2. Sistemas y ecuaciones lineales

Si ya se podían resolver muy pocas ecuaciones de primer orden, menos aún se pueden resolver sistemas de tales ecuaciones o ecuaciones de orden mayor que uno. Salvo escasas excepciones, sólo en el caso lineal se puede caracterizar la estructura de las soluciones y sólo si los coeficientes son constantes se pueden hallar explícitamente tales soluciones mediante métodos elementales.

En la sección 2.1 enunciaremos las propiedades básicas (similares a las de ecuaciones de primer orden) de los sistemas de n ecuaciones (lineales o no) y de las ecuaciones de orden n, que se pueden considerar como un caso particular de sistemas. No daremos las demostraciones (bastaría casi sustituir en las del caso n=1 los valores absolutos por normas). Como en la solución general de un sistema o de una ecuación de orden n aparecen n constantes arbitrarias (así lo sugieren los ejemplos más sencillos de sistema: x'=0, y'=0, y de ecuación: x"=0) el problema de valores iniciales consistirá en hallar la solución que satisfaga n condiciones iniciales. Será fácil ver cuando este problema tiene solución única local. También daremos un resultado de prolongabilidad y la definición de estabilidad.

No generalizaremos, sin embargo, dos secciones importantes del capítulo anterior: el dibujo aproximado y los métodos numéricos. En el primer caso, porque no se puede: las soluciones de un sistema son curvas en un espacio de dimensión mayor que dos (en el capítulo 4, para sistemas autónomos de segundo orden, sí nos preocuparemos del dibujo de las proyecciones de las soluciones sobre el plano t=0). Los métodos numéricos sí son fáciles, pero tan parecidos al caso n=1 que no merece la pena estudiarlos de nuevo.

La sección 2.2 se centra ya en el caso lineal y, para ir fijando ideas, en el más sencillo n=2. Tendremos una fórmula (de variación de las constantes) para las soluciones de un sistema no homogéneo si conocemos lo que se llama una matriz fundamental (formada por soluciones del sistema homogéneo). Esta matriz sabremos calcularla (utilizando resultados de álgebra) si los coeficientes son constantes. De lo anterior deduciremos resultados para ecuaciones de segundo orden. Hallar la solución será especialmente sencillo para coeficientes constantes. Si son variables, veremos los pocos casos en que aún se pueden resolver.

En la sección 2.3 , y ya sin demostraciones, veremos los resultados para un n general. Las cosas se complican para los sistemas. Pero si los coeficientes son constantes sigue siendo fácil resolver ecuaciones homogéneas. Para resolver algunas no homogéneas tendremos el método de coeficientes indeterminados. Analizaremos también la estabilidad, que se podrá precisar fácilmente para sistemas de cualquier orden con coeficientes constantes.

La sección 2.4 introduce una técnica totalmente diferente, y tal vez más rápida, para hallar soluciones particulares de sistemas y ecuaciones lineales con coeficientes constantes: la transformada de Laplace. Esta técnica es especialmente interesante cuando los términos no homogéneos son discontinuos.

La última sección, la 2.5, muestra como obtener información sobre el número de soluciones periódicas de ecuaciones lineales de primero y segundo orden con coeficientes periódicos, sin necesidad de resolverlas.

2.1 Propiedades generales de sistemas y ecuaciones

Sea el **sistema de n ecuaciones de primer orden** [S] $\boxed{\begin{array}{l} x_1' = f_1(t,x_1,\ldots,x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n' = f_n(t,x_1,\ldots,x_n) \end{array}}$

cuyas soluciones son conjuntos de n funciones $x_1(t),\ldots,x_n(t)$ derivables y definidas en un intervalo común I que convierten cada ecuación de [S] en una identidad.

Llamaremos [P] al problema de valores iniciales formado por [S] y las n condiciones

$$\boxed{x_1(t_o) = x_{1o}\ ,\ \ldots\ ,\ x_n(t_o) = x_{no}}$$

O escrito en notación vectorial: [P] $\boxed{\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(t,\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_o) = \mathbf{x}_o \end{cases}}$, con $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_o = \begin{pmatrix} x_{1o} \\ \vdots \\ x_{no} \end{pmatrix}$.

Cada solución de [S] será entonces una función vectorial $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ de I en $\mathbf{R}^n$.

Consideramos en $\mathbf{R}^n$ la norma ecuclídea $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$, y llamaremos bola de centro $\mathbf{a}$ y radio r al conjunto $B(\mathbf{a},r) = \{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n : \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|<r\}$.

Los teoremas de existencia y unicidad y prolongabilidad para sistemas son muy parecidos a los de ecuaciones de primer orden:

Teor 1.

> Sean f_i y $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$, $i,k=1,\ldots,n$ continuas en $[t_o-h,t_o+h] \mathrm{x} B(\mathbf{x}_o,r)$.
> Entonces [P] tiene solución única definida al menos en un entorno de t_o

(y si sólo las f_i son continuas existe solución, aunque podría no ser única)

Teor 2.

> Si f_i y $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ son continuas en $[t_o,\infty) \mathrm{x} \mathbf{R}^n$ o bien existe t_1 tal que $\|\mathbf{x}(t)\|\to\infty$ cuando $t\to t_1$ o bien la solución $\mathbf{x}(t)$ de [P] está definida para todo $t \geq t_o$.

(y si son continuas en un conjunto $D\subset\mathbf{R}^{n+1}$ las soluciones llegan hasta la frontera de D)

También existe dependencia continua de parámetros y datos iniciales, aunque no enunciamos los teoremas y pasamos directamente a la definición de estabilidad, que es como la de primer orden, sustituyendo valores absolutos por normas:

> Una solución $\mathbf{x}(t)$ definida en $[t_o,\infty)$ es **estable** si $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ tal que toda solución $\mathbf{x}^*(t)$ con $\|\mathbf{x}(t_o)-\mathbf{x}^*(t_o)\|<\delta$ existe, está definida en $[t_o,\infty)$ y verifica $\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^*(t)\|<\varepsilon$ para todo $t \geq t_o$. Si además $\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^*(t)\|\to 0$ cuando $t\to\infty$, se dice que $\mathbf{x}(t)$ es **asintóticamente estable**.

(pero para un sistema puede ocurrir que $\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^*(t)\|\to 0$ cuando $t\to\infty$ y sin embargo que no consigamos hacer que $\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^*(t)\|$ sea menor que cualquier ε prefijado)

Consideremos ahora la **ecuación de orden n** : [E] $\boxed{x^{(n)} = g\big(t,x,x',\dots,x^{(n-1)}\big)}$

cuyas soluciones son funciones x(t) derivables n veces en un intervalo I que llevadas a [E] la convierten en una identidad. Llamamos [PE] al problema consistente en encontrar la solución de [E] que satisface las n condiciones iniciales

$$\boxed{x(t_o)=x_o\ ,\ x'(t_o)=x_o'\ ,\ \dots\ ,\ x^{(n-1)}(t_o)=x_o^{(n-1)}}$$

Toda ecuación de orden n se puede convertir en un sistema. Basta hacer

$$x=x_1\ ,\ x'=x_2\ ,\dots,\ x^{(n-1)}=x_n \ \to\ [SE]\ \boxed{\begin{array}{l} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \dots\dots\dots \\ x_n' = g(t,x_1,\dots,x_n) \end{array}}$$

y está claro que x es solución de [E] si y sólo si $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ : \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ : \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix}$ es solución de [SE] .

Si además **x** satisface $\mathbf{x}(t_o)=\begin{pmatrix} x_o \\ : \\ x_o^{(n-1)} \end{pmatrix}$ entonces x es solución del problema [PE] .

Los teoremas 1 y 2 se pueden, pues, aplicar también a las ecuaciones de orden n. Veamos la forma particular que adopta el teorema de existencia y unicidad.

Teor 3. Sean g , $\frac{\partial g}{\partial x}$, …, $\frac{\partial g}{\partial x^{(n-1)}}$ continuas en un entorno de $\big(t_o,x_o,x_o',\dots,x_o^{(n-1)}\big)$.
Entonces [PE] tiene solución única definida al menos en un entorno de t_o .

Por último, se dice que x(t) **es solución estable o asintóticamente estable de** [E] **si lo es la solución x**(t) **del sistema equivalente** (y por lo tanto se han de parecer tanto x(t) y x*(t) como las n–1 primeras derivadas de de las dos soluciones).

Ej 1. $\boxed{\begin{array}{l} x'=3tx^{1/3}+\ln y \\ y'=xy-t^3 \end{array}}$ Posee solución con $x(t_o)=x_o$, $y(t_o)=y_o$ si $y_o>0$. Es única si $x_o\neq 0$.

No sabemos, ni sabremos, hallar su solución general, ni ver que soluciones están definidas para todo t , ni estudiar su estabilidad (aunque se podrían hallar los valores aproximados para unos datos iniciales concretos por métodos numéricos).

Es trivial comprobar que una solución del sistema es $\mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix} t^3 \\ 1 \end{pmatrix}$

(la única que satisface x(1)=y(1)=1 , aunque tal vez haya más con x(0)=0, y(0)=1).

Ej 2. $\boxed{t^2x''-2tx'+2x=0}$ Posee solución única con $x(t_o)=a$, $x'(t_o)=b$ si $t_o\neq 0$.

En la próxima sección veremos que su solución general es $x=c_1t+c_2t^2$.

La única solución que satisface x(1)=a , x'(1)=b es $x=(2a-b)t+(b-a)t^2$ (que, como debía, es función continua de los datos iniciales). Las infinitas soluciones $x=c_2t^2$ satisfacen x(0)=0, x'(0)=0 , pero no hay ninguna satisfaciendo x(0)=1, x'(0)=0 .

La solución con x(1)=1, x'(1)=1 (x=t) es inestable pues para el sistema equivalente

$\begin{cases} x'=y \\ y'=-2t^{-2}x+2t^{-1}y \end{cases}$ es inestable $\mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ ya que $\left\|\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} (2a-b)t+(b-a)t^2 \\ (2a-b)+2(b-a)t \end{pmatrix}\right\|\to\infty$
para a y b tan cercanos como queramos a 1 .

2.2 Sistemas de dos ecuaciones lineales y ecuaciones lineales de segundo orden

Sea el sistema $\boxed{\begin{array}{l} x'= a(t)x+b(t)y+f(t) \\ y'= c(t)x+d(t)y+g(t) \end{array}}$

o en forma vectorial [S] $\boxed{\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}+\mathbf{f}(t)}$, donde $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $\mathbf{f}=\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$.

Suponemos que a,b,c,d,f,g son funciones de **R** en **R** continuas en un intervalo $I \ni t_o$. Por la sección anterior sabemos que existe una única solución de [S] que satisface cualquier par de datos iniciales $x(t_o)=x_o$, $y(t_o)=y_o$. Como ocurría en las lineales de primer orden se puede probar que esta solución única está definida para todo $t\in$ **I**.

Consideremos primero el **sistema homogéneo** [H] $\boxed{\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}}$.

A una matriz $\boxed{\mathbf{W}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{pmatrix}}$ cuyas columnas $\mathbf{x_1}=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{x_2}=\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ son soluciones de [H] y tal que el determinante $|\mathbf{W}(t_o)|\neq 0$ la llamaremos **matriz fundamental** de [H].

El siguiente teorema nos asegura que conocida una matriz fundamental **W**(t) el sistema [H] está resuelto (aunque no nos dice como calcularla).

Teor 1.

i] El conjunto V de soluciones de [H] es un espacio vectorial de dimensión 2
ii] Una matriz fundamental **W**(t) es no singular para todo $t\in$ I.
iii] El conjunto $\{\mathbf{x_1},\mathbf{x_2}\}$ constituye una base de V y por tanto la solución general de [H] es:

$$\mathbf{x} = c_1\,\mathbf{x_1} + c_2\,\mathbf{x_2} = \mathbf{W}(t)\mathbf{c}\,, \text{ con } \mathbf{c}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \text{ arbitrario.}$$

i] Es inmediato comprobar que cualquier combinación lineal de soluciones de [H] es también solución. Veamos además que son base de V las dos soluciones $\mathbf{e_1}(t)$ y $\mathbf{e_2}(t)$ de [H] cuyos valores iniciales son, respectivamente, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

son linealmente independientes: $c_1\mathbf{e_1}(t)+c_2\mathbf{e_2}(t)\equiv\mathbf{0} \Rightarrow c_1\mathbf{e_1}(t_o)+c_2\mathbf{e_2}(t_o)=\mathbf{0} \Rightarrow c_1=c_2=0$.

cualquier solución $\mathbf{x}(t) =\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ se puede escribir como combinación lineal de ellas:

$\mathbf{z}(t)=x(t_o)\mathbf{e_1}(t)+y(t_o)\mathbf{e_2}(t)$ es solución con $\mathbf{z}(t_o)=\mathbf{x}(t_o)$. Por unicidad es $\mathbf{x}(t)\equiv\mathbf{z}(t)\ \forall t\in$ I.

ii] Si fuera $|\mathbf{W}(s)|=0$ para algun $s\in$ I existirían b_1 , b_2 no los dos nulos tales que $b_1\mathbf{x_1}(s) + b_2\mathbf{x_2}(s) = \mathbf{0}$. Entonces $\mathbf{x}(t) = b_1\mathbf{x_1}(t) + b_2\mathbf{x_2}(t)$ sería solución con $\mathbf{x}(s)=\mathbf{0}$. De nuevo por unicidad $\mathbf{x}(t)\equiv\mathbf{0}$ y por tanto $|\mathbf{W}(t)|$ sería 0 para todo t de I.

iii] Sean $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$ soluciones cualesquiera. Si $|\mathbf{W}(t_o)|\neq 0$, dichas soluciones son independientes: $c_1\mathbf{x_1}(t)+c_2\mathbf{x_2}(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{c} \equiv \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{W}(t_o)\mathbf{c} = \mathbf{0} \Rightarrow c_1=c_2=0$.

Conocida una **W**(t) podríamos calcular la solución de [H] con $\mathbf{x}(t_o)=\mathbf{x_o}$ resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas $\mathbf{W}(t_o)\mathbf{c}=\mathbf{x_o}$ que tiene solución única.

Consideremos ahora el **sistema no homogéneo** [S]:

Teor 2.

i] Si $\mathbf{x_p}$ es cualquier solución de [S] y $\mathbf{W}(t)$ es una matriz fundamental de [H], la solución general de [S] viene dada por $\mathbf{x} = \mathbf{W}(t)\mathbf{c}+\mathbf{x_p}$.

ii] Una solución particular de [S] es $\mathbf{x_p} = \mathbf{W}(t)\int \mathbf{W}^{-1}(t)\,\mathbf{f}(t)\,dt$

iii] Si $\mathbf{W_c}(t)$ satisface $\mathbf{W_c}(t_o)=\mathbf{I}$ (matriz fundamental canónica en t_o) la solución de [S] que satisface $\mathbf{x}(t_o)=\mathbf{x_o}$ es

$$\mathbf{x} = \mathbf{W_c}(t)\mathbf{x_o} + \mathbf{W_c}(t)\int_{t_o}^{t} \mathbf{W_c}^{-1}(s)\,\mathbf{f}(s)ds \quad \left[\begin{array}{c}\textbf{fórmula de variación}\\ \textbf{de las constantes}\end{array}\right]$$

i] Sea $\mathbf{x}$ cualquier solución de [S]. Entonces $[\mathbf{x}-\mathbf{x_p}]' = \mathbf{Ax}+\mathbf{f}-\mathbf{Ax_p}-\mathbf{f} = \mathbf{A}[\mathbf{x}-\mathbf{x_p}]$. Por tanto $\mathbf{x}-\mathbf{x_p} = \mathbf{W}(t)\mathbf{c}$ para algún $\mathbf{c}$, pues satisface [H]. Toda solución se puede escribir así.

ii] $\mathbf{x_p}' = \mathbf{W}'\int \mathbf{W}^{-1}\mathbf{f}dt + \mathbf{W}\,\mathbf{W}^{-1}\mathbf{f} = \mathbf{Ax_p}+\mathbf{f}$ pues $\mathbf{W}' = \mathbf{AW}$ por ser solución cada columna.

iii] Por i] y ii] es solución de [S]. Además $\mathbf{x}(t_o) = \mathbf{W_c}(t_o)\mathbf{x_o} = \mathbf{I}\,\mathbf{x_o} = \mathbf{x_o}$.

Observemos que si conocemos cualquier matriz fundamental podemos calcular la canónica : $\mathbf{W_c}(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{W}^{-1}(t_o)$, pues el producto de $\mathbf{W}(t)$ por una matriz constante sigue siendo fundamental (sus columnas son combinaciones lineales de soluciones y por tanto son soluciones) y evidentemente es la matriz unidad $\mathbf{I}$ en $t=t_o$.

Conocida una $\mathbf{W}(t)$ podemos resolver, pues, tanto el sistema homogéneo como el no homogéneo. Sin embargo sólo tendremos un método de cálculo de tal matriz fundamental para el caso de **coeficientes constantes** que tratamos ahora:

Sean [C] $\boxed{\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{f}(t)}$ y [Ch] $\boxed{\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}}$, con $\mathbf{A}$ matriz constante.

[Recordemos que la exponencial de una matriz $\mathbf{B}$ se define $e^{\mathbf{B}} = \mathbf{I} + \mathbf{B} + \frac{1}{2!}\mathbf{B}^2 + \dots$, que para toda matriz $\mathbf{B}$ es convergente (sus elementos son series numéricas convergentes), que es no singular, que la inversa de $e^{\mathbf{B}}$ es $e^{-\mathbf{B}}$ y que $e^{\mathbf{B}+\mathbf{C}}=e^{\mathbf{B}}e^{\mathbf{C}}$ si $\mathbf{BC}=\mathbf{CB}$]

Teor 3. $\mathbf{W_c}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_o)}$ es la matriz fundamental canónica en t_o de [Ch]

En efecto, $$\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathbf{A}t)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{dt}\frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!} = \mathbf{A}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}$$

donde hemos utilizado que la serie converge uniformemente y hemos tomado $t_o=0$ por comodidad. Es, pues, $e^{\mathbf{A}(t-t_o)}$ matriz fundamental ya que entonces cada una de sus columnas satisface también [Ch]. Además $e^{\mathbf{A}(t_o-t_o)}= \mathbf{I}$, con lo que es la canónica.

El problema de resolver el sistema [C] se reduce, pues, al cálculo de la exponencial de una matriz. Tal exponencial es fácilmente calculable a partir de la matriz $\mathbf{J}$ de Jordan asociada a la matriz dada. Aunque en general no lo sea, es fácil escribir la forma de Jordan de $\mathbf{A}$ para el caso n=2 que estamos tratando (ver libros de álgebra):

Teor 4. Sean λ_1 , λ_2 los autovalores de **A** [las raices de $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=0$] .
Entonces existe una matriz no singular **P** tal que $\mathbf{A}=\mathbf{PJP}^{-1}$ donde:

i] Si $\lambda_1\neq\lambda_2$ y $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$ son vectores propios asociados a ellos [$(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})\mathbf{v_i}=\mathbf{0}$],
$\mathbf{J}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$ y $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}\mathbf{v_1} & \mathbf{v_2}\end{pmatrix}$, matriz cuyas columnas son $\mathbf{v_1}$ y $\mathbf{v_2}$.

ii] Si $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ y sólo existe un vector propio **v** linealmente independiente asociado, $\mathbf{J}=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 1 & \lambda\end{pmatrix}$ y $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}\mathbf{w} & \mathbf{v}\end{pmatrix}$, siendo **w** cualquier vector con $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{w}=\mathbf{v}$.

iii] Si $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ y existen dos vectores propios linealmente independientes asociados a λ , **A** es ya diagonal.

La $e^{\mathbf{A}t}$ está relacionada con la $e^{\mathbf{J}t}$ de la misma forma que la **A** lo estaba con la **J**:

$$e^{\mathbf{A}t}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbf{PJ}^k\mathbf{P}^{-1}t^k}{k!}=\mathbf{P}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathbf{J}^k t^k}{k!}\mathbf{P}^{-1}=\mathbf{P}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{P}^{-1}\text{ , pues }\mathbf{A}^k=(\mathbf{PJP}^{-1})...(\mathbf{PJP}^{-1})=\mathbf{PJ}^k\mathbf{P}^{-1}$$

y la $e^{\mathbf{J}t}$ se calcula facilmente:

$$\text{si }\mathbf{J}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\ ,\ e^{\mathbf{J}t}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\lambda_1 t & 0\\ 0 & \lambda_2 t\end{pmatrix}+\frac{1}{2!}\begin{pmatrix}\lambda_1^2t^2 & 0\\ 0 & \lambda_2^2t^2\end{pmatrix}+\dots=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t} & 0\\ 0 & e^{\lambda_2 t}\end{pmatrix}$$

$$\text{si }\mathbf{J}=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 1 & \lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\mathbf{D}+\mathbf{N}\ ,\ e^{\mathbf{J}t}=e^{\mathbf{D}t}e^{\mathbf{N}t}=\begin{pmatrix}e^{\lambda t} & 0\\ 0 & e^{\lambda t}\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ t & 0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{pmatrix}e^{\lambda t}$$

De lo dicho para coeficientes constantes y de la fórmula de variación de las constantes obtenemos la siguiente expresión para la solución de [C] que satisface $\mathbf{x}(t_o)=\mathbf{x_o}$:

$$\boxed{\mathbf{x}=\mathbf{P}\,e^{\mathbf{J}(t-t_o)}\,\mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{x_o}+\mathbf{P}\int_{t_o}^{t}e^{\mathbf{J}(t-s)}\,\mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{f}(s)\,ds}$$

donde todas las matrices que aparecen son calculables. Observemos que los λ pueden ser complejos, así como las matrices **P** y $e^{\mathbf{J}t}$, pero si **A** es real han de ser reales la matriz fundamental $e^{\mathbf{A}t}$ y la solución **x**.

Ej 1. Resolvamos $\boxed{\begin{array}{l}x'=2x+y\\ y'=3x+4y+e^t\end{array}}$ con $\boxed{x(0)=0,\ y(0)=1}$, o sea, $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix}0\\ e^t\end{pmatrix}$, $\mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$

[Sabemos que dicha solución es única y que está definida para todo t de **R**]

$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=\lambda^2-6\lambda+5=0$ tiene por solución $\lambda=5$ y $\lambda=1$. Por tanto $\mathbf{J}=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $e^{\mathbf{J}t}=\begin{pmatrix}e^{5t} & 0\\ 0 & e^t\end{pmatrix}$

$(\mathbf{A}-5\mathbf{I})\mathbf{v}=\mathbf{0}\rightarrow\mathbf{v}=\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$, $(\mathbf{A}-\mathbf{I})\mathbf{v}=\mathbf{0}\rightarrow\mathbf{v}=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\Rightarrow\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow\mathbf{P}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$. Así que

$$\mathbf{x}(t)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{5t} & 0\\ 0 & e^t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}+\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\int_0^t\begin{pmatrix}e^{5(t-s)} & 0\\ 0 & e^{t-s}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ e^s\end{pmatrix}ds=$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}e^{5t}-e^t\\ 3e^{5t}+e^t\end{pmatrix}+\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\int_0^t e^{5t-4s}ds\\ -\int_0^t e^t ds\end{pmatrix}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}5e^{5t}-5e^t-4te^t\\ 15e^{5t}+e^t+4te^t\end{pmatrix}$$

Deduzcamos de todo lo anterior resultados para **ecuaciones lineales** que, como vimos en la sección 2.1, se pueden considerar como un caso particular de sistemas.

Consideremos [e] $\boxed{x''+a(t)x'+b(t)x = f(t)}$, con a, b y f continuas en I.

Sabemos que entonces existe solución única definida en todo el intervalo I para cada par de datos iniciales $x(t_o)=x_o$, $x'(t_o)=x_o'$ si $t_o \in$ **I**. Haciendo x'=y obtenemos el sistema

$\begin{cases} x' = y \\ y' = -b(t)x - a(t)y + f(t) \end{cases}$ cuyas soluciones serán funciones vectoriales $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$.

Este sistema está resuelto conociendo una matriz fundamental, para lo que basta conocer dos soluciones x_1 y x_2 de la ecuación homogéna asociada a [e] (pues la fila inferior de la matriz estará formada por las derivadas de x_1 y x_2) tales que el llamado determinante **wronskiano** de x_1 y x_2 $\boxed{|\mathbf{W}|(t) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix}}$ sea no nulo en algún s de I.

La solución general de [e] será entonces la primera fila de $\mathbf{W}(t)\mathbf{c} + \mathbf{W}(t)\int \mathbf{W}^{-1}(t) \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix} dt$.

Como $\mathbf{W}^{-1}(t) = \frac{1}{|\mathbf{W}|(t)} \begin{pmatrix} x_2'(t) & -x_2(t) \\ -x_1'(t) & x_1(t) \end{pmatrix}$, unas pocas operaciones nos llevan a:

Teor 5. **i]** Si x_1 y x_2 son dos soluciones de la ecuación homogéna cuyo determinante wronskiano es no nulo para algún s de I y x_p es cualquier solución particular de [e], la solución general de [e] es $x = c_1x_1 + c_2x_2 + x_p$

ii] Una solución particular de [e] es $x_p = x_2\int \frac{x_1 f}{|\mathbf{W}|} dt - x_1 \int \frac{x_2 f}{|\mathbf{W}|} dt$

[**fórmula de variación de las constantes**]

El cálculo de las dos soluciones en términos de funciones elementales se podrá realizar si los coeficientes son constantes y en pocos casos más (en el capítulo siguiente se verá como resolver cualquier solución de la forma [e] por medio de series).

Resolvamos la **ecuación con coeficientes constantes** [c] $\boxed{x''+ax'+bx = f(t)}$

Llamemos [ch] a la **ecuación homogénea** ($f\equiv 0$).

La matriz del sistema asociado es $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$, de ecuación característica $\boxed{\lambda^2+a\lambda+b=0}$

(se llega a esta ecuación probando en [ch] soluciones del tipo $e^{\lambda t}$, método más clásico).

Como los elementos del vector real $\mathbf{P}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{c}$, solución general del sistema homogéneo, están formados por combinaciones lineales arbitrarias de los elementos de la matriz $e^{\mathbf{J}t}$, la solución general de [ch] es:

Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ reales , $x=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}$

Si λ doble (real) , $x=(c_1+c_2t)e^{\lambda t}$

Si $\lambda=p\pm qi$, $x=(c_1\cos qt+c_2\operatorname{sen} qt)e^{pt}$

pues $e^{\mathbf{J}t}$ es, en cada caso, $\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} e^{\lambda t}$, $\begin{pmatrix} e^{pt}(\cos qt + i\operatorname{sen} qt) & 0 \\ 0 & e^{pt}(\cos qt - i\operatorname{sen} qt) \end{pmatrix}$

Para la búsqueda de la solución particular de la no homogénea disponemos siempre de la fórmula de variación de las constantes, pero en muchas ocasiones será preferible el método de los coeficientes indeterminados que describiremos en la próxima sección.

Ej 2. Resolvemos $\boxed{x''-2x'+x = 6te^t \text{ con } x(1)=x'(1)=0}$

$\lambda^2-2\lambda+1=0$ tiene la raiz doble $\lambda=1$, luego la solución de la homogénea es $x=(c_1+c_2t)e^t$

Como $|\mathbf{W}|(t) = \begin{vmatrix} e^t & te^t \\ e^t & (t+1)e^t \end{vmatrix} = e^{2t}$, $x_p = 6te^t\int\frac{e^t\,te^t}{e^{2t}}dt - 6e^t\int\frac{te^t\,te^t}{e^{2t}}dt = t^3e^t$

la solución general de la no homogénea es $x=(c_1+c_2t)e^t+t^3e^t$.

Imponiendo las condiciones iniciales: $\left.\begin{array}{l} x(1)=[c_1+c_2+1]e=0 \\ x'(1)=[c_1+2c_2+4]e=0 \end{array}\right\} \to x=(2-3t+t^3)e^t$.

Aunque sea un mal camino, repasemos las matrices resolviendo el sistema equivalente

$\left\{\begin{array}{l} x'=y \\ y'=-x+2y+6te^t \end{array}\right.$, o sea, $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 6te^t \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}(1)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Como $\lambda=1$ doble $e^{\mathbf{J}t}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}e^t$

(nunca la matriz de un sistema proveniente de una ecuación puede ser diagonal).

El único (salvo producto por un escalar) vector **v** asociado al $\lambda=1$ doble es $\mathbf{v}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Escogemos **w** tal que $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{w}=\mathbf{v}$, por ejemplo $\mathbf{w}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \mathbf{P}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to \mathbf{P}^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

y por tanto $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\int_1^t e^{t-s}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t-s & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 6se^s \end{pmatrix}ds=\begin{pmatrix} t^3-3t+2 \\ t^3+3t^2-3t+1 \end{pmatrix}e^t$

cuya x es la de antes y cuya y es la derivada de la x.

Aunque no es práctico pasar de ecuaciones a sistemas sí lo es, en cambio, convertir un sistema dado en una ecuación , sobre todo si los autovalores son complejos:

Ej 3. $\boxed{\begin{array}{ll} x'=x+2y & x(0)=1 \\ y'=-2x+y & y(0)=1 \end{array}} \to \lambda=1\pm 2i \to e^{\mathbf{J}t}=\begin{pmatrix} e^t[\cos 2t+i\,\mathrm{sen}\,2t] & 0 \\ 0 & e^t[\cos 2t-i\,\mathrm{sen}\,2t] \end{pmatrix}$

y es pesado calcular $\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$, $\mathbf{P}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$ y $\mathbf{x}=\mathbf{P}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{P}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^t[\cos 2t+\mathrm{sen}\,2t] \\ e^t[\cos 2t-\mathrm{sen}\,2t] \end{pmatrix}$

Sin embargo, derivando la primera ecuación: $x''=x'+2y'$.

Sustituyendo la y' de la segunda: $x''=x'-4x+2y$.

Sustituyendo ahora la y despejada de la primera ecuación:

$x''=x'-4x+x'-x \to x''-2x'+5x=0$ de solución general $x=(c_1\cos 2t+c_2\,\mathrm{sen}\,2t)\,e^t$

Imponiendo los datos iniciales: $x(0)=1$, $x'(0)=x(0)+2y(0)=3$ obtenemos el primer elemento x del vector solución; que sustituido junto con su derivada x' en la primera ecuación nos proporciona el y de la solución.

Consideremos otros tres casos, ahora con **coeficientes variables**, de ecuaciones lineales de segundo orden [e] que son resolubles por métodos elementales.

Ecuaciones de Euler: [u] $\boxed{t^2x''+atx'+bx=h(t)}$, $t>0$

Haciendo el cambio de variable independiente $t=e^s$: $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t}\frac{dx}{ds}$, $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{1}{t^2}\left[\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{dx}{ds}\right]$,

la ecuación [u] se convierte en la ecuación lineal con coeficientes constantes

$\frac{d^2x}{ds^2}+(a-1)\frac{dx}{ds}+bx=h(e^s)$ de ecuación característica $\boxed{\lambda^2+(a-1)\lambda+b=0}$.

Como conocemos las soluciones de la ecuación homogénea para esta segunda ecuación, deshaciendo el cambio ($s=\ln t$), tenemos que la solución general de una ecuación de Euler **homogénea** es:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Si } \lambda_1\neq\lambda_2 \text{ reales },\ x=c_1t^{\lambda_1}+c_2t^{\lambda_2}\\ \text{Si } \lambda \text{ doble (real) },\ x=(c_1+c_2\ln t)\,t^{\lambda}\\ \text{Si } \lambda=p\pm qi,\ x=[\,c_1\cos(q\ln t)+c_2\,\mathrm{sen}(q\ln t)\,]\,t^p\end{array}}$$

(observemos que la "ecuación característica" de una ecuación de Euler sería la que obtendríamos probando en la homogénea soluciones de la forma t^{λ}).

Para hallar la solución particular de la no homogénea dispondremos siempre de la fórmula de variación de las constantes con $f(t)=h(t)/t^2$ (y para la ecuación en s del método de coeficientes indeterminados que veremos, si $h(e^s)$ es del tipo adecuado).

Ej 4. Hallemos la solución general de $\boxed{t^2x''+tx'-x=t}$

La "ecuación característica" es $\lambda^2+(1-1)\lambda-1=0 \rightarrow \lambda=\pm1$,

con lo que la homogénea tiene por solución general $x=c_1t+c_2t^{-1}$
(válida en este caso para todo $t\neq0$) .

Como $|\mathbf{W}|(t)=\begin{vmatrix} t & t^{-1}\\ 1 & -t^{-2}\end{vmatrix}=-2t^{-1}$ y $f(t)=t^{-1} \longrightarrow x_p=t^{-1}\int\frac{t\,t^{-1}}{-2t^{-1}}dt-t\int\frac{t^{-1}t^{-1}}{-2t^{-1}}dt=\frac{t}{2}\ln t-\frac{t}{4}$

$\longrightarrow$ la solución general de la no homogénea es $x=c_1t+c_2t^{-1}+\frac{t}{2}\ln t$
(hemos englobado el segundo término de la solución particular en c_1t)

Si en la ecuación [e] es $\mathbf{b(t)\equiv0}$: $\boxed{x''+a(t)x'=f(t)}$,

el cambio $x'=y$ convierte dicha ecuación en una lineal de primer orden en y , resoluble con la fórmula del capítulo 1.

(Observemos que el cambio anterior reduce también una ecuación **no lineal** en la que no aparece la x en una de primer orden, tal vez resoluble: $x''=g(t,x') \rightarrow y'=g(t,y)$. Este es unos de los pocos casos de ecuaciones no lineales que se pueden resolver)

Ej 5. Calculemos la solución general de $\boxed{t x''-2x' = t\cos t}$

$x'=y \ \to\ y' = \frac{2y}{t} + \cos t \ \to\ y = c_2 t^2 + t^2\int t^{-2}\cos t\,dt \ \to\ x= c_1+ c_2 t^3+ \int \big[t^2\int t^{-2}\cos t\,dt\big]\,dt$
integrales que no son calculables elementalmente.

La ecuación es también de Euler (con $a=-2$, $b=0$ y $h(t)=t^2\cos t$) y se podría resolver como el ejemplo 4: $\lambda^2-3\lambda=0 \ \to\ \lambda=0, \lambda=3 \ \to\ x = c_1 + c_2 t^3$, solución de la homogénea.
$|\mathbf{W}|(t) = 3t^2 \to\ x= c_1+ c_2 t^3 + t^3\int \frac{\cos t}{3t^2}\,dt - \int \frac{t\cos t}{3}\,dt$, que debe coincidir con la de antes.

Si conocemos una solución x_1 de la ecuación homogénea $x''+a(t)x'+b(t)x=0$, **el cambio** $\boxed{x = x_1\int u\,dt}$ **lleva la ecuación** [e] **a una lineal de primer orden en** u.
(no son, por tanto, necesarias las dos soluciones que exigía el teorema 5; el problema es que en pocas ocasiones podremos encontrar esa solución: a veces a simple vista, a veces tanteando, a veces nos aparecerá cuando estemos resolviéndola por series)

En efecto, llevando x , $x' = x_1'\int u\,dt+x_1u$ y $x'' = x_1''\int u\,dt+2x_1'u+x_1u'$ a [e] obtenemos:

$$x_1u' + (2x_1'+ax_1)u + (x_1''+ax_1'+bx_1)\int u\,dt = f(t) \ \to\ u'= -\big(2x_1'\,x_1^{-1}+a\big)u + f(t)\,x_1^{-1}$$

pues x_1 satisface la homogénea. El conocimiento de la x_1 nos permite calcular también una segunda solución x_2 de la homogénea, pues integrando la ecuación en u con f(t)=0:

$$u = e^{-\int a\,dt}\,x_1^{-2} \ \to\ \boxed{x_2 = x_1 \int e^{-\int a\,dt}\,x_1^{-2}\,dt}$$

Ej 6. Resolvamos $\boxed{t^3 x''- t x' + x = 1}$

Evidentemente $x_1 = t$ es solución de la homogénea. Para resolver la ecuación dada podemos ahora seguir dos caminos diferentes:

1) Efectuar explícitamente el cambio $x = t\int u$, $x' = \int u+tu$, $x'' = 2u+tu'$, convirtiendola en la lineal de primer orden no homogénea $t^4u' + (2t^3-t^2)u = 1 \ \to\ u' = (t^{-2}-2t^{-1})u + t^{-4}$.
Resolver esta lineal: $u = c_2t^{-2}e^{-1/t} + t^{-2}e^{-1/t}\int t^{-2}e^{1/t}dt = c_2 t^{-2}e^{-1/t} - t^{-2}$
Deshacer el cambio: $y = t\,(c_1+ c_2\int t^{-2}e^{-1/t}dt - \int t^{-2}dt) = c_1t + c_2\, te^{-1/t} + 1$

2) Calcular una segunda solución de la homogénea por la fórmula deducida antes:

$$x_2 = t\int e^{-\int -t^{-2}dt}\, t^{-2}dt \ = \ t\, e^{-1/t}$$

y calcular una solución particular de la no homogénea por variación de constantes

$$|\mathbf{W}|(t) = e^{-1/t} \ \to\ x_p = t\, e^{-1/t}\int t^{-2}e^{1/t}dt - t\int t^{-2}dt \ = \ t + 1$$

(aunque todo el trabajo con la no homogénea ha sido absolutamente inútil porque la $x_p = 1$ se veía también a simple vista)

2.3 Sistemas y ecuaciones lineales de orden n. Estabilidad.

Veamos, sin demostración, los resultados esenciales, análogos a los del caso n=2, para el sistema general de n ecuaciones lineales:

[S] $\boxed{\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}+\mathbf{f}(t)}$, con $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ : & & : \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ : \\ x_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ : \\ f_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}$ y $\mathbf{f}$ continuas en I .

Existe entonces solución única definida en todo I satisfaciendo $\mathbf{x}(t_o)=\mathbf{x_o}$ si $t_o \in$ **I**.

Se llama matriz fundamental a una $\mathbf{W}(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ : & & : \\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}$ cuyas n columnas son soluciones de la homogénea $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ y tal que $|\mathbf{W}(t_o)| \neq 0$.

Teor 1. $\boxed{\text{La solución general de [S] es } \quad \mathbf{x} = \mathbf{W}(t)\mathbf{c} + \mathbf{W}(t)\int \mathbf{W}^{-1}(t)\mathbf{f}(t)dt}$

De nuevo conocida una matriz fundamental el sistema está resuelto, aunque su cálculo se complica, incluso en el caso de coeficientes constantes:

Sea [C] $\boxed{\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{f}(t)}$, con **A** matriz constante .

Teor 2. $\boxed{\text{La solución de [C] con } \quad \mathbf{x}(t_o)=\mathbf{x_o} \text{ es } \mathbf{x} = e^{\mathbf{A}(t-t_o)}\,\mathbf{x_o} + \int_{t_o}^{t} e^{\mathbf{A}(t-s)}\,\mathbf{f}(s)\,ds}$

Pero ahora no es fácil el cálculo de $e^{\mathbf{A}t}$, pues en general las matrices **J** y **P** son difíciles de calcular (ni siquiera, normalmente, podremos hallar de forma exacta los autovalores de **A**). Veamos, simplemente, el caso sencillo en que **J** resulta ser diagonal:

Teor 3. Si hay n vectores propios $\mathbf{v_1},...,\mathbf{v_n}$ linealmente independientes (asociados a $\lambda_1,...,\lambda_n$) , entonces

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ : & : & \ddots & : \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}\mathbf{P}^{-1} \quad \text{con} \quad \mathbf{P}=\big(\mathbf{v_1} \ldots \mathbf{v_n}\big)$$

(esto sucederá, desde luego, si los λ_i son raices simples de la ecuación característica, pero también puede ocurrir aunque haya autovalores múltiples; si hay menos de n vectores propios la **J** no será diagonal y aparecerán términos de la forma t^n en la matriz exponencial; como siempre, dicha matriz será real, aunque los λ_i puedan ser complejos)

En la próxima sección, gracias a la transformada de Laplace, podremos resolver estos sistemas, incuidos los de **J** no diagonal, sin usar matrices.

Ej 1. Hallemos la solución general de $\boxed{\begin{array}{l} x'=x+2y \\ y'=2x+2y+2z \\ z'=2y+3z \end{array}}$ o sea, $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&2&2\\0&2&3\end{pmatrix}\mathbf{x}$.

Los autovalores y los vectores propios asociados son

$\lambda=-1\to \mathbf{v}=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$, $\lambda=2\to \mathbf{v}=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\lambda=5\to \mathbf{v}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ y, por tanto, $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}2&2&1\\-2&1&2\\1&-2&2\end{pmatrix}$

Para el cálculo de la solución general no es necesario el cálculo de la $\mathbf{P}^{-1}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{W}(t)\mathbf{c} = \mathbf{P}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{c} = \mathbf{P}\begin{pmatrix}e^{-t}&0&0\\0&e^{2t}&0\\0&0&e^{5t}\end{pmatrix}\mathbf{c}^* = c_1e^{-t}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} + c_2e^{2t}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} + c_3e^{5t}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

Sea ahora [e] $\boxed{x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(t)x'+a_n(t)x = f(t)}$ con a_i , f continuas en I.

Tiene solución única definida en I satisfaciendo $x(t_o)=x_o,\ldots,x^{(n-1)}(t_o)=x_o^{(n-1)}$, si $t_o\in \mathbf{I}$.

Teor 4. Si $x_1,\ldots,x_n$ son n soluciones de la homogénea tales que su wronskiano $|\mathbf{W}|(t) = \begin{vmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & \ldots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$ es no nulo para algún $s\in \mathbf{I}$ y x_p es solución de [e] , la solución general de [e] es $x = c_1x_1+\ldots+c_nx_n+x_p$

Si los coeficientes son constantes: [c] $\boxed{L[x] \equiv x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}x'+a_nx = f(t)}$, para resolver la homogénea basta hallar las raíces de una ecuación de autovalores :

Teor 5. Supongamos que $\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n=0$ tiene m raíces reales $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ de multiplicidades $r_1 , \ldots , r_m$ y 2k raíces complejas $p_1\pm iq_1 , \ldots , p_k\pm iq_k$ de multiplicidades $s_1 , \ldots , s_k$ [$r_1+\ldots+ r_m + 2 (s_1+\ldots+s_k) = n$] . Entonces

$e^{\lambda_1 t} , \ldots , t^{r_1-1} e^{\lambda_1 t} , \ldots\ldots , e^{\lambda_m t} , \ldots , t^{r_m-1} e^{\lambda_m t} , \ldots\ldots ,$

$e^{p_1 t} \cos q_1t , e^{p_1 t} \operatorname{sen} q_1t , \ldots , t^{s_1-1} e^{p_1 t} \cos q_1t , t^{s_1-1} e^{p_1 t} \operatorname{sen} q_1t , \ldots\ldots ,$

$e^{p_k t} \cos q_kt , e^{p_k t} \operatorname{sen} q_kt , \ldots , t^{s_k-1} e^{p_k t} \cos q_kt , t^{s_k-1} e^{p_k t} \operatorname{sen} q_kt$

son n soluciones linealmente independientes de $L[x]=0$

Ej 2. $\boxed{x^{v}-4x''+3x'=0}$ tiene por ecuación característica $\lambda^5-4\lambda^2+3\lambda=0$,

cuyas raíces son $\lambda=0$, $\lambda=1$ doble y $\lambda=-1\pm i\sqrt{2}$, con lo que su solución general es

$$x = c_1+ (c_2+c_3t)\, e^t + (c_4\cos\sqrt{2}t+c_5\operatorname{sen}\sqrt{2}t)\, e^{-t}$$

Para resolver la no homogénea no disponemos ahora de una fórmula sencilla para el cálculo de la x_p a partir de las soluciones de la homogénea (aunque como último recurso podríamos resolver el sistema equivalente mediante matrices). Pero si la f(t) está formada por sumas y productos de polinomios, exponenciales, senos y cosenos podemos acudir al **método de los coeficientes indeterminados** descrito en el siguiente teorema:

Teor 6.

> **i]** Si $f(t) = e^{\lambda t}p_m(t)$, con p_m polinomio de grado m, y λ no es autovalor de [ch] existe una solución particular de [c] de la forma $x_p= e^{\lambda t}P_m(t)$, donde P_m es otro polinomio de grado m cuyos coeficientes se determinan llevando x_p a [c]. Si λ es autovalor de multiplicidad r existe $x_p= t^r e^{\lambda t}P_m(t)$
>
> **ii]** Si $f(t) = e^{pt}\,[p_j(t) \cos qt + q_k(t) \operatorname{sen} qt\,]$ con p_j y q_k polinomios de grados j y k, y $p\pm iq$ no es autovalor de [ch] existe solución particular de [c] de la forma $x_p= e^{pt}\,[P_m(t) \cos qt + Q_m(t) \operatorname{sen} qt\,]$ donde P_m y Q_m son polinomios de grado $m=\text{máx}\,\{ j,k\}$, cuyos coeficientes se determinan llevando x_p a [c]. Si $p\pm iq$ es autovalor de multiplicidad s existe $x_p= t^s e^{pt}\,[P_m(t) \cos qt + Q_m(t) \operatorname{sen} qt\,]$
>
> **iii]** Si $f(t) = f_1(t)+..+f_n(t)$ y $L[x_i] = f_i(t)$ entonces $L[x_1+..+x_n] = f(t)$

Ej 3. Hallemos, por este método, las soluciones particulares de los ejemplos 2 y 4 de la sección anterior ya calculadas con la fórmula de variación de las constantes:

$\boxed{x''-2x'+x=6te^t}$ Como $\lambda=1$ es autovalor doble de la homogénea hay solución de la forma $x_p=t^2e^t[At+B] \to x'_p=e^t\,[At^3+(B+3A)t^2+2Bt] \to x''_p=e^t\,[At^3+(B+6A)t^2+(4B+6A)t+2B]$ Llevándolas a la ecuación tenemos $[6At+2B]e^t=6te^t \to B=0,\ A=1 \to x_p=t^3e^t$

$\boxed{t^2x''+tx'-x=t}$ Teníamos que $\lambda=\pm 1$. Como no tiene coeficientes constantes no podemos aplicar directamente el método de coeficientes indeterminados. Pero como sabemos que al hacer $t=e^s$ la ecuación se convierte en $x''-x=e^s \to$ existe para esta ecuación $x_p=Ase^s \to$ existe $x_p=At\ln t$ para la ecuación en $t \to x_p= \frac{t}{2}\ln t$ ya calculada.

Ej 4. Calculemos soluciones particulares de $\boxed{x''+x = f(t)}$ para diferentes f(t).

Sus autovalores son $\lambda=\pm i$ (su solución general es, pues, $x=c_1\cos t+c_1\operatorname{sen} t+x_p$)

Si $\boxed{f(t) = e^t \cos t}$ existe $x_p=e^t(A\cos t+B\operatorname{sen} t) \to (A+2B)\cos t+(B-2A)\operatorname{sen} t = \cos t \to$ $A= \frac{1}{5}$, $B= \frac{2}{5} \to x_p= e^t\,(\frac{1}{5}\cos t+ \frac{2}{5}\operatorname{sen} t\,)$

Si $\boxed{f(t) = \cos^2 t}$ aparentemente no podemos utilizar coeficientes indeterminados, pero como $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos 2t) \to$ existe $x_p= A+B \cos 2t+C \operatorname{sen} 2t \to x_p= \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\cos 2t$

Si $\boxed{f(t) = (\cos t)^{-1}}$ tenemos que acudir a la fórmula de variación de las constantes: $|\mathbf{W}(t)|=1 \to x_p= \operatorname{sen} t \int\cos t\,(\cos t)^{-1}dt - \cos t \int\operatorname{sen} t\,(\cos t)^{-1}dt = t \operatorname{sen} t+ \cos t \ln(\cos t)$

Ej 5. Resolvamos $\boxed{x^{iv}+4x'''+8x''+8x'+4x=4t \ \text{ con } x(0)=-1,x'(0)=0,x''(0)=0,x'''(0)=2}$

Como $\lambda=0$ no es autovalor existe $x_p=At+B \to x_p= t-2$; lo difícil es calcular los autovalores que, de hecho, son $\lambda=-1\pm i$ dobles, por lo que la solución general es $x= (c_1+c_2t)\, e^{-t} \cos t + (c_3+c_4t)\, e^{-t} \operatorname{sen} t + t-2$; imponiendo ahora los datos iniciales y resolviendo el sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas obtenemos $x= e^{-t} \cos t + t-2$.

Tratemos ahora la **estabilidad** de las soluciones del sistema [S]. Suponemos que **A** y **f** son continuas en $I=[t_o,\infty)$ con lo que todas las soluciones de [S] están definidas para todo $t \geq t_o$. Si **W**(t) es cualquier matriz fundamental y **x**(t), **x***(t) son dos soluciones

$$\| \mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^*(t) \| = \| \mathbf{W}(t)\mathbf{W}^{-1}(t_o)[\mathbf{x}(t_o)-\mathbf{x}^*(t_o)] \| \leq K \| \mathbf{W}(t) \| \| \mathbf{x}(t_o)-\mathbf{x}^*(t_o) \|$$

(sean cualesquiera las normas utilizadas, pues todas son equivalentes; por ejemplo, tomando como norma de W(t) la suma de los valores absolutos de sus elementos).

Por tanto, a semejanza de los que ocurría en las lineales de primer orden, se puede hablar de la estabilidad del sistema [S] pues, como se ve, todas sus soluciones tienen la misma estabilidad: serán **estables**, **asintóticamente estables** o **inestables** dependiendo de que, respectivamente, la norma de una **W**(t) **esté acotada**, **tienda a 0 cuando** $t\to\infty$ o **no esté acotada** . También se tiene como allí que la estabilidad no depende de **f**(t) y que, por tanto, cualquier solución tiene la estabilidad que tenga la solución trivial $\mathbf{x}\equiv\mathbf{0}$ como solución de la homogénea.

Para el caso de **coeficientes constantes** se tiene entonces el siguiente resultado:

Teor 7.

Si todos los autovalores de **A** tienen parte real negativa, el sistema [C] es asintóticamente estable

Si todos los autovalores de **A** tienen parte real menor o igual que 0 y para cada λ de multiplicidad m con $\text{Re}\,\lambda=0$ existen m vectores propios linealmente independientes, el sistema [C] es estable

En los demás casos, [C] es inestable

[los elementos de $\mathbf{W}(t)=e^{\mathbf{A}t}$ son exponenciales $e^{\lambda t}$ tal vez multiplicadas (si la **J** no es diagonal) por polinomios en t ; si $\text{Re}\,\lambda<0$ cada uno de estos elementos, y por tanto la norma de la matriz fundamental, tiende a 0 cuando $t\to\infty$; si hay λ con $\text{Re}\,\lambda=0$ y la **J** es diagonal hay términos que son constantes, senos o cosenos y permanecen acotados; si hay algún λ con $\text{Re}\,\lambda>0$ o si los términos provenientes de λ con $\text{Re}\,\lambda=0$ están multiplicados por polinomios la norma de la matriz no está acotada]

Así pues, la parte real de los autovalores nos informa sobre la estabilidad de un sistema (y por tanto de una ecuación) de coeficientes constantes. Pero el problema es que si n>2 los autovalores normalmente no son calculables (sin acudir a métodos numéricos). Sin embargo, el siguiente teorema (criterio de Routh-Hurwitz) nos precisa, sin necesidad de determinar los autovalores, cuando hay estabilidad asintótica.

Teor 8.

Sea $P(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+...+a_{n-1}\lambda+a_n$.

i] Si algún $a_i\leq0$, existen raíces de $P(\lambda)$ con parte real mayor o igual que 0

ii] Consideremos la matriz nxn : $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}$

Entonces todos los ceros de $P(\lambda)$ tienen parte real negativa si y sólo si son positivos los n determinantes $|a_1|$, $\begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}$, ..., $|\mathbf{B}|$

Ej 6. Aunque no hubiésemos sabido hallar los autovalores del ejemplo 5 podríamos determinar su estabilidad. Se tenía $\lambda^4+4\lambda^3+8\lambda^3+8\lambda+4=0$. Construimos:

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}4&1&0&0\\8&8&4&1\\0&4&8&8\\0&0&0&4\end{pmatrix}.\ \text{Como}\quad 4\ ,\ \begin{vmatrix}4&1\\8&8\end{vmatrix}=24\ ,\ \begin{vmatrix}4&1&0\\8&8&4\\0&4&8\end{vmatrix}=128\ ,\ |\mathbf{B}|=512$$

son todos positivos la ecuación es asintóticamente estable.

Ej 7. La ecuación $\boxed{x^{vi}+5x^{v}+6x^{iv}+7x'''+2x'+3x=0}$ no es asintóticamente estable (aunque no podamos saber si es estable a secas o inestable) porque en su ecuación característica es 0 el coeficiente de λ^2.

Ej 8. $\boxed{x^{vi}+5x^{v}+6x^{iv}+7x'''+2x''=0}$ tampoco es asintóticamente estable. Pero como $\lambda=0$ es autovalor doble la solución es de la forma $c_1+c_2t+c_3x_3+c_4x_4+c_5x_5+c_6x_6$ y la ecuación es inestable pues no está acotada la matriz fundamental formada por esas 6 soluciones y sus 5 primeras derivadas (para las ecuaciones siempre es fácil, sin calcular vectores propios, ver lo que ocurre si hay λ con Re $\lambda=0$)

Ej 9. $\boxed{x'''+2x''+4x'+8x=\text{sen}(t-7)}$, de ecuación característica $\lambda^3+2\lambda^2+4\lambda+8=0$, no es asintóticamente estable pues $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\8&4&2\\0&0&8\end{pmatrix}\ \to\ 2\ ,\ \begin{vmatrix}2&1\\8&4\end{vmatrix}=0\ ,\ |\mathbf{B}|=0$

En este caso podemos hallar los autovalores: $\lambda=\pm2i$, $\lambda=-2$ y comprobar que la ecuación es estable, aunque no asintóticamente (los de Re $\lambda=0$ son simples)

Ej 10. $\boxed{\mathbf{x}'=\begin{pmatrix}0&0&1\\-3&-1&-2\\0&1&0\end{pmatrix}\mathbf{x}}$ tiene por ecuación característica $\lambda^3+\lambda^2+2\lambda+3=0$. No es asintóticamente estable pues $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&1&0\\3&2&1\\0&0&3\end{pmatrix}\ \to\ 1>0$, pero $\begin{vmatrix}1&1\\3&2\end{vmatrix}<0\ ,\ |\mathbf{B}|<0$

No hay forma fácil de calcular los autovalores. Veamos si los hay con Re$\lambda=0$: $\lambda=\pm qi$. Debe ser $iq(2-q^2)+(3-q^2)=0$. Como esto no es posible para ningún q y sabemos que debe haber λ con Re $\lambda\geq0$ $\to$ existen λ con Re $\lambda>0$ $\to$ es inestable.

Ej 11. $\boxed{t^3x''-tx'+x=1}$ (ejemplo 6 de 2.2)

Es lineal, pero no tiene coeficientes constantes. Pero como vimos que la solución de la homogénea era $x=c_1t+c_2te^{-1/t}$, una matriz fundamental es $\begin{pmatrix}t&te^{-1/t}\\1&(1+t^{-1})e^{-1/t}\end{pmatrix}$ cuya norma es, evidentemente, no acotada. La ecuación es inestable.

2.4 Transformada de Laplace

Sea f(t) una función continua a trozos en $[0,\infty)$. Se llama **transformada de Laplace** de f a la función $Lf = F$ definida por

$$\boxed{F(s)=\int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt} \qquad \text{para todo } s \text{ tal que la integral converge.}$$

Enunciamos, con pocas precisiones teóricas y sin demostraciones (la mayoría son simples ejercicios de integración), algunas de sus propiedades.

El operador $L: f \longrightarrow F$ es claramente lineal. Dada una F(s) puede que no exista una f(t) tal que $L[f] = F$, pero si existe hay una única f que es continua. Podemos, pues, definir el operador $L^{-1}: F \longrightarrow f$. A $L^{-1}[F] = f$ le llamaremos **transformada inversa** de Laplace de F. Está claro que también L^{-1} es lineal.

Lo básico para resolver ecuaciones es el hecho de que la L transforma las derivadas de una x(t) en una expresión en la que no aparecen las derivadas de X(s) :

Teor 1. $$\boxed{L\big[x^{(n)}(t)\big] = s^n X(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}x'(0) - \ldots - x^{(n-1)}(0)}$$

Necesitaremos también conocer la transformadas de las siguientes funciones:

Teor 2. $$\boxed{L[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \;\; ; \;\; L[e^{at}] = \frac{1}{s-a} \;\; ; \;\; L[\operatorname{sen} at] = \frac{a}{s^2+a^2} \;\; ; \;\; L[\cos at] = \frac{s}{s^2+a^2}}$$

Y las siguientes reglas para calcular otras transformadas a partir de ellas:

Teor 3. $$\boxed{L\big[e^{at} f(t)\big] = F(s-a) \;\; , \;\; L\big[t^n f(t)\big] = (-1)^n F^{(n)}(s)}$$

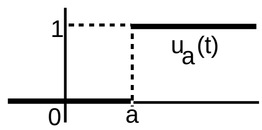
La transformada de un producto no es el producto de las transformadas. Pero se tiene:

Teor 4.

> Se llama **convolución** de f y g a la función $f*g\,(t) = \int_0^t f(t-u)\, g(u)\, du$.
> Se tiene que $f*g = g*f$ y que $L[f*g] = L[f]L[g]$

Especial interés posee la L para resolver ecuaciones en las que aparecen funciones discontinuas, como la **función paso** $u_a(t)$, definida como

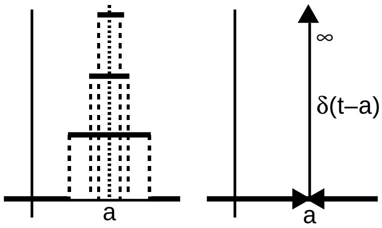
$$u_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<a \\ 1 & \text{si } t\geq a \end{cases}$$



o la “función” **delta** $\delta(t-a)$, cuya definición rigurosa exigiría acudir a la teoría de distribuciones, pero con la que no es difícil trabajar formalmente.

La $\delta(t-a)$ se puede definir intuitivamente como el "límite" cuando n tiende a ∞ de

$$f_n(t) = \begin{cases} n \text{ si } t\in[a-1/2n, a+1/2n] \\ 0 \text{ en el resto} \end{cases}$$



Este objeto matemático tiene las propiedades:

$$\delta(t-a) = 0 \text{ si } t\neq a \,; \qquad \frac{d}{dt}u_a(t) = \delta(t-a) \;;$$

$$\int_b^c f(t)\,\delta(t-a)\,dt = \begin{cases} f(a) \text{ si } a\in[b,c] \\ 0 \text{ si } a\notin[b,c] \end{cases}$$

De estas definiciones se deduce fácilmente:

Teor 5. $\boxed{\text{Si } a>0:\ L[u_a(t)] = \frac{1}{s}e^{-as} \ ,\ L[\delta(t-a)] = e^{-as}}$

Por último necesitaremos:

Teor 6. $\boxed{L[u_a(t)\,f(t-a)] = e^{-as}F(s) \ ,\ a>0}$

Con estos resultados es posible resolver un gran número de ecuaciones y sistemas lineales con **coeficientes constantes** (aquellos en que el término no homogéneo esté escrito a base de polinomios, exponenciales, senos y cosenos; es decir, los mismos en que se puede aplicar coeficientes indeterminados). Aplicando el operador L convertiremos el problema diferencial en otro algebraico. Resuelto éste se tratará simplemente de calcular alguna transformada inversa.

Ej 1. $\boxed{x^{iv}+4x'''+8x''+8x'+4x=4t \text{ con } x(0)=-1, x'(0)=0, x''(0)=0, x'''(0)=2}$ (ejemplo 5 de 2.3)

Aplicando L a ambos miembros y utilizando su linealidad tenemos:

$$L[x^{iv}]+4L[x''']+8L[x'']+8L[x']+4L[x] = s^4X+s^3-2+4s^3X+4s^2+8s^2X+8s+8sX+8+4X = \frac{4}{s^2} = L[4t]$$

Despejando, $X = \dfrac{-s^5-4s^4-8s^3-6s^2+4}{s^2[s^4+4s^3+8s^2+8s+4]}$.

Ahora **para calcular la** $L^{-1}[X]$ **descompondremos en fracciones simples**. Necesitamos calcular las raíces del denominador (y para ello debemos poder resolver la ecuación característica de la ecuación, que en general, como en este ejemplo, será un factor de dicho denominador). La descomposición es:

$$\frac{-s^5-4s^4-8s^3-6s^2+4}{s^2[s^2+2s+2]^2} = \frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{Cs+D}{s^2+2s+2}+\frac{Es+F}{[s^2+2s+2]^2} = \frac{-2}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{s+1}{s^2+2s+2}$$

una vez resuelto el largo sistema de 6 ecuaciones con 6 incógnitas. Para la única L^{-1} no inmediata, completamos el cuadrado del denominador y utilizamos el teorema 3

$$L^{-1}\Big[\frac{s+1}{s^2+2s+2}\Big] = L^{-1}\Big[\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\Big] = e^{-t}L^{-1}\Big[\frac{s}{s^2+1}\Big] = e^{-t}\cos t$$

Por la linealidad de L^{-1} tenemos por fin: $x = L^{-1}[X] = -2 + t + e^{-t}\cos t$

[con la L hemos calculado la solución del problema directamente, ahorrándonos el proceso de cálculo de la solución general, de una particular y la determinación de las constantes arbitrarias a partir de los datos iniciales; a cambio, hemos tenido que sufrir la descomposición en fracciones simples]

Ej 2. $\boxed{\begin{array}{ll} x'=2y-2e^{2t} & x(0)=0 \\ y'=-2x+4y-2 & y(0)=1 \end{array}}$ $\rightarrow$ $\begin{array}{l} sX=2Y-\frac{2}{s-2} \\ sY-1=-2X+4Y-\frac{2}{s} \end{array}$ $\rightarrow$ $Y=\frac{s}{2}X+\frac{1}{s-2}$ $\rightarrow$ $X=\frac{8}{(s-2)^3 s}$

Descomponiendo $\frac{8}{(s-2)^3 s}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-2}+\frac{C}{(s-2)^2}+\frac{D}{(s-2)^3}$ se obtiene A=–1, B=1, C=–2, D=4 .

Por tanto $x=-1+e^{2t}-2te^{2t}+2t^2e^{2t}$, puesto que $L^{-1}[\frac{1}{(s-a)^k}]=e^{at}L^{-1}[\frac{1}{s^k}]=e^{at}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$

Podríamos calcular x mediante una convolución pues X es el producto de dos transformadas conocidas:

$$L^{-1}[X]=4\,L^{-1}[\tfrac{1}{s}]\,L^{-1}[\tfrac{2}{(s-2)^3}]=4\,[1*t^2e^{2t}]=4\int_0^t u^2\,e^{2u}\,du$$

[normalmente este segundo camino no es viable y será preferible, aunque lo sea, la descomposición en fracciones simples; deberemos acudir a la convolución para invertir fracciones simples cuyos denominadores sean polinomios de segundo orden, sin raíces reales, elevados a un exponente]

Una vez calculada la x podemos calcular la y a partir de : $y=e^{2t}+\frac{x'}{2}=e^{2t}+2t^2e^{2t}$.

También podríamos (aunque usualmente es más largo) hallar la Y y calcular su transformada inversa. En nuestro caso: $Y=\frac{1}{s-2}+\frac{4}{(s-2)^3}$ y se llega a lo mismo.

Ej 3. $\boxed{x'''+x=f(t)=\begin{cases} 6t \text{ si } 0\le t<1 \\ 0 \text{ si } 1\le t \end{cases} \quad \text{con } x(0)=-1\,,x'(0)=3\,,x''(0)=-6}$

Para calcular la $L[f(t)]=6\,L[t-t\,u_1(t)]$ podemos aplicar el teorema 3 o el 6:

$L[tu_1]=-\frac{d}{ds}[Lu_1]=-\frac{d}{ds}[\frac{e^{-s}}{s}]=e^{-s}[\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}]$ ó $L[(t-1)u_1+u_1]=e^{-s}L[t]+[Lu_1]=e^{-s}[\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}]$

y por tanto $s^3X+s^2-3s+6+s^2X+s-3=\frac{6}{s^2}-6e^{-s}\frac{s+1}{s^2}$ $\rightarrow$ $X=\frac{-s^4+2s^3-3s^2+6}{(s+1)s^4}-e^{-s}\frac{6}{s^4}$

La descomposición del primer sumando es $-\frac{1}{s}+\frac{3}{s^2}-\frac{6}{s^3}+\frac{6}{s^4}$.

Para invertir el segundo, del teorema 6 se tiene $L^{-1}[e^{-as}F(s)]=u_a(t)\,f(t-a)$, con lo que:

$$L^{-1}[\tfrac{6}{s^4}]=t^3\rightarrow L^{-1}[e^{-s}\tfrac{6}{s^4}]=u_1(t)\,(t-1)^3$$

Así pues, $x=-1+3t-3t^2+t^3-u_1(t)\,(t-1)^3=\begin{cases}(t-1)^3 & \text{si } t\le 1 \\ 0 & \text{si } t\ge 1\end{cases}$.

Resolvamos el problema de otra forma totalmente diferente. Hallamos la solución general x_1 para t≤1 [f(t)=6t] y x_2 para t≥1 [f(t)=0] y utilizamos el hecho de que como f es una función integrable la solución va a tener dos (pero no tres) derivadas continuas en t=1 (resolver una ecuación de tercer orden viene a equivaler a integrar tres veces; no será pues, estrictamente hablado, solución en t=1).

En el primer intervalo $x_p=At^2+Bt^3$ $\rightarrow$ $x_p=t^3-3t^2$ $\rightarrow$ $x_1=c_1+c_2t+c_3e^{-t}+t^3-3t^2$

Imponiendo los datos iniciales en 0 se obtiene $c_1=-1,c_2=3,c_3=0$ $\rightarrow$ $x_1=(t-1)^3$, t≤1.

La solución general a partir de t=1 es $x_2=c_1+c_2t+c_3e^{-t}$.

No tiene sentido aplicarle los datos iniciales en 0. Pero por ser de clase 2 los valores de x, x' y x" a la derecha de t=1 han de coincidir con los que da x_1 a la izquierda.

Imponemos pues a x_2 que $x_2(1)=x_1(1)=0$, $x_2'(1)=x_1'(1)=0$,$x_2''(1)=x_1''(1)=0$ $\rightarrow$ $x_2\equiv 0$, si t≥1 .

Ej 4. $\boxed{\begin{array}{ll} x'=-x+e^{-1}\delta(t-1) & x(0)=0 \\ y'=x-y & y(0)=1 \end{array}}$ $\to$ $\begin{array}{l} sX=-X+e^{-1}e^{-s} \\ sY-1=X-Y \end{array}$ $\to$ $\begin{array}{l} X=e^{-1}\dfrac{e^{-s}}{s+1} \\ Y=\dfrac{1}{s+1}+e^{-1}\dfrac{e^{-s}}{(s+1)^2} \end{array}$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]=e^{-t}\ ,\ L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2}\right]=te^{-t}\ \to\ L^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s+1}\right]=u_1(t)e^{-t+1}\ ,\ L^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{(s+1)^2}\right]=u_1(t)(t-1)e^{-t+1}$$

$$\to\quad x=u_1(t)\,e^{-t}=\begin{cases}0 & \text{si } t\le 1\\ e^{-t} & \text{si } t\ge 1\end{cases}\quad,\quad y=e^{-t}+u_1(t)(t-1)e^{-t}=\begin{cases}e^{-t} & \text{si } t\le 1\\ te^{-t} & \text{si } t\ge 1\end{cases}$$

(observemos que la x ha salido discontinua en t=1 como debía ocurrir para que su derivada pudiera ser una δ ; rigurosamente no es pues solución en ese punto).

Resolvamos el problema por otros caminos. Como la matriz del sistema ya está en forma de Jordan

$$\mathbf{x}(t)=e^{-t}\begin{pmatrix}1&0\\t&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\int_0^t e^{s-t}\begin{pmatrix}1&0\\t-s&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-1}\delta(s-1)\\0\end{pmatrix}ds=\begin{pmatrix}0\\e^{-t}\end{pmatrix}+e^{-1}\int_0^t\begin{pmatrix}e^{s-t}\\(t-s)e^{s-t}\end{pmatrix}\delta(s-1)\,ds$$

la integral es **0** si $t<1$ y $\begin{pmatrix}e^{1-t}\\(t-1)e^{1-t}\end{pmatrix}$ si $t\ge 1$, por tanto: $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}0\\e^{-t}\end{pmatrix}$ si $t<1$, $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}e^{-t}\\te^{-t}\end{pmatrix}$ si $t\ge 1$.

Más formas de resolverlo sin transformadas. La primera ecuación sólo contiene x. Podríamos haberla resuelto directamente de una de las dos siguientes formas:

Como la solución es $x=c_1e^{-t}$ tanto para $t<1$ como para $t>1$ y la x debe tener en $t=1$ un salto de altura e^{-1} para que al derivarla aparezca la $e^{-1}\delta(t-1)$:
$x(0)=0\ \to\ x\equiv 0$ si $t<1\to x(1^-)=0\ \to x(1^+)=e^{-1}\to\ x=e^{-t}$ si $t>1$

Aplicando la fórmula de variación de las constantes para ecuaciones de primer orden (la cosa funciona, aunque la demostramos para funciones continuas):

$$x=e^{-t}\int_0^t e^{-s}e^{-1}\,\delta(s-1)\,ds=\begin{cases}0 & \text{si } t<1\\ e^{-t}e^{1}e^{-1}=e^{-t} & \text{si } t\ge 1\end{cases}$$

Llevando esta x a la segunda ecuación: $y'=-y+u_1(t)\,e^{-t}$ que podemos resolver:

$y=c_1e^{-t}$ si $t<1$ con $y(0)=1\ \to\ y=e^{-t}$ si $t<1\ \to\ y(1^-)=e^{-1}$
$y_p=Ate^{-t}\to y_p=te^{-t}\to\ y=c_1e^{-t}+te^{-t}$ si $t\ge 1$ con $y(1^+)=e^{-1}$ (y continua) $\to\ y=te^{-t}$ si $t\ge 1$

O bien: $y=e^{-t}+e^{-t}\int_0^t e^{s}e^{-s}\,u_1(s)\,ds=\begin{cases}e^{-t} & \text{si } t<1\\ e^{-t}+e^{-t}\int_0^t 1\,ds=te^{-t} & \text{si } t\ge 1\end{cases}$

2.5 Soluciones periódicas de ecuaciones lineales

Consideremos el sistema [S] $\boxed{\mathbf{x}'=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}+\mathbf{f}(t)}$ con **A** y **f** continuas y de periodo T [es decir, $\mathbf{A}(t+T)=\mathbf{A}(t)$; $\mathbf{f}(t+T)=\mathbf{f}(t)$] (sus soluciones son únicas y están definidas para todo t).

Teor 1. $\boxed{\mathbf{x}(t) \text{ , solución de [S] , es de periodo T } \Leftrightarrow \mathbf{x}(0)=\mathbf{x}(T)}$

La $\Rightarrow$ es trivial. La otra implicación no es cierta, evidentemente, para funciones cualesquiera, pero esa condición es suficiente para las soluciones del sistema [S]:
Sea $\mathbf{x}(t)$ solución de [S] con $\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}(T)$ .Entonces $\mathbf{z}(t)=\mathbf{x}(t+T)$ es también solución [pues $\mathbf{z}'(t)=\mathbf{x}'(t+T)=\mathbf{A}(t+T)\mathbf{x}(t+T)+\mathbf{f}(t+T)=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t+T)+\mathbf{f}(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{z}(t)+\mathbf{f}(t)$] y satisface $\mathbf{z}(0)=\mathbf{x}(T)=\mathbf{x}(0)$. Por unicidad, $\mathbf{z}(t)=\mathbf{x}(t+T)=\mathbf{x}(t)$ para todo T.

Teor 2. El sistema homogéneo tiene como única solución T-periódica la trivial $\mathbf{x}\equiv 0 \Leftrightarrow$ el sistema [S] tiene una única solución T-periódica

Sea $\mathbf{x}(t)=\mathbf{W}(t)\mathbf{c}+\mathbf{x_p}(t)$ la solución general de [S]. Por el teorema 1, $\mathbf{x}(t)$ es T-periódica si y sólo si $[\mathbf{W}(0)-\mathbf{W}(T)]\mathbf{c}=\mathbf{x_p}(T)-\mathbf{x_p}(0)$. Este sistema algebraico tiene solución única si y sólo si el sistema homogéneo $[\mathbf{W}(0)-\mathbf{W}(T)]\mathbf{c}=\mathbf{0}$ tiene sólo la solución $\mathbf{c}=\mathbf{0}$ y esto equivale a que el sistema homogéneo tenga sólo $\mathbf{x}\equiv 0$ como solución T-periódica.

Si el sistema homogéneo tiene otras soluciones periódicas la situación se complica. Para precisar lo que ocurre es necesario conocer las soluciones del homogéneo, lo que en general no se puede. Nos limitamos a considerar dos casos particulares:

Sean [1] $\boxed{x'=a(t)x}$ y [2] $\boxed{x'=a(t)x+f(t)}$, con a y f continuas y de periodo T.

Teor 3.

i] [1] tiene como **única** solución T-periódica la trivial $\Leftrightarrow \int_0^T a(t)dt \neq 0$

ii] Si [1] tiene **todas** sus soluciones T-periódicas $\left[\int_0^T a(t)dt = 0\right] \Rightarrow$

a] Si $\int_0^T e^{-\int_0^s a(u)du} f(s)ds=0$ **todas** las soluciones de [2] son T-periódicas

b] Si la integral no es 0, **ninguna** solucion de [2] es T-periódica

i] $x(t) = Ce^{\int_0^t a}$ es T-periódica para todo c $\Leftrightarrow x(T)=x(0) \Leftrightarrow \int_0^T a(t)dt = 0$

Si esta última integral no es 0 la única solución periódica se tiene para c=0 .

ii] x(t) solución de [2] es T-periódica $\Leftrightarrow x(T)=x(0) \Leftrightarrow x(0)[1-e^{\int_0^T a}] = e^{\int_0^T a}\int_0^T e^{-\int_0^s a} f ds$,

de donde se sigue inmediatamente el resultado del teorema.

Ej 1. $\boxed{x'=e^{\cos t}x+\operatorname{sen}^3 t}$ Como $\int_0^{2\pi} e^{\cos t}dt \neq 0$ la ecuación homogénea tiene sólo la solución periódica trivial y la no homogénea tiene una única solución 2π-periódica.

Ej 2. $\boxed{x'=ax+f(t) \text{ , } f(t+T)=f(t)}$ Si $a\neq 0$ tiene una única solución T-periódica.

Si a=0, la homogénea tiene todas T-periódicas ($x\equiv c$) y la no homogénea $x'=f(t)$ tiene todas sus soluciones T-periódicas si $\int_0^T f(t)dt=0$ o ninguna en caso contrario.
(La primitiva de una función periódica es periódica si y sólo si su promedio es 0)

Consideremos ahora [c] $\boxed{x''+ax'+bx=f(t)}$ con f continua y T-periódica.

Sabemos por la sección 2.2 que la homogénea [ch] tiene soluciones periódicas no tiviales si y sólo si existen autovalores de la forma $\lambda=\pm qi$:

Si a=0 y b>0 ($\lambda=\pm\sqrt{b}\,i$) la solución general es $x=c_1\cos\sqrt{b}\,t+c_2\,\mathrm{sen}\sqrt{b}\,t$, y todas las soluciones son periódicas de periodo mínimo $2\pi/\sqrt{b}$ (no tienen que ser de periodo T).

Si b=0 (al menos un $\lambda=0$) la solución es $x=c_1+c_2x_2$ con x_2 no periódica, y existen soluciones de cualquier periodo (aunque no todas sean periódicas).

El teorema 2 asegura que [c] tiene una **única** solución T-periódica cuando [ch] tiene como **única** solución T-periódica la trivial. Además:

Teor 4.

i] Si a=0 , b>0 y $T=2\pi n/\sqrt{b}$ para algún $n\in\mathbf{N}$

(**todas** las soluciones de [ch] son T-periódicas) entonces:

a] Si $\int_0^T f(t)\cos\sqrt{b}\,t\,dt=\int_0^T f(t)\,\mathrm{sen}\sqrt{b}\,t\,dt=0$, **toda** solucion de [c] es T-periódica

b] Si alguna de las integrales no es 0, **ninguna** solución de [c] es T-periódica

ii] Si b=0 (**infinitas** soluciones de [ch], no todas, son T-periódicas) entonces

a] Si $\int_0^T f(t)\,dt=0$ existen **infinitas** soluciones T-periódicas de [c] (no todas)

b] Si la integral no es 0, **ninguna** solución de [c] es T-periódica

i] La fórmula de variación de las constantes nos da la solución general de [c] :

$$x=c_1\cos\sqrt{b}\,t+c_2\,\mathrm{sen}\sqrt{b}\,t+\frac{1}{\sqrt{b}}\,\mathrm{sen}\sqrt{b}\,t\int_0^t f(s)\cos\sqrt{b}\,s\,ds-\frac{1}{\sqrt{b}}\cos\sqrt{b}\,t\int_0^t f(s)\,\mathrm{sen}\sqrt{b}\,s\,ds$$

Entonces, $x(T)-x(0)=-\frac{1}{\sqrt{b}}\int_0^T f(s)\,\mathrm{sen}\sqrt{b}\,s\,ds$ y $x'(T)-x'(0)=\int_0^T f(s)\cos\sqrt{b}\,s\,ds$

El teorema 1 asegura que si las dos integrales son 0 cualquier x es T-periódica. Si alguna no es 0, no hay soluciones T-periódicas.

ii] En este caso, si $a\neq 0$: $x=c_1+c_2e^{-at}+\frac{1}{a}\int_0^t f(s)\,ds-\frac{1}{a}\,e^{-at}\int_0^t f(s)\,e^{as}\,ds$. Debe ser:

$$x(T)-x(0)=c_2\left[e^{-aT}-1\right]+\frac{1}{a}\int_0^T f(s)\,ds-\frac{1}{a}\,e^{-aT}\int_0^T f(s)\,e^{as}\,ds=0$$

$$x'(T)-x'(0)=-ac_2\left[e^{-aT}-1\right]+e^{-aT}\int_0^T f(s)\,e^{as}\,ds=0$$

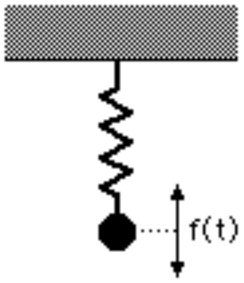
Para que exista c_2 satisfaciendo ambas igualdades es necesario y suficiente que $\int_0^T f=0$.

Si también a=0 : $x=c_1+c_2\,t+t\int_0^t f(s)\,ds-\int_0^t s\,f(s)\,ds$. Ahora debe cumplirse:

$$x(T)-x(0)=c_2T+T\int_0^T f(s)\,ds-\int_0^T s\,f(s)\,ds=0 \quad \text{y} \quad x'(T)-x'(0)=\int_0^T f(s)\,ds=0$$

De nuevo existe c_2 que satisface el sistema (cualquiera que sea c_1) si y solo si $\int_0^T f=0$.

Ej 3. Si **b>0** y **a≥0** le ecuación [c] puede describir un sistema muelle-masa con rozamiento (si a>0) proporcional a la velocidad, sometido a una fuerza externa de periodo T. El x representa entonces la separación de la masa de la posición de equilibrio. ¿En qué condiciones es el movimiento de la masa de periodo T?



Si **a>0**, los autovalores tienen parte real menor que 0, con lo que la ecuación no homogénea tiene una única solución T-periódica. Como hay estabilidad asintótica todas las soluciones se acercarán a la periódica, con lo que, en la práctica, se verá al cabo del tiempo oscilar a la masa con el periodo de la fuerza externa (de hecho, matemáticamente, el movimiento no es periódico, pues, salvo que los datos iniciales me proporcionen la única solución periódica, existen otros términos conteniendo exponenciales decrecientes).

Si **a=0** (no hay rozamiento), la situación puede ser más complicada. Supongamos por comodidad que b=1 [la ecuación es [d] $x''+x=f(t)$ y $x=c_1\cos t+c_2 \,\mathrm{sen}\, t+x_p$ es su solución] e impongamos fuerzas externas periódicas de diferentes tipos:

$f(t)=\mathrm{sen}^5(\pi t)$. Su periodo mínimo es 2. Como la homogénea no tiene soluciones de ese periodo (salvo $x\equiv 0$) hay una única solución 2-periódica de [d]. Sólo para aquellos datos iniciales que nos den $c_1=c_2=0$ obtendremos esa solución de periodo 2. Las demás soluciones serán sumas de funciones de diferentes periodos y no serán periódicas (ni siquiera asintóticamente).

$f(t)=\cos t$. De periodo mínimo 2π. Como las soluciones de la homogénea son todas de ese mismo periodo es necesario evaluar las integrales:

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}\, t \cos t \, dt = 0 \quad , \quad \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = 0$$

con lo que [d] no tiene soluciones 2π-periódicas. Podemos, en este caso, hallar una y_p por coeficientes indeterminados: $x_p= t \,\mathrm{sen}\, t /2$, y comprobar que todas las soluciones oscilan con creciente amplitud (resonancia).

$f(t)=e^{\mathrm{sen}\, t}$. Periodo mínimo 2π. Ahora hay que ver si son 0 las integrales:

$$\int_0^{2\pi} e^{\mathrm{sen}\, t} \,\mathrm{sen}\, t \, dt = 0 \quad \text{y} \quad \int_0^{2\pi} e^{\mathrm{sen}\, t} \cos t \, dt = 0$$

La segunda se calcula fácilmente: es 0. La otra no tiene primitiva elemental. Sin embargo analizando la gráfica del integrando (o numéricamente) es fácil ver que no se anula. No hay por tanto soluciones 2π-periódicas (ni de otro periodo porque la segunda integral es no nula en cualquier intervalo $[0,2k\pi]$). Y en este caso no podríamos hallar explícitamente la solución (si lo intentásemos por variación de constantes nos encontraríamos la integral de antes).

$f(t)=\mathrm{sen}^2 t$. Periodo mínimo π. Hay una única solución de [d] de periodo π porque la homogénea no tiene soluciones no triviales de ese periodo. Como

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^3 t \, dt = 0 \quad , \quad \int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^2 t \cos t \, dt = 0$$

todas son 2π-periódicas, aunque para afirmarlo no era preciso evaluar esas integrales: si y_p es de periodo π todas las $c_1\cos t+c_2 \,\mathrm{sen}\, t+x_p$ son de periodo 2π pues y_p también lo es (de modo similar se probaría que si $T/2\pi=m/n$ es racional, pero no entero, existen infinitas soluciones de [d] de periodo nT)

$f(t)=\mathrm{sen}(2t)$ si $t\in[2k\pi,(2k+1)\pi]$, $k\in\mathbf{Z}$ y 0 en el resto. Tiene periodo mínimo 2π. Como

$$\int_0^{2\pi} f(t) \,\mathrm{sen}\, t \, dt = \int_0^{\pi} \mathrm{sen}\, 2t \,\mathrm{sen}\, t \, dt = 0 \quad , \quad \int_0^{2\pi} f(t) \cos t \, dt = \int_0^{\pi} \mathrm{sen}\, 2t \cos t \, dt = 0$$

la masa se mueve periódicamente para cualquier posición y velocidad iniciales a pesar de aplicarle una fuerza del mismo periodo que el libre del muelle.