3. Soluciones por medio de series

En el capítulo anterior vimos las escasas formas de resolver elementalmente la ecuación con coeficientes variables [e] $x''+a(t)x'+b(t)x=0$. Este capítulo trata una forma general de atacarla: suponer la solución desarrollada en serie de potencias e introducir esta serie en la ecuación para determinar sus coeficientes.

Si a y b son analíticas siempre se podrán encontrar dos soluciones linealmente independientes en forma de serie por este camino (sección 3.1): llevando la serie a la ecuación conseguiremos expresar todos sus coeficientes c_k en función de los dos primeros c_0 y c_1 , que serán las dos constantes arbitrarias que aparecen en la solución de cualquier ecuación de segundo orden. Un teorema, que aceptaremos sin demostración, nos asegurará que las series solución son convergentes al menos en el intervalo en que a y b lo eran.

Si a y b no son analíticas, pero "poco", también se pueden utilizar series para resolver [e] de una forma sólo algo más complicada (es el método de Frobenius de la sección 3.2). Calcularemos primero una solución x_1 que será siempre de la forma $t^r \sum$ y posteriormente otra x_2 linealmente independiente, que unas veces será del mismo tipo y otras contendrá además un término incluyendo el $\ln t$. De nuevo un teorema no demostrado garantizará la convergencia de las series que vayan apareciendo.

Los cálculos de los coeficientes de las series son sencillos (aunque algo pesados). El problema básico de la utilización de series para la resolución de ecuaciones es la dificultad de obtener información sobre las soluciones obtenidas (y más cuando, en ocasiones, no podremos hallar siquiera su término general). Sin embargo ecuaciones del tipo [e] surgen a menudo en problemas físicos y las series son el único instrumento para resolverlas. Por eso existen libros enteros (los de funciones especiales de la física) dedicados a estudiar las propiedades de las series solución de algunas de estas ecuaciones (las de Legendre, Bessel, Hermite, Laguerre, Tchebycheff, ...) . Una mínima muestra de tales estudios son las propiedades de las soluciones de las ecuaciones de Legendre y Bessel que se tratan, respectivamente, en las secciones 3.3 y 3.4 .

3.1 Puntos regulares

Sea la ecuación [e] $\boxed{x'' + a(t)x' + b(t)x = 0}$

Se dice que $t=t_o$ **es un punto regular de** [e] **si** a **y** b **son analíticas en** $t=t_o$. En caso contrario se dice que $t=t_o$ es **punto singular** de [e] .

[Recordemos que una función f(t) es analítica en un punto t_o si se puede escribir como una serie de potencias en un entorno de dicho punto. Para que lo sea, debe tener f infinitas derivadas en t_o , su serie de Taylor en t_o ha de tener un radio R de convergencia mayor que 0 y además ha de coincidir f(t) con la serie en $|t-t_o|<R$. Se sabe también que la mayoría de las funciones elementales son analíticas, y se suponen conocidos los desarrollos de e^t , sent , cost , log(1+t), $(1+t)^\alpha$, … en torno a t=0].

Supongamos que t=0 es regular y llamemos R al menor de los dos radios de convergencia de a y b . Para $|t|<R$ se podrá entonces escribir:

$$a(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k , \quad b(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$$

Si los coeficientes son analíticos, se puede esperar que cualquier solución de [e] también lo sea. De hecho se tiene el siguiente teorema que no demostramos:

Teor 1.

> Si t=0 es regular, la solución general de [e] es $x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k = c_0 x_1 + c_1 x_2$
>
> donde c_0 , c_1 son arbitrarios y x_1 , x_2 son soluciones de [e] que admiten desarrollos en serie convergentes, al menos, en el intervalo (-R,R). Además, los coeficientes c_k (para $k\geq 2$) , se pueden determinar de forma única en función de c_0 y c_1 llevando la serie de x a la ecuación [e] (con los coeficientes a(t) y b(t) desarrollados).
>
> -

[este último desarrollo, desde luego, no será necesario si a y b son polinomios].

Obtendremos entonces las soluciones en la forma $x_1=1+\Sigma$, $x_2= t+\Sigma$, donde estas series contendrán potencias de t mayores o iguales que 2. Las x_1 y x_2 así definidas serán soluciones de la ecuación satisfaciendo $x_1(0)=1$, $x_1'(0)=0$, $x_2(0)=0$, $x_2'(0)=1$, con lo que su wronskiano en 0 es no nulo y son linealmente independientes .

Si lo que queremos es la solución particular de [e] que satisface $x(0)=x_o$, $x'(0)=x_o'$ (que por ser a y b analiticas existe y es única) dada la forma de las series de x_1 y x_2 se tiene inmediatamente que debe ser $c_0=x_o$, $c_1=x_o'$.

Para estudiar las soluciones de [e] en un entorno de otro t_o que sea regular, el cambio de variable $s = t-t_o$ nos conduce a una ecuación en s para la que s=0 es regular. Aplicando lo anterior para hallar su solución obtenemos

$$x=\sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k \ , \quad \text{es decir} , \quad x=\sum_{k=0}^{\infty} c_k (t-t_o)^k \ .$$

En la práctica operaremos como en los ejemplos siguientes:

Ej 1. $\boxed{(1+t^2)x''+2tx'-2x = 0}$, es decir, $x'' + \frac{2t}{1+t^2}x' - \frac{2}{1+t^2}x = 0$

Las funciones $a(t) = 2t/(1+t^2)$ y $b(t) = -2/(1+t^2)$ son analíticas en para $|t|<1$.

[si P y Q son polinomios y $Q(0)\neq 0$, entonces P/Q, simplificados los factores comunes, admite un desarrollo cuyo R es la distancia al origen de la raíz (real o compleja) de Q más próxima; en el ejemplo el denominador se anula en $\pm i$ que distan 1 del origen].

Existen, pues, soluciones que son series convergentes al menos en $(-1,1)$. Como las series de potencias se pueden derivar término a término dentro de su intervalo de convergencia se tiene si $|t|<1$:

$$x=\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k = c_0+c_1t + c_2t^2+\ldots \to \ x'=\sum_{k=1}^{\infty} kc_kt^{k-1} = c_1+2c_2t+\ldots \to \ x''=\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_kt^{k-2} = 2c_2+\ldots$$

Llevamos estas series a la ecuación inicial (lo que es mucho más práctico que desarollar a y b) e intentamos escribir los c_k en funcion de c_0 y c_1.

$$\sum_{k=2}^{\infty}[k(k-1)c_kt^{k-2} + k(k-1)c_kt^k] + \sum_{k=1}^{\infty} 2kc_kt^k - \sum_{k=0}^{\infty} 2c_kt^k = 0 \ .$$

Para que ocurra esto es necesario que el coeficiente de cada potencia de t se anule (hay que tener cuidado con los primeros términos porque no todas las series empiezan a aportar términos para el mismo k):

t^0 : $2.1.c_2 - 2.c_0 = 0 \ \to \ c_2 = c_0$

t^1 : $3.2.c_3 + [2-2]c_1 = 0 \ \to \ c_3 = 0$

……………………………………………………

t^{k-2} : $k(k-1)c_k + [(k-2)(k-3)+2(k-2)-2]c_{k-2} = 0$

De esta última expresión deducimos la **regla de recurrencia** que nos proporciona el c_k en función de los anteriores ya conocidos (en este ejemplo, exclusivamente en función de c_{k-2}); factorizaremos los polinomios que aparezcan calculando sus raíces:

$$c_k = -\frac{k(k-3)}{k(k-1)}c_{k-2} = -\frac{k-3}{k-1}c_{k-2} \ , \ k=2,3,\ldots$$

Haciendo uso de esta regla calculamos algunos coeficientes más para facilitar la búsqueda de la expresión del término general:

$$c_4 = -\frac{1}{3}c_2 = -\frac{1}{3}c_0 \ , \quad c_6 = -\frac{3}{5}c_4 = \frac{1}{5}c_0 \ , \ \ldots \ \to \ c_{2k} = (-1)^{k+1}\frac{1}{2k-1}c_0 \ , \ k=1,2,\ldots$$

$c_5 = 0$ por estar en función de c_3 que se anulaba. Análogamente $c_7 = c_9 = \ldots = 0$

Por tanto la solución general es (sobre c_0 y c_1 no hay ninguna condición; quedan indeterminados como aseguraba el teorema):

$$x= c_0x_1+c_1x_2 = c_0\,[1+ t^2 - \frac{1}{3}t^4 + \frac{1}{5}t^6+\ldots] + c_1t = c_0\,[1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{t^{2k}}{2k-1}] + c_1t$$

El teorema predecía que las series solución convergerían al menos en $(-1,1)$. Esto es lo que sucede. La serie de x_1 (como se puede ver por el criterio del cociente) tiene $R=1$. La "serie" de x_2 (truncada a partir de su segundo término) converge para todo t.

[Esta ecuación se podía haber resuelto sin usar series. Era fácil darse cuenta de que $x_2= t$ era una solución, y podríamos haber calculado la x_1 siguiendo la sección 2.2:

$$x_1 = t\int t^{-2}e^{-\int\frac{2t}{1+t^2}}dt = t\int t^{-2}(1+t^2)^{-1}dt = -1 - \arctan t$$

cuyo desarrollo, salvo el signo, coincide con el obtenido por anteriormente].

Hemos tenido mucha suerte en el ejemplo 1 encontrando una regla de recurrencia tan sencilla y pudiendo expresar el término general. Esto no sucede siempre como nos muestra el segundo ejemplo:

Ej 2. $\boxed{x''+(t-2)x=0\ ,\ x(0)=2,\ x'(0)=1}$

Ahora $a(t)=0$ y $b(t)=t-2$ son analíticas en todo R, así como sus soluciones $x=\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$.

Llevando x y sus derivadas a la ecuación:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k t^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} [\, c_k t^{k+1} - 2c_k t^k \,] = 0 \ .$$

Igualando a 0 los coeficientes de las diferentes potencias de t :

$t^0 :\ 2.1.c_2 - 2.c_0 = 0 \ \ \rightarrow\ c_2 = c_0$

$t^1 :\ 3.2.c_3 + c_0 - 2.c_1 = 0 \ \ \rightarrow\ c_3 = -\frac{1}{6}c_0 + \frac{1}{3}c_1$

....

$t^{k-2} :\ k(k-1)c_k + c_{k-3} - 2c_{k-2} = 0 \ \rightarrow\ c_k = -\frac{1}{k(k-1)}c_{k-3} + \frac{2}{k(k-1)}c_{k-2}\ ,\ \ k=3,4,\ldots$

regla de recurrencia de tres términos que suele traer muchos más problemas que las de dos.

Escribimos un par de términos más en función de c_0 y c_1 :

$c_4 = -\frac{1}{12}c_1 + \frac{2}{12}c_2 = \frac{1}{6}c_0 - \frac{1}{12}c_1$

$c_5 = -\frac{1}{20}c_2 + \frac{2}{20}c_3 = -\frac{1}{15}c_0 + \frac{1}{30}c_1$

No hay forma de encontrar la expresión del término general, aunque paso a paso podemos ir calculando el número de términos que queramos.

La solución general es entonces:

$$x = c_0 [\, 1 + t^2 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{6}t^4 - \frac{1}{15}t^5 + \ldots \,] \ + \ c_1 [\, t + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{30}t^5 + \ldots \,]$$

Y la solución particular $x = 2 + t + 2t^2 + \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{10}t^5 + \ldots$, serie convergente para todo t .

3.2 Puntos singulares regulares

Supondremos en esta sección que $t=t_o$ es un punto singular de [e] $x''+a(t)x'+b(t)x=0$, es decir, que o $a(t)$ o $b(t)$ o las dos no son analíticas en $t=t_o$, con lo que no es aplicable el método de la sección anterior. Sin embargo, interesa en muchas ocasiones conocer el comportamiento de las soluciones de [e] precisamente en las proximidades de sus puntos singulares. En general se podrá decir poco sobre este comportamiento, salvo para un tipo particular de puntos sólo debilmente singulares: los singulares regulares.

t_o **es punto singular regular de** [e] **si** $(t-t_o)a(t)$ **y** $(t-t_o)^2 b(t)$ **son analíticas en** t_o.

Ej 1. $\boxed{t(t-1)^2x''-tx'+(t-1)x = 0}$, es decir, $x''-\frac{1}{(t-1)^2}x'+\frac{1}{t(t-1)}x=0$.

$t=0$ y $t=1$ son puntos singulares de la ecuación (los demás son regulares).

Como además $-t/(t-1)^2$ y $t/(t-1)$ son analíticas en $t=0$, este punto es singular regular.

Como $-1/(t-1)$ no es analítica en 1 (aunque $(t-1)/t$ sí lo sea), el punto $t=1$ es singular no regular.

Supondremos a partir de ahora que el punto singular regular de [e] que estudiamos es $t=0$. Sabemos que no supone ninguna pérdida de generalidad ya que en el caso de que queramos estudiar las soluciones cerca de un $t_o\neq 0$ el cambio $s=t-t_o$ nos traslada el problema al estudio de las soluciones cerca de 0 de la ecuación en s.

Multiplicando [e] por t^2 y llamando $a^*(t)=ta(t)$ y $b^*(t)=t^2b(t)$ obtenemos:

$$[e^*] \quad \boxed{t^2x''+t\,a^*(t)\,x'+b^*(t)\,x=0}$$

Se trata, por tanto, de resolver [e*] en un entorno de $t=0$ suponiendo que $a^*(t)$ y $b^*(t)$ son analíticas en dicho punto, es decir, que admiten desarrollo en serie

$$a^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty} a^*_k t^k , \quad b^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b^*_k t^k$$

válido en $|t|<R$ (mínimo de los dos radios de convergencia).

Para hallar las soluciones de [e*] se utiliza el llamado **método de Frobenius**, que detallaremos en el teorema de esta sección. Aunque no lo demostraremos, intentamos con las siguientes consideraciones hacer creíbles sus hipótesis y conclusiones.

La ecuación de la forma [e*] más sencilla es la conocida ecuación de Euler (para ella la $a^*(t)$ y la $b^*(t)$ son "series" que se reducen a su primer término). Viendo sus soluciones está claro que no existen, en general, soluciones analíticas de [e*]. Pero ya que existen soluciones de la ecuación de Euler de la forma t^r se podría pensar que existen para [e*] soluciones en forma de serie que comiencen por términos t^r.

Probemos por tanto en [e*] la solución $x = t^r\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k = c_0 t^r + c_1 t^{r+1} + c_2 t^{r+2} + \ldots$

Debe ser entonces:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)c_k t^{k+r} + \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a^*_k t^k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)c_k t^{k+r}\Big) + \Big(\sum_{k=0}^{\infty} b^*_k t^k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+r}\Big) = 0$$

El coeficiente que acompaña a la potencia de menor orden (t^r) debe ser cero:

$$\big[\, r(r-1) + a^*_0 r + b^*_0 \,\big]\, c_0 = 0$$

Si la serie ha de empezar por términos de exponente r, debe ser $c_0 \neq 0$. Por tanto, las raíces del polinomio $\boxed{q(r) = r(r-1)+a^*_0\, r + b^*_0}$, llamado **polinomio indicial** de [e*] son los únicos valores de r para los que pueden existir soluciones de la forma $t^r \Sigma$.

Lo anterior es coherente con lo conocido sobre ecuaciones de Euler. Para ellas, si el polinomio tenía dos raíces distintas r_1 y r_2 dos soluciones linealmente independientes de la ecuación eran t^{r_1} y t^{r_2} . Si la raiz era doble, sin embargo, sólo existía una solución de esa forma, y la segunda era la primera multiplicada por el ln t ; por tanto, también es de esperar que en la solución general de [e*] aparezcan logaritmos.

Pero en la ecuación [e*] pueden aparecer otros problemas que no se presentan en el caso particular de Euler. Igualando a 0 el coeficiente que acompaña a t^{r+k}:

$$[(r+k)(r+k-1)+(r+k)a^*_0 + b^*_0]\, c_k + [(r+k-1)a^*_1+b^*_1]\, c_{k-1} + \ldots = 0$$

donde los puntos representan términos que incluyen c_{k-2}, c_{k-3} , … De esta expresión podemos despejar el c_k en función de los anteriores ya calculados siempre que el corchete que le acompaña, que es el polinomio indicial evaluado en r+k: q(r+k) , no se anule. Si r_1 es la mayor de las dos raices $q(r_1+k)\neq 0$ para todo k. Pero si r_2 es la menor, y la diferencia r_1-r_2 es un entero positivo n, el $q(r_2+k)=0$ si k=n, y, salvo que los demás sumandos también se anulen (con lo que c_n quedaría indeterminado), no hay forma de anular el coeficiente de t^{r_2+n} y no existirán soluciones $t^{r_2}\,\Sigma$.

Enunciamos ya el teorema (aunque se podría considerar el caso de raíces complejas del polinomio indicial, nos limitamos, por sencillez, a los casos reales):

Teor 1. Supongamos que el polinomio indicial de [e*]: $q(r) = r(r-1)+a^*_0\, r+ b^*_0$ tiene dos raíces reales r_1 y r_2 con $r_1 \geq r_2$.

Entonces siempre existe una solución x_1 de [e*] de la forma

$$x_1 = t^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k , \; c_0 \neq 0$$

La segunda solución x_2 linealmente independiente es, según los casos:

a] Si r_1-r_2 no es cero ni entero positivo: $x_2 = t^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k , \; b_0 \neq 0$

b] Si $r_1=r_2$, $x_2 = t^{r_1+1} \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k + x_1 \ln t$

c] Si r_1-r_2=n entero positivo, $x_2 = t^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k + a\, x_1 \ln t$, $b_0 \neq 0$, $a \in \mathbf{R}$

Todas las soluciones están definidas al menos para 0<t<R y los coeficientes c_k , b_k y la constante a se pueden determinar sustituyendo cada una de las soluciones en la ecuación.

Se comprueba sin dificultad que a partir de las soluciones anteriores obtenemos otras válidas para –R<t<0 sin más que sustituir ln t por ln|t| y las expresiones de la forma t^r que preceden a las series por $|t|^r$.

En el caso **c]** la constante a puede perfectamente ser 0 (como en las ecuaciones de Euler), con lo que, a pesar de todo, hay dos soluciones independientes $t^r\,\Sigma$.

Ej 2. $\boxed{2tx''+x'+tx=0}$, o sea, $t^2x''+t\frac{1}{2}x'+\frac{1}{2}t^2x=0$.

$t=0$ es singular regular, puesto que $a^*(t)=\frac{1}{2}$ y $b^*(t)=\frac{1}{2}t^2$ son analíticas (en todo **R**)

Como $a^*_0=a^*(0)$ y $b^*_0=b^*(0)$, el polinomio indicial es $r(r-1)+\frac{1}{2}r+0=r(r-\frac{1}{2})$ y por tanto $r_1=1/2$ y $r_2=0$, con r_1-r_2 no entero. Las dos soluciones independientes son

$$x_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_k t^{k+1/2},\ c_0\neq 0 \quad \text{y} \quad x_2=\sum_{k=0}^{\infty}b_k t^k,\ b_0\neq 0 ,\ \text{ series convergentes para todo } t .$$

Llevando la primera de ellas a la ecuación inicial:

$$\sum_{k=0}^{\infty}2\big(k+\tfrac{1}{2}\big)\big(k-\tfrac{1}{2}\big)c_k t^{k-1/2}+\sum_{k=0}^{\infty}\big(k+\tfrac{1}{2}\big)c_k t^{k-1/2}+\sum_{k=0}^{\infty}c_k t^{k+3/2}=0$$

(obsérverse que ahora todas las series comienzan por $k=0$ ya que, a diferencia de los puntos regulares, no se anulan los primeros términos al derivar).

Igualando a 0 los coeficientes de las diferentes potencias de t :

$t^{-1/2}$: $[2(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}]\,c_0=0.c_0=0$ y c_0 queda indeterminado como debía

$t^{1/2}$: $[2(\frac{3}{2})(\frac{1}{2})+\frac{3}{2}]\,c_1=0 \ \to\ c_1=0$

....

$t^{k-1/2}$: $[2(k+\frac{1}{2})(k-\frac{1}{2})+(k+\frac{1}{2})]\,c_k+c_{k-2}=0 \ \to\ c_k=-\frac{1}{k(2k+1)}c_{k-2}$, $k=2,3,\ldots$

Por tanto: $c_3=c_5=\ldots=0$, $c_2=-\frac{1}{2.5}c_0$, $c_4=-\frac{1}{4.9}c_2=\frac{1}{2.4.5.9}c_0$, …

Luego la primera solución es (eligiendo $c_0=1$):

$$x_1=t^{1/2}\Big[1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2.4...2m.5.9...(4m+1)}t^{2m}\Big]$$

Para la segunda raiz del polinomio indicial:

$$\sum_{k=2}^{\infty}2k(k-1)b_k t^{k-1}+\sum_{k=1}^{\infty}k\,b_k t^{k-1}+\sum_{k=0}^{\infty}b_k t^{k+1}=0 \ \to$$

t^0 : $b_1=0$

t^1 : $[4+2]\,b_2+b_0=0 \ \to\ b_2=-\frac{1}{6}b_0$

....

t^{k-1} : $[2k(k-1)+k]\,b_k+b_{k-2}=0 \ \to\ b_k=-\frac{1}{k(2k-1)}b_{k-2}$, $k=2,3,\ldots \ \to$

$b_3=b_5=\ldots=0$, $b_4=-\frac{1}{4.7}b_2=\frac{1}{2.4.3.7}b_0$, …

Y la segunda solución: $x_2=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2.4...2m.3.7...(4m-1)}t^{2m}$

Aplicando el criterio del cociente se comprueba que, como debían, las dos series convergen para todo t . La x_2 es solución válida para todo t , pero la x_1 sólo para $t>0$ (en $t=0$ no tiene siquiera primera derivada). Una x_1 válida para $t\neq 0$ es $x_1=|t|^{1/2}[1+\Sigma]$.

Más complicadas son las cuentas para los otros dos casos del teorema:

Ej 3. $\boxed{t^2x''+2t^2x'-2x=0}$ $t=0$ es singular regular, $a^*(t)=2t$ y $b^*(t)=-2$ analíticas en **R** .

El polinomio indicial $r(r-1)+0.r-2$ tiene por raíces $r_1=2$ y $r_2=-1$. Así pues:

$$x_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_k t^{k+2},\ c_0\neq 0 \ \to\ \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_k t^{k+2}+\sum_{k=0}^{\infty}2(k+2)c_k t^{k+3}-\sum_{k=0}^{\infty}2c_k t^{k+2}=0$$

$$\to\quad c_0 \text{ indeterminado},\quad c_k=-\frac{2(k+1)}{k(k+3)}c_{k-1},\ k=1,2,\ldots \ \to$$

$$c_1=-c_0,\ c_2=\frac{3}{5}c_0,\ c_3=-\frac{4}{15}c_0,\ldots,\ c_k=(-1)^k\frac{2(k+1)}{k(k+3)}\frac{2k}{(k-1)(k+2)}\frac{2(k-1)}{(k-2)(k+1)}\ldots c_0=\frac{(-2)^k(k+1)}{(k+3)!}6c_0$$

Por tanto, eligiendo $c_0=1/6$, $x_1=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^k(k+1)}{(k+3)!}t^{k+2}$ $\to$ $x_1'=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^k(k+1)(k+2)}{(k+3)!}t^{k+1}$

La segunda solución es $x_2=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}b_kt^{k-1}+ax_1\ln t$, $b_0\neq 0$ $\to$

$$x_2'=\sum_{k=0}^{\infty}(k-1)b_kt^{k-2}+\frac{a}{t}x_1+ax_1'\ln t\ ,\ \ x_2''=\sum_{k=0}^{\infty}(k-1)(k-2)b_kt^{k-3}-\frac{a}{t^2}x_1+\frac{2a}{t}x_1'+ax_1''\ln t\ \to$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k-1)(k-2)b_k t^{k-1}+2(k-1)b_k t^k-2b_k t^{k-1}\right]+a\left[(-1+2t)x_1+2tx_1'\right]+a\ln t\left[t^2x_1''+2t^2x_1'-2x_1\right]=0$$

El último corchete es 0 por ser x_1 solución (lo que acompaña al logaritmo siempre se anula). Utilizando las series de x_1 y x_1' escritas arriba y agrupando potencias de t :

$$-2b_0-2b_1-2b_2t+\left[2b_3+2b_2-2b_3-\frac{a}{6}+\frac{2a}{3}\right]t^2+\ldots=0\ \to\ b_1=-b_0,\ b_2=0,\ a=0$$

b_0 y b_3 quedan indeterminados (b_3 está asociado a potencias t^2, comienzo de la serie de x_1). Elegimos $b_0=1$ y $b_3=0$ (para no volver a calcular x_1). Como en la regla de recurrencia cada b_k depende del b_{k-1}: $b_4=b_5=\ldots=0$. Por tanto: $x_2=\frac{1}{t}(1-t)$.

Ej 4. $\boxed{t^2x''+2t^2x'+(t^2+\frac{1}{4})x=0}$ $t=0$ singular regular; $a^*(t)=2t$, $b^*(t)=t^2+\frac{1}{4}$ analíticas en **R**.

El polinomio indicial tiene $r=\frac{1}{2}$ como raiz doble $\to$ $x_1=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}c_k t^{k+1/2}$ $\to$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[k^2c_kt^{k+1/2}+(2k+1)c_kt^{k+3/2}+c_kt^{k+5/2}\right]=0\to c_1=-c_0,\ c_k=-\frac{2k-1}{k^2}c_{k-1}-\frac{1}{k^2}c_{k-2},\ k=2,3,\ldots$$

$$\to\ c_2=\frac{1}{2}c_0,\ c_3=-\frac{1}{6}c_0,\ \ldots,\ c_k=(-1)^k\frac{1}{k!}c_0\ \to\ x_1=t^{1/2}e^{-t}$$

La otra solución necesariamente contiene un logaritmo:

$$[x_2=t^{3/2}\sum_{k=0}^{\infty}b_kt^k+x_1\ln t\ \to\ \sum_{k=0}^{\infty}\left[(k^2+2k+1)b_kt^{k+3/2}+(2k+3)b_kt^{k+5/2}+b_kt^{k+7/2}\right]=0$$

$$\to\ b_0=b_1=b_2=\ldots=0\ \to\ x_2=t^{1/2}e^{-t}\ln t$$

(la forma de las soluciones sugiere, para comprobar el resultado, hacer $y=e^tx$; se obtiene $t^2y''+\frac{1}{4}y=0$, ecuación de Euler de solución $y=c_1t^{1/2}+c_2t^{1/2}\ln t$)

3.3 Ecuación de Legendre

Es la ecuación [L] $\boxed{(1-t^2)x''-2tx'+p(p+1)x = 0}$

Resolvámosla primero en torno a $t=0$ que es un punto regular. Como $a(t)=-2t/(1-t^2)$ y $b(t)=p(p+1)/(1-t^2)$ son analíticas en $|t|<1$ la ecuación tiene pues soluciones analíticas al menos en ese intervalo. Probamos pues:

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k \quad \to \quad \sum_{k=2}^{\infty} [k(k-1)c_k t^{k-2} - k(k-1)c_k t^k] - \sum_{k=1}^{\infty} 2kc_k t^k + \sum_{k=0}^{\infty} p(p+1)c_k t^k = 0 \ .$$

Que nos lleva a la regla de recurrencia $c_k = -\frac{(p-k+2)(p+k-1)}{k(k-1)} c_{k-2}$, $k=2,3,\ldots$ Por tanto:

$$c_2 = -\frac{p(p+1)}{2.1} c_0 \ , \ c_3 = -\frac{(p-1)(p+2)}{3.2} c_1 \ , \ c_4 = \frac{p(p-2)(p+1)(p+3)}{4!} c_0 \ , \ c_5 = \frac{(p-1)(p-3)(p+2)(p+4)}{5!} c_1 \ , \ldots$$

Así que la solución general de [L] es $x= c_0x_1+c_1x_2$ donde:

$$x_1 = 1+\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{p(p-2)\ldots(p-2n+2)(p+1)(p+3)\ldots(p+2n-1)}{(2n)!} t^{2n}$$

$$x_2 = t+\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(p-1)(p-3)\ldots(p-2n+1)(p+2)(p+4)\ldots(p+2n)}{(2n+1)!} t^{2n+1}$$

Si p es un entero par positivo, $p=2m$, x_1 se convierte en un polinomio de grado 2m:

$p=0 \to x_1= 1$, $p=2 \to x_1= 1-3t^2$, $p=4 \to x_1= 1-10t^2 + \frac{35}{3}t^4$, …

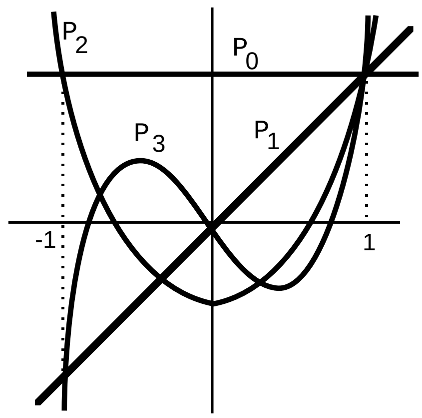
Si p es impar, $p=2m+1$, es x_2 quien se reduce a un polinomio de grado 2m+1:

$p=1 \to x_2 = t$, $p=3 \to x_2 = t-\frac{5}{3}t^3$, $p=5 \to x_2 = t - \frac{14}{3}t^3 + \frac{21}{5}t^5$, …

A la solución polinómica P_n de la ecuación [L] con $p=n\in \mathbf{N}$ que satisface $P_n(1)=1$ se le llama **polinomio de Legendre de grado n** . Se tiene pues:

$$\boxed{P_0=1 \ , \ P_1= t \ , \ P_2=\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{2} \ , \ P_3=\frac{5}{2}t^3-\frac{3}{2}t \ , \ P_4=\frac{35}{8}t^4-\frac{15}{4}t^2+\frac{3}{8} \ , \ P_5=\frac{63}{8}t^5-\frac{35}{4}t^3+\frac{15}{8}t \ , \ldots}$$

Como $P_n(-t)=(-1)^nP_n(t)$, los P_{2m} tienen simetría par y los P_{2m+1} impar. Observemos que los P_{2m+1} y las derivadas de los P_{2m} se anulan en 0 .



Se pueden probar además las siguientes propiedades de los P_n:

$$P_n(t)= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2-1)^n \quad , \text{ fórmula de Rodrigues.}$$

P_n tiene n ceros reales, todos en $(-1,1)$.

Los P_n son ortogonales entre sí:

$$\int_{-1}^{1} P_nP_m dt = 0 \ , \text{ si } m\neq n \ ; \quad \int_{-1}^{1} P_n^2 dt = \frac{2}{2n+1}$$

Para las aplicaciones de la ecuación [L] a las ecuaciones en derivadas parciales es necesario saber qué soluciones están acotadas en ±1. Para analizarlo vamos a resolver la ecuación en torno a t=1 . Para ello hacemos el cambio s=t–1, obteniendo

$$[L1]\quad s(s+2)x''+2(s+1)x'-p(p+1)x=0$$

Para ella s=0 es punto singular regular, con $a^*(s)=2(s+1)/(s+2)$ y $b^*(s)=-p(p+1)s/(s+2)$ analíticas para $|s|<2$. El polinomio indicial tiene como raiz r=0 doble para todo p. Por tanto dos soluciones linealmente independientes de [L1] son:

$$x_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k \qquad \text{y} \qquad x_2 = |s| \sum_{k=0}^{\infty} b_k s^k + x_1 \ln|s|$$

con $c_0=1$ y las series convergentes al menos para $|s|<2$. Sin necesidad de calcular ningún coeficiente de las series podemos ya afirmar que la x_1 siempre está acotada en s=0 (t=1), mientras que la x_2 no lo está (tiende a $-\infty$ cuando $s\to 0$). Vamos a calcular x_1 y comprobar que si p=n obtenemos de nuevo los P_n [pues $x_1(1)=1$] . Debe ser:

$$\sum_{k=2}^{\infty} [k(k-1)c_k s^k + 2k(k-1)c_k s^{k-1}] + \sum_{k=1}^{\infty} [2kc_k s^k + 2kc_k s^{k-1}] - \sum_{k=0}^{\infty} p(p+1)c_k s^k = 0 \ .$$

de donde obtenemos la regla de recurrencia $c_k = \frac{p(p+1)-k(k-1)}{2k^2}\, c_{k-1}$, k=1,2,3,…

y la siguiente expresión para x_1:

$$x_1(s) = 1 + \frac{p(p+1)}{2}\, s + \frac{p(p+1)[p(p+1)-2.1]}{16}\, s^2 + \ldots + \frac{p(p+1)[p(p+1)-2.1]\ldots[p(p+1)-k(k-1)]}{2^n (n!)^2}\, s^n + \ldots$$

Si p=n la regla de recurrencia nos dice que el c_{n+1} y todos lo siguientes se anulan.

En particular: $p=0 \to x_1 = 1$; $p=1 \to x_1 = 1+s = t$; $p=2 \to x_1 = 1+3s+\frac{6[6-2]}{16}s^2 = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}$; …

[se puede ver que si $p\neq n$ la x_1 no está acotada cuando $s\to -2$ ($t\to -1$) con lo que las únicas, salvo constantes, soluciones de [L] que están acotadas a la vez en t=1 y t=–1 son los polinomios de Legendre]

Las series solución de [L] hablan sólo de lo que ocurre para $t\in(-1,1)$. Las de [L1] de $t\in(-1,3)$. Para analizar lo que ocurre "en el infinito" realizamos en [L] el cambio s=1/t :

$$\frac{dx}{dt} = -s^2\frac{dx}{ds} \ ; \ \frac{d^2x}{dt^2} = s^4\frac{d^2x}{ds^2} + 2s^3\frac{dx}{ds} \quad \to \quad [L\infty]\ \ s^2(s^2-1)x''+2s^3x'+p(p+1)x=0$$

s=0 es singular regular, con $a^*(s)=2s^2/(s^2-1)$ y $b^*(s)=p(p+1)/(s^2-1)$ analíticas en $|s|<1$. Las series solución de [L∞] serán convergentes al menos en ese intervalo y por tanto de ellas podemos extraer información sobre las soluciones de [L] para $|t|>1$. Por ejemplo, como el polinomio indicial de [L∞] es $r^2-r-p(p+1)$ (de raices $-p$ y $1+p$) y para todo p la mayor de ellas $r_1>0$ deducimos que siempre hay soluciones de [L] que $\to 0$ si $t\to\infty$.

(pues $x_1^{\infty}(s)= s^{r_1}\sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k \to 0$ si $s\to 0^+$; o sea $x_1^{\infty}(t)= t^{-r_1}\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{-k}\to 0$ si $t\to\infty$)

Resolvamos por series [L∞] en el caso más sencillo: p=0 (ahora s=0 es regular):

$$x=\sum_{k=0}^{\infty}c_k s^k \to c_k = \frac{k-2}{k}\, c_{k-2} \text{ , k=2,3,…} \to x = c_0+ c_1[s+ \tfrac{1}{3}s^3+ \tfrac{1}{5}s^5+\ldots] = c_0+c_1 [t^{-1}+ \tfrac{1}{3}t^{-3}+ \tfrac{1}{5}t^{-5}+\ldots]$$

serie (no de potencias) convergente si $|t|>1$.

[No hubiésemos necesitado las series para p=0, pues [L] es resoluble: $(1-t^2)x''+2tx'=0$ $\to x'=c_1(1-t^2)^{-1} \to x=c_0+c_1\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|$, válida para todo $t\neq 1$ (y la segunda $\to 0$ si $t\to\infty$)]

3.4 Ecuación de Bessel

Es la ecuación [B] $\boxed{t^2x''+ tx'+ (t^2-p^2)x = 0}$, $p\geq 0$

$t=0$ es punto singular regular de [B] con polinomio indicial r^2-p^2 de raíces $r_1=p$, $r_2=-p$.

Existe pues una solución de la forma $x_1 = t^p\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$, $t>0$, serie convergente en todo **R**.

Llevada a [B]: $\sum_{k=0}^{\infty}[k(2p+k)c_k t^{p+k}+c_k t^{p+k+2}] = 0 \rightarrow c_1=0$; $c_k = -\frac{c_{k-2}}{k(2p+k)}$, $k=2,3,\ldots$

Así que: $c_1=c_3=\ldots=0$; $c_2 = -\frac{c_0}{2^2(p+1)}$; $c_4 = \frac{c_0}{2^4 2(p+1)(p+2)}$; ...

Por tanto, $x_1 = c_0\, t^p \left[1+\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m t^{2m}}{2^{2m} m!(p+1)\ldots(p+m)} \right]$

Podemos dar una expresión más reducida de esta x_1 utilizando la función gamma:

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} ds \quad \text{si } s>0 \quad ; \quad \Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+n)}{(s+n+1)...(s+1)s} \quad \text{si } -n<s<-n+1 \text{ , } n\in \mathbf{N}$$

que tiene las siguientes propiedades:

$\Gamma(1)=1$; $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$; $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s) \rightarrow \Gamma(s+n)=(s+n+1)\ldots(s+1)s\Gamma(s) \rightarrow \Gamma(n+1)=n!$, $n\in \mathbf{N}$

Eligiendo $c_0=1/[2^p\Gamma(p+1)]$ obtenemos entonces la siguiente solución de [B]:

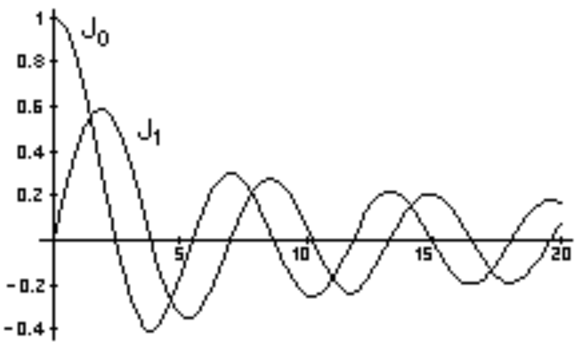
$$\boxed{J_p(t) = \left[\frac{t}{2}\right]^p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(p+m+1)} \left[\frac{t}{2}\right]^{2m}}$$

función de Bessel de primera especie y orden p

Como se ve todas las J_p están acotadas en $t=0$ a pesar de la singularidad.

En particular se tiene $J_0(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left[\frac{t}{2}\right]^{2m}$; $J_1(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,(m+1)!} \left[\frac{t}{2}\right]^{2m+1}$

La gráfica de estas dos funciones es la siguiente:



Al igual que J_0 y J_1 todas las J_p son funciones oscilatorias:

$J_p \sim \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos[t-(2p+1)\frac{\pi}{4}]$ para t grande.

(las propiedades de las funciones de Bessel se tratan en los libros de "funciones especiales")

Cada J_p tiene un número infinito de ceros en $(0,\infty)$ [que deben conocerse para resolver algunas ecuaciones en derivadas parciales; los de J_0 son 2.4048, 5.5201, 8.6532, ... y los de J_1 son 3.8317, 7.0156, 10.1735, ...].

Se trata ahora de encontrar una segunda solución linealmente independiente de [B]. El método de Frobenius asegura que si $r_1 - r_2 = 2p$ no es cero o un entero positivo existe una x_2 de la forma:

$$x_2 = t^{-p} \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k \ , \ t>0$$

que nos lleva a los mismos cálculos de antes, cambiando p por $-p$. Por tanto la función:

$$J_{-p}(t) = \left[\frac{t}{2}\right]^{-p} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\ \Gamma(-p+m+1)} \left[\frac{t}{2}\right]^{2m}$$

es una segunda solución linealmente independiente de J_p si $2p \neq 0,1,2,\dots$ (que no está, evidentemente, acotada en el origen)

Si p no es entero, pero $2p$ sí lo es ($\mathbf{p = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots}$) , se puede demostrar que J_p y J_{-p} siguen siendo lienealmente independientes (es el caso c] del teorema, pero es $a=0$).

Es fácil comprobar que $J_{1/2}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \operatorname{sen} t$, $J_{-1/2}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos t$

(en este caso la expresión asintotica vista para los J_p es exacta).

Como además se puede probar la relación $J_{p-1} + J_{p+1} = \frac{2p}{t} J_p$, que expresa unos J_p en función de otros, resulta que todas las $J_{(2n+1)/2}$, $n \in \mathbf{Z}$ son funciones elementales.

Si **p=0,1,2,…** tenemos que calcular las series del teorema de Frobenius.

Para p=0 la segunda solución es del tipo $x_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^{k+1} + J_0(t) \ln t$, $t>0$.

Determinando los coeficientes se llega a:

$$x_2(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(m!)^2} \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m}\right] \left[\frac{t}{2}\right]^{2m} + J_0(t) \ln t \equiv K_0(t) \ , \ t>0$$

función de Bessel de segunda especie y orden 0.

Si $p=n>0$, $x_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^{k-n} + a\, J_n(t) \ln t$, $t>0$. Se prueba en [B] y se obtiene:

$$x_2(t) \equiv K_n(t) = -\frac{1}{2}\left[\frac{t}{2}\right]^{-n} \left(\frac{1}{n!}\left[1+\dots+\frac{1}{n}\right]\left[\frac{t}{2}\right]^{2n} + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m!} \left[\frac{t}{2}\right]^{2m} \right) -$$

$$- \frac{1}{2}\left[\frac{t}{2}\right]^{n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m!\,(m-n)!} \left(\left[1+\dots+\frac{1}{m}\right] + \left[1+\dots+\frac{1}{m+n}\right] \right) \left[\frac{t}{2}\right]^{2m} + J_n(t) \ln t \ , \ t>0$$

función de Bessel de segunda especie y orden n.

De estas complicadas funciones resaltaremos el hecho de que (como se sabía desde que calculamos las raíces del polinomio indicial) las K_n no están acotadas en $t=0$.