^3/2$ si $y\geq 2$ y esas soluciones superan y=2 de hecho explotan). Tampoco están acotadas las de y<0 (y también explotan pues $y^3-y^2\leq y^3$). Sabiendo además que las trasladadas a derecha e izquierda de una solución lo son también completamos el dibujo. (Podríamos además pintar alguna isoclina (son rectas y=K); no es útil para el dibujo la poco manejable solución general $\int(y^3-y^2)^{-1}dy=t+C$).

Aunque en general el estudio de la **estabilidad** sea complicado, en una ecuación autónoma, gracias a los teoremas vistos, pasa a ser trivial. En el ejemplo anterior es inmediato ver que y=0 es inestable (las soluciones cercanas de abajo se van a $-\infty$; no se necesita siquiera ver su prolongabilidad), que y=1 también lo es (las de arriba se van a $+\infty$ y las de abajo a y=0) y que cualquier solución entre 0 y 1 es asintóticamente estable (las soluciones cercanas están también definidas para todo valor de t y la diferencia entre ellas tiende a 0 cuando $t\to\infty$ pues todas ellas tienden a la misma solución de equilibrio). Damos un criterio de estabilidad de soluciones de equilibrio que, aunque aquí no nos diga nada nuevo, es la versión sencilla del que veremos en el capítulo 4 cuando estudiemos los sistemas de dos ecuaciones autónomas:

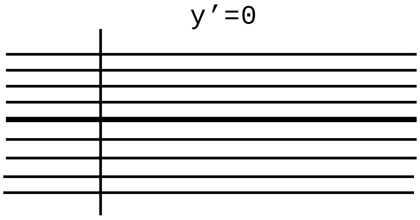
Teor 5. Sea $f(a)=0$. Si $f'(a)<0$, $y(t)\equiv a$ es asintóticamente estable.
Si $f'(a)>0$, $y(t)\equiv a$ es inestable.

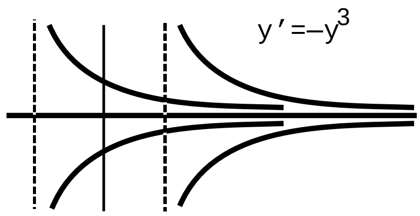
Si $f'(a)<0$, f decrece en a, luego f(y), para y cerca de a, pasa de ser positivo a negativo al aumentar y; las soluciones pasan de ser crecientes a ser decrecientes, lo que unido al teorema 4 nos da la estabilidad asintótica. Si $f'(a)>0$ pasan de ser decrecientes a ser crecientes; las primeras se van a $-\infty$ o hacia otra solución constante y las segundas a ∞ o hacia otra constante; hay inestabilidad.

Este teorema es un caso particular del teorema de la $o(|y|)$ que vimos en estabilidad. En efecto, si desarrollamos por Taylor la f(y) en torno a y=a tenemos:

$$y' = f'(a)(y-a) + o(|y-a|) \quad , \text{ es decir }, \quad z' = f'(a)z + o(|z|) \quad , \text{ si } z=y-a \, ,$$

y el signo de $f'(a)$ nos da la estabilidad de la parte lineal, heredada por la no lineal. Como ocurría allí no se puede afirmar nada sobre la no lineal si la lineal es simplemente estable, lo que aquí se traduce en que $f'(a)=0$. En ese caso, la solución constante puede ser inestable, como la y=0 del ejemplo 1, o estable o asintóticamente estable como sucede con la solución y=0 de los ejemplos siguientes:



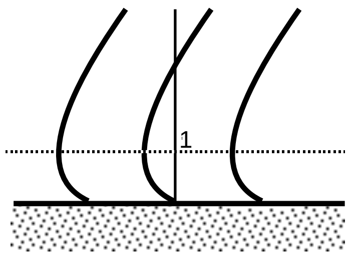


Por último, observemos que si la f(y) no es tan regular como exigimos al principio, de forma que no haya existencia y unicidad en todo el plano, también pueden fallar algunas de las propiedades de la ecuación [a] que se han basado en ese hecho:

Ej 2. $\boxed{y' = \dfrac{2\sqrt{y}}{y-1}}$ Ecuación definida sólo si $y\geq 0$, con solución única en $y>1$ e $y\in(0,1)$.

y=0 es la única solución de equilibrio. Las soluciones son crecientes en y>1 y decrecientes en $y\in(0,1)$. Por cada punto de y=1 pasa una única curva integral de pendiente vertical. Resolviendo la ecuación se obtiene:

$$t = \int \frac{y-1}{2\sqrt{y}}\, dy + C = \frac{\sqrt{y}}{3}(y-3) + C \quad \text{, que completa el dibujo.}$$



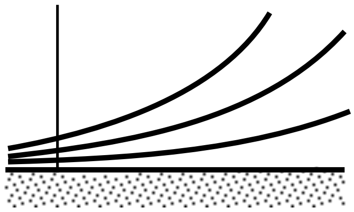
Obsérvese que hay soluciones que no son estrictamente monótonas (en parte decrecen y en parte son constantes)
y soluciones acotadas a la izquierda que mueren en y=1 y que por tanto no tienden hacia ninguna solución de equilibrio.

1.9 Unos ejemplos de bichos

Estudiemos, para repasar diferentes técnicas vistas en este capítulo, unas cuantas ecuaciones que describen diferentes modelos de crecimiento de una población animal.

El modelo más sencillo viene de suponer que la velocidad de crecimiento de la población es proporcional al número de animales existentes, es decir,

$$[1] \quad \boxed{y' = ay} \quad , a>0 ,$$

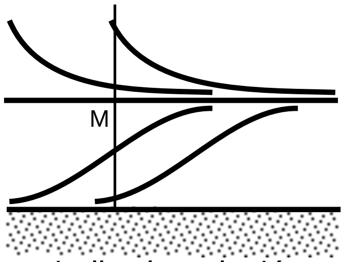


donde y(t) representa la población existente en el instante t . La solución de [1] que satisface $y(t_o)=y_o$ es, como sabemos,

$y=y_o e^{a(t-t_o)}$ (las dibujamos sólo donde tienen sentido: $y\geq 0$)

En el primer modelo está implícita la suposición de que hay alimentos y espacio vital ilimitados. Si suponemos que hay una población máxima M que admite el ecosistema, nos describe mejor la evolución de la población la llamada **ecuación logística**:

$$[2] \quad \boxed{y' = by(M-y)} \quad , b,M>0 ,$$



ecuación autónoma cuyas soluciones son fáciles de pintar. Se obtiene una solución de equilibrio y=M asintóticamente estable hacia la que tienden todas las demás soluciones con sentido físico, independientemente de los datos iniciales: pasado el tiempo habrá en el ecosistema una población M.

Para conocer la población en un instante t cualquiera habrá que hallar la solución que satisface $y(t_o)=y_o$ de esta ecuación separable (o de Bernouilli) . Resulta ser:

$$y = My_o\left[y_o+(M-y_o)e^{-bM(t-t_o)}\right]^{-1}$$

función que tiene el comportamiento asintótico previsto con las técnicas de autónomas.

Imaginémos ahora que [2] describe la población de truchas en un estanque y que un pescador i] pesca truchas a un ritmo proporcional al número de truchas existente
ii] pesca truchas a ritmo constante (independientemente de las que haya).

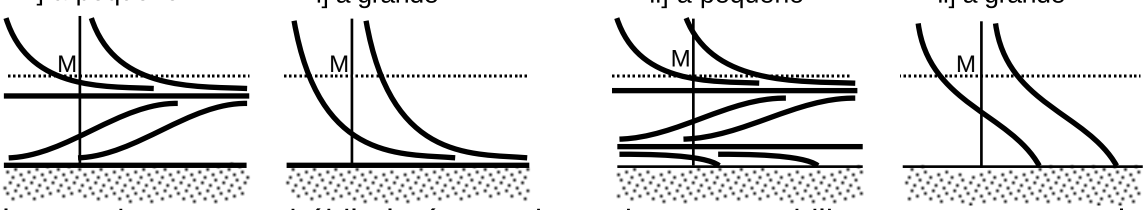
Comprobemos que las técnicas de ecuaciones autónomas nos permiten predecir con facilidad el número de truchas que quedarán en el estanque para grandes valores de t . Las ecuaciones que rigen la evolución de y en ambos casos son:

$$[2i] \quad \boxed{y' = by(M-y)-ay} \qquad y \qquad [2ii] \quad \boxed{y' = by(M-y)-a}$$

Las soluciones de equilibrio son para : [2i] $y=0$ e $y = M-\frac{a}{b}$; [2ii] $y = \frac{M}{2} \pm \sqrt{\frac{M^2}{4}-\frac{a}{b}}$

Si a es grande (pescador muy hábil) la segunda solución constante de [2i] pasa a ser negativa y las dos de [2ii] se convierten en complejas. Viendo el signo de y' se tiene:

i] a pequeño   i] a grande   ii] a pequeño   ii] a grande



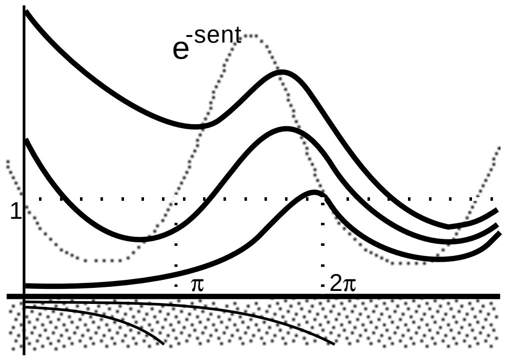
Si el pescador es poco hábil el número de truchas se estabiliza en torno a un valor algo inferior a M (salvo en el caso ii] si inicialmente son muy pocas). Si el pescador es hábil las truchas siempre se extinguen (en tiempo finito en el caso ii]).

En todos los ejemplos anteriores hemos supuesto que la capacidad de reproducción y el tope logístico son constantes en el tiempo. Si esto no es así, las ecuaciones dejarán de ser autónomas y su análisis se complicará. Por ejemplo, analicemos la ecuación:

$$[3] \quad \boxed{y' = y\,(1-e^{\operatorname{sen} t}\,y)}$$

que puede describir, en unidades adecuadas, la población de truchas en un estanque con un tope logístico $e^{-\operatorname{sen} t}$ que depende periódicamente del tiempo ($y'<0$ si $y>e^{-\operatorname{sen} t}$). Cuando $y<e^{-\operatorname{sen} t}$ es $y'>0$ con lo que las soluciones con $y(0)=y_o>0$ se alejan de la solución $y=0$. Esto no basta para que dicha solución sea inestable (sí bastaría para una ecuación autónoma), pero podemos asegurarlo gracias al teorema de la o. Un dibujo aproximado sugiere la existencia de una solución periódica estable. En efecto, la solución con $y(0)=y_o$ de [3] es $y=y_o e^t[1+y_o\int_0^t e^{s+\operatorname{sen}s}ds]^{-1}$. Si $y_o=[e^{2\pi}-1][\int_0^{2\pi} e^{s+\operatorname{sen}s}ds]^{-1}$ (y_o~1.514863232, hallando numéricamente la integral) esta solución cumple $y(0)=y(2\pi)$ y se puede ver que $y(t)=y(t+2\pi)$ para todo t ; además, cuando $t\to\infty$:

$$|y-y^*|=|y_o-y_o^*|e^t[1+y_o\int_0^t e^{s+\operatorname{sen}s}]^{-1}[1+y_o^*\int_0^t e^{s+\operatorname{sen}s}]^{-1}\to 0$$



(pues $e^{t/2}/[\ldots]\to 0$ como se comprueba por L'Hôpital) lo que demuestra la estabilidad asintótica de todas las soluciones con $y_o>0$. En particular todas ellas se parecerán para grandes valores de t a la solución periódica, y por tanto, la población de truchas, para cualquier dato inicial, oscilará en la práctica periódicamente cuando pase el tiempo.

Imaginemos ahora la presencia del pescador del tipo i] de antes y analicemos:

$$[4] \quad \boxed{y' = y\,(1-e^{\operatorname{sen} t}\,y) - a\,y} \;=\; (1-a)\,y - e^{\operatorname{sen} t}\,y^2$$

Nos ocupamos sólo de si las truchas se extinguen o no. Cuando a<1 el teorema de la o nos asegura que y=0 es inestable y por tanto el número de truchas nunca va a tender a 0 (es de esperar, puesto que [4] es del mismo tipo que [3], que la población tienda a oscilar periódicamente con unos valores menores que los del caso a=0). Si a>1, y=0 es asintóticamente estable y si a=1 el teorema no decide. Pero si $a\geq 1$ como para $y\geq 0$ se tiene $y'\leq -e^{-1}y^2$ y todas las soluciones positivas de esta ecuación autónoma tienden a 0, deducimos que toda solución positiva de [4] también tiende a 0 cuando t tiende a ∞. Por tanto, si $a\geq 1$ las truchas se extinguen independientemente de su número inicial.

Mucho más difícil es analizar la ecuación para el pescador de tipo ii]

$$[5] \quad \boxed{y' = y\,(1-e^{\operatorname{sen} t}\,y) - a}$$

ya que ni es resoluble, ni tiene y=0 como solución, ni, por tanto, podemos utilizar el teorema de la o. Podemos compararla para $y\geq 0$ con dos ecuaciones autónomas ya que:

$$y-ey^2-a \leq y(1-e^{\operatorname{sen} t}y)-a \leq y-e^{-1}y^2-a$$

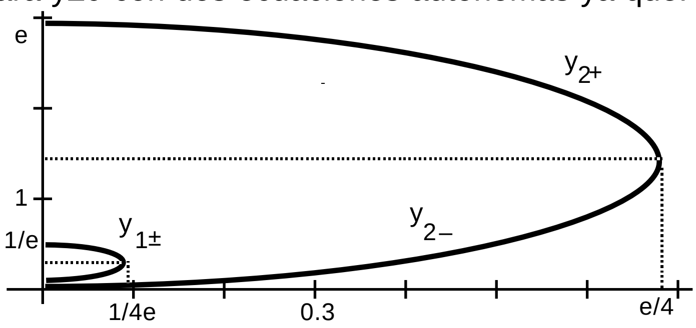
Las soluciones constantes son:

$$y_{1\pm}\equiv\frac{1}{2}\left(e^{-1}\pm\sqrt{e^{-2}-4ae^{-1}}\right)$$

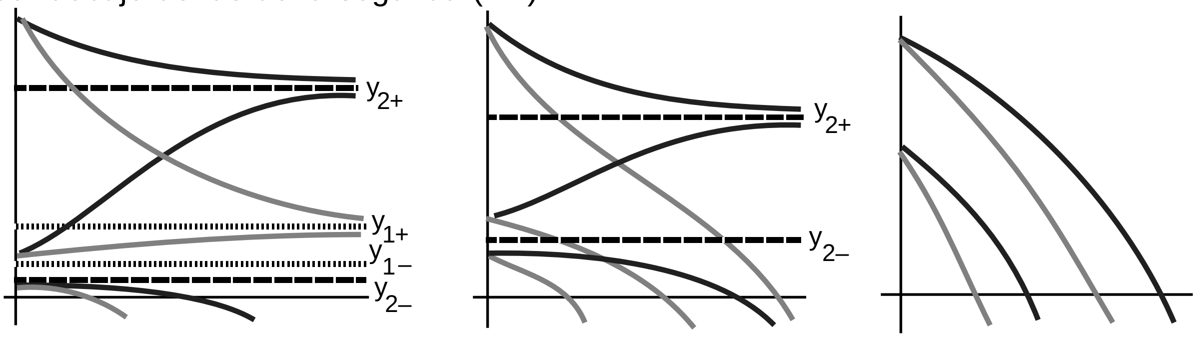
si $a\leq 1/4e$ para $y'=y-ey^2-a$;

$$y_{2\pm}\equiv\frac{1}{2}\left(e\pm\sqrt{e^2-4ae}\right)$$

si $a\leq e/4$ para $y'=y-e^{-1}y^2-a$



Las soluciones de la ecuación [5] están por encima de las de la primera autónoma (·····) y por debajo de las de la segunda (----):



a<1/4e~0.092 1/4e<a<e/4~0.68 e/4<a

por tanto, si y_o es el número inicial de truchas se tiene que:
a<1/4e : si $y_o<y_{2-}$ se extinguen; si $y_o>y_{1-}$ sobreviven; si $y_{2-}<y_o<y_{1-}$ no sabemos.
1/4e<a<e/4 : si $y_o<y_{2-}$ se extinguen; si $y_o>y_{2-}$ no sabemos.
e/4<a : las truchas se extinguen cualquiera que sea su número inicial.

Para ver lo que sucede en los casos dudosos no tenemos más remedio que acudir al cálculo numérico. Comencemos, para comprobar la precisión del método, calculando la solución periódica del caso **a=0**. Utilizamos Runge-Kutta con tres pasos diferentes (se dan a partir de ahora sólo algunos de los valores obtenidos):

t	h=0.1	h=0.01	h=0.001
0	1.514863232	1.514863232	1.514863232
π/2	.5292285154	.5290160410	.5290160228
π	.5669103179	.5668774805	.5668774773
3π/2	1.331444611	1.331425946	1.331425944
2π	1.514406280	1.514863204	1.514863232

Trabajaremos en lo que sigue con **h=0.01**. En primer lugar para **a=0.1** fijo (y_{2-}~0.104) hallamos la solución para diferentes datos iniciales:

t	y	y	y	y	y
0	3	1.301667826	1	0.1283	0.1282
2π	1.310847675	1.301667826	1.296362276	0.1348894133	0.1273076391
4π	1.301787393	1.301667826	1.301597876	0.4845145287	0.05508435478
6π	1.301669395	1.301667826	1.301666908	1.267376485	–INFINIT0

parece haber un valor inicial entre 0.1282 y 0.1283 tal que las soluciones que parten por arriba se acercan todas asintóticamente a una solución periódica y las de abajo se van a menos infinito (ese valor corresponderá a otra solución periódica, pero inestable).

Ahora fijemos el dato inicial **y_o=3** y variemos el valor del parámetro a:

t	a=0	a=0.1	a=0.15	a=0.16	a=0.18	a=0.19
0	3	3	3	3	3	3
2π	1.516264948	1.310847675	1.111625295	1.052526301	0.8971167254	0.7909316344
4π	1.514865819	1.301787393	1.075311341	1.000301043	0.7677866540	0.5507503099
6π	1.514863209	1.301669395	1.073072269	0.9952784520	0.7229482684	0.2422755917
8π	1.514863204	1.301667847	1.072928094	0.9947594238	0.7012005576	–INFINIT0
10π	1.514863204	1.301667826	1.072918785	0.9947054010	0.6889590560	

vuelve a aparecer en los cinco primeros casos una solución periódica (más pequeña cuanto mayor es a ; para a=0.18 el valor de y(2nπ) tiende a estabilizarse en torno a 0.6666 pero mucho más lentamente). Para a=0.19 , la solución que parte de y_o=3 (y por tanto al menos las que parten más abajo) se va a –∞ .