

4. Mapas de fases

Los sistemas de ecuaciones no lineales no se pueden resolver, salvo contadas excepciones. Pero si estos sistemas son autónomos y de dimensión 2 (para dimensiones mayores las cosas se complican notablemente) es posible obtener las principales propiedades de sus soluciones a partir de su dibujo o, con más precisión, del dibujo de las proyecciones (llamadas órbitas) de estas soluciones sobre el plano xy (o plano de fases). Este capítulo está dedicado a describir las diferentes técnicas destinadas a dibujar el conjunto de las órbitas de un sistema dado sobre el plano de fases (mapas de fases).

La sección 4.1 trata de las propiedades básicas de las soluciones y órbitas de estos sistemas autónomos. Se introduce la ecuación diferencial de las órbitas y el campo vectorial tangente a las órbitas.

Se llaman puntos críticos de un mapa de fases a las proyecciones de las soluciones constantes del sistema. La sección 4.2 clasifica estos puntos en diferentes tipos (nodos, puntos silla, focos, centros,...) de acuerdo con la forma de las órbitas a su alrededor. Esta forma será en casi todos los casos similar a la del sistema lineal obtenido despreciando los términos no lineales en el desarrollo de Taylor del sistema. Las únicas excepciones se darán, tal vez, si la aproximación lineal tiene autovalores imaginarios puros (centros) o si algún autovalor es cero (puntos no elementales).

La sección 4.3 describe las propiedades particulares que poseen los mapas de fases de los sistemas que provienen de ecuaciones autónomas de segundo orden.

Un tipo particular de sistemas que poseen varias propiedades adicionales que facilitan el dibujo de su mapa de fases son los exactos, tratados en la sección 4.4. Para ellos siempre se podrá hallar la expresión de sus órbitas y sus puntos críticos sólo podrán ser puntos silla o centros (lo que evita este caso dudoso).

En la sección 4.5 daremos algunas otras ideas sobre cómo atacar el problema de clasificar un punto crítico cuya aproximación lineal sea un centro (análisis de simetrías y utilización de coordenadas polares).

El análisis de los puntos no elementales es muy complicado. En la sección 4.6 vemos algunos ejemplos de mapas de fases con tales puntos que, al no tener teoría para clasificarlos, deberemos dibujar a través de la ecuación de sus órbitas.

En la última sección, la 4.7, veremos un método (de interés en los casos dudosos) que a veces nos permite determinar la estabilidad de un punto crítico: la búsqueda de las llamadas funciones de Lyapunov.

4.1 Sistemas de dos ecuaciones autónomas

Sea el sistema [S] $\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$, es decir, $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, con $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$.

Suponemos que f y g y sus derivadas parciales son continuas en todo \mathbf{R}^2 . Sabemos que entonces existe una única solución de [S] que satisface cualquier par de datos iniciales $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$ (es decir $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$). Los siguientes resultados, semejantes a los vistos para las ecuaciones autónomas de primer orden, se prueban fácilmente:

Teor 1. Si $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$ entonces $\mathbf{x}(t) \equiv \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ es solución de [S]
 (solución constante o de equilibrio de [S])

Si $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ es solución de [S] y $c \in \mathbf{R}$ entonces $\mathbf{x}(t+c) = \begin{pmatrix} x(t+c) \\ y(t+c) \end{pmatrix}$ es también solución de [S]

Cada solución $\mathbf{x}(t)$ de [S] es una curva en el espacio txy , pero también podemos mirarla como una curva en el plano xy (que llamaremos **plano de fases**) descrita paramétricamente en función de t . Esta segunda curva, a la que llamaremos **órbita** de la solución, es la proyección de la primera sobre el plano de fases. El objetivo de este capítulo es representar lo más aproximadamente posible el conjunto de órbitas de [S], es decir, el **mapa de fases** de [S]. Comencemos con un ejemplo:

Sea $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$ (es decir, $x'' + x = 0$)

La solución que cumple $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es $\mathbf{x}(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

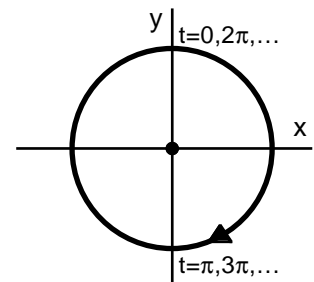
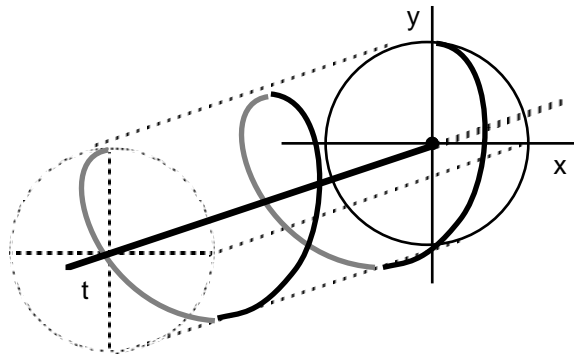
y la que satisface $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \text{sen } t \\ \text{cost} \end{pmatrix}$.

Estas soluciones describen en el espacio la recta y la hélice del dibujo superior, y sus proyecciones sobre el plano xy son el punto y la circunferencia del inferior [a un punto del mapa de fases, proyección de una solución constante se le llama **punto crítico o punto singular**].

Obtenemos las mismas órbitas si dibujamos en cada caso la curva trazada, al aumentar el parámetro t , por el punto de coordenadas $x=x(t)$, $y=y(t)$. La flecha nos orienta la órbita, indicando el sentido en que se recorre.

Imponiendo ahora $\mathbf{x}(\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ tenemos $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} -\text{sen } t \\ -\text{cost} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{sen}(t-\pi) \\ \text{cos}(t-\pi) \end{pmatrix}$.

La órbita de esta solución (cuya gráfica en el espacio es una traslación paralela al eje t de la hélice anterior) es la misma circunferencia de antes, si bien sus puntos son alcanzados para otros valores de t . Esta situación se da en cualquier sistema autónomo (y no en un sistema cualquiera) y por eso tiene sentido dibujar su mapa de fases: si $x=x(t)$, $y=y(t)$ son las ecuaciones de una órbita, otra parametrización de la misma órbita es $x=x(t+c)$, $y=y(t+c)$ para cualquier c (aunque para un mismo t se obtengan valores de x e y diferentes). Dicho de otra forma: como las traslaciones de una solución hacia adelante y hacia atrás son también soluciones, las proyecciones de todas estas curvas del espacio son la misma órbita.



Como normalmente no conoceremos las soluciones del sistema [S] para dibujar su mapa de fases trataremos de buscar información a partir de las propias funciones f y g .

Intentemos primero hallar explícitamente las órbitas de [S]. Eliminando formalmente la variable t del sistema obtenemos la **ecuación diferencial de las órbitas**:

$$[o] \quad \frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)} \quad (\text{pues } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx}, \text{ si lo permite el teorema de la función inversa})$$

Las curvas integrales de esta ecuación de primer orden, tal vez resoluble por los métodos de la sección 1.1 y dibujables aproximadamente por los de la 1.2, serán las órbitas de [S] (recíprocamente: una ecuación como [o] se puede mirar como un sistema y usar las ideas de esta sección para trazar sus curvas integrales). Como se ha eliminado la t , si dibujamos las órbitas sólo a partir de [o] éstas carecerán en principio de sentido de recorrido, pero pronto veremos como orientarlas.

Una información parecida a la que nos proporciona el campo de direcciones de [o] se obtiene tratando el **campo vectorial v** que en cada punto del plano viene dado por

$$v(x,y) = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix} \quad [\text{que coincide con } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \text{ vector tangente a la órbita en el punto } (x,y)]$$

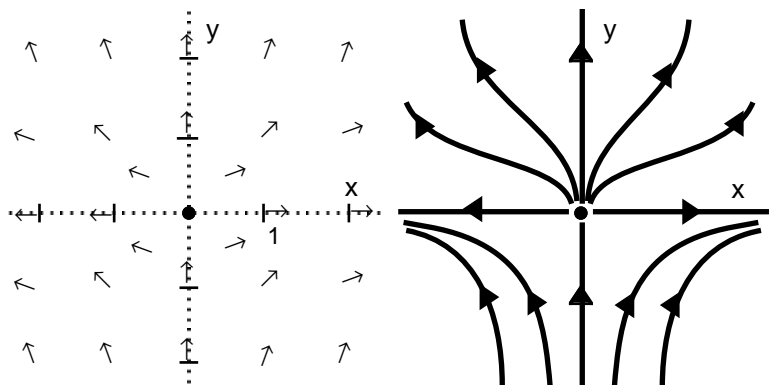
Por tanto, las órbitas de [S] serán curvas tangentes a (y recorridas en el sentido que indican) los vectores del campo v (como se ve, este campo sólo se anula en los puntos críticos). Generalmente usaremos el campo v para completar otras informaciones, pero aunque fallen todas las demás técnicas del capítulo siempre podremos dibujar algunos vectores de v y hacernos una idea del mapa de fases.

Repasemos lo visto con otro ejemplo (poco práctico por ser el sistema resoluble):

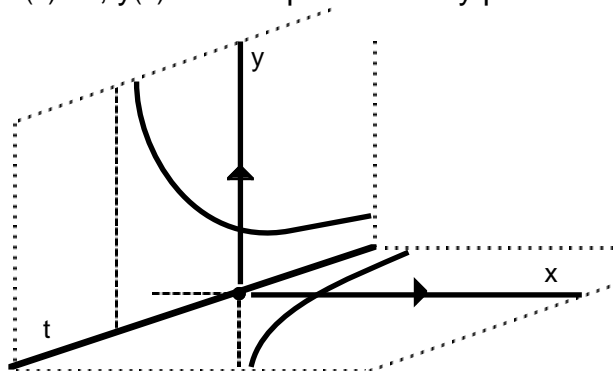
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y^2 \end{cases}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x}, \quad v(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y^2 \end{pmatrix}$$

Su único punto crítico es el origen. Algunos vectores de v (pintados con el mismo módulo pues nos interesa su dirección y sentido) son los del dibujo de la izquierda. Podemos también resolver la ecuación [o]:

$$y = [c - \ln|x|]^{-1}, \text{ o sea, } x = ce^{-1/y}.$$



Con todo ello completamos el mapa de fases de la derecha. Cada órbita de dicho mapa nos da los valores que toman la x y la y de las soluciones de las que es proyección, pero no nos dice en qué instante t los toman. Por ejemplo, la $x(t)$ de la solución con $x(0)=0, y(0)=1$ es 0 para todo t y podemos afirmar que la $y(t)=29$ para un $t > 0$, pero sólo podemos hallar este t calculando $y(t)$ ($y(t) \rightarrow \infty$ pues si tendiese a un valor constante a se tendría, como en las autónomas de primer orden, que $x(t)=0, y(t)=a$ sería solución de equilibrio, lo que es imposible por no existir más puntos críticos). Tampoco podemos saber si la $y(t)$ está definida para todo $t \geq 0$.

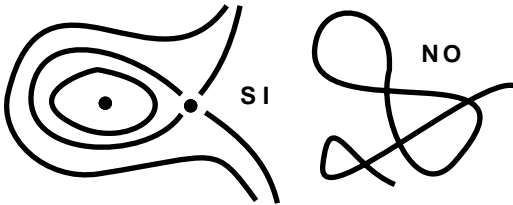


Resolviendo se tiene $y(t) = 1/(1-t)$, que explota en $t=1$ (sin embargo la solución $x(t) = e^t, y(t) = 0$, con otra órbita recta similar a la anterior, está definida para todo valor de t).

Demostremos otras propiedades generales de las órbitas:

Teor 2.

Por cada punto del plano de fases pasa una única órbita de [S].
Si una órbita se corta a sí misma corresponde a una solución periódica y dicha órbita es una curva cerrada simple.



(las órbitas de un mapa de fases, que no pueden cruzarse unas a otras, ni consigo mismas, sólo pueden ser, por tanto, de tres tipos: puntos críticos, curvas cerradas simples y arcos simples (asociadas, en cada caso, a soluciones que son constantes, periódicas y no periódicas); más de una órbita puede confluir en un punto crítico, pero

esto no viola la unicidad: estas órbitas corresponderán a soluciones que tienden a la solución constante cuando t tiende a $+$ o $-\infty$ pero que no la alcanzan en tiempo finito (para dejar clara esta situación dibujaremos usualmente estas órbitas algo separadas de los puntos críticos, aunque no sea la proyección exacta)).

Dado un x_0 , sea $x(t)$ la solución que verifica $x(0)=x_0$. Si otra solución $x^*(t)$ define una órbita que pasa por el mismo punto, debe ser $x^*(t^*)=x_0$ para algún t^* . Como $x^*(t+t^*)$ es también solución y toma en $t=0$ el mismo valor que $x(t)$ se tiene, por unicidad, que $x(t)=x^*(t+t^*)$, o sea, $x(t-t^*)=x^*(t)$ para todo t , con lo que $x^*(t)$ es trasladada de $x(t)$ y las órbitas de las dos coinciden.

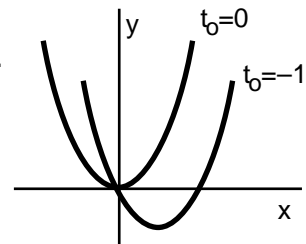
Sea $x(t)$ una solución no constante. Si su órbita se corta a sí misma ello significa que existe un primer $T>0$ en el que vuelve a ser $x(T)=x(0)$. Utilizando la unicidad en $t=0$ se tiene que para todo t es $x(t+T)=x(t)$, con lo que la solución es T -periódica y su órbita se repite a partir cada T unidades de tiempo, formando una curva cerrada simple.

Hemos visto que la órbita de un sistema autónomo que pasa por un punto x_0 del plano xy es independiente del t_0 en el que la solución $x(t)$ de la que es proyección satisface $x(t_0)=x_0$ (es decir, que la evolución del sistema es independiente del momento en que empezamos a contar el tiempo, como era de esperar al no depender f y g de t).

Si el sistema no es autónomo, esto no es cierto. Por ejemplo,

para cada t_0 la solución de $\begin{cases} x'=1 \\ y'=2t \end{cases}$ con $x(t_0)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} t-t_0 \\ t^2-t_0^2 \end{pmatrix}$.

Cada una de estas soluciones (que no se cortan en el espacio) define paramétricamente una parábola distinta en el plano xy (todas ellas pasando por el origen). La "órbita" de una solución depende no sólo del x_0 sino también del t_0 .



4.2 Clasificación de puntos críticos.

La mejor información sobre un mapa de fases nos la proporciona el conocimiento de la forma de sus órbitas en las cercanías de un punto crítico. Analizamos primero los sistemas lineales (siempre resolubles) y después tratamos los no lineales. Sea, pues:

$$[L] \quad \begin{cases} x' = ax+by \\ y' = cx+dy \end{cases}, \text{ o sea, } \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \text{ con } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Supondremos que $|\mathbf{A}| \neq 0$, con lo que el origen es el único punto crítico de [L] y $\lambda=0$ no es autovalor. Clasificamos dicho punto según los autovalores λ_1 y λ_2 de \mathbf{A} :

λ_1 y λ_2 **reales y distintos**. La solución general es:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{v}_i \text{ vector propio asociado a } \lambda_i.$$

Llamemos L_1 y L_2 a las rectas que contienen a \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 . Cada L_i está formada por tres órbitas (obtenidas haciendo la otra $c_i=0$): el punto crítico y dos semirrectas orientadas según sea el signo del λ_i .

El vector unitario tangente a las órbitas $[\mathbf{t} = \mathbf{x}'(t)/\|\mathbf{x}'(t)\|]$ es:

$$\mathbf{t} = \frac{c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2}{[c_1^2 \lambda_1^2 e^{2\lambda_1 t} + c_2^2 \lambda_2^2 e^{2\lambda_2 t} + 2c_1 c_2 \lambda_1 \lambda_2 e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2]^{1/2}}$$

Si $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, las soluciones tienden a $\mathbf{0}$ y el vector \mathbf{t} tiende a \mathbf{v}_1 (si $c_1 \neq 0$) cuando $t \rightarrow \infty$. Todas las órbitas (menos dos) entran en el origen con la pendiente dada por el vector propio asociado al autovalor más cercano a 0 y el punto crítico se denomina **nodo estable**.

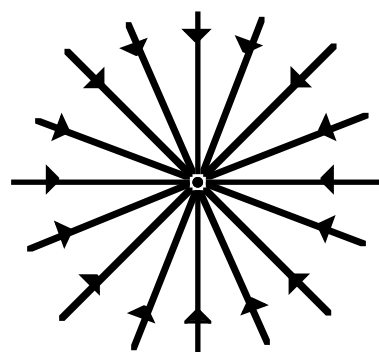
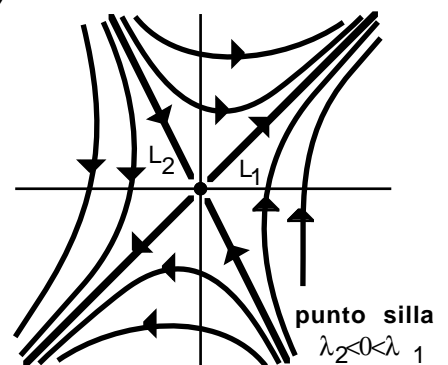
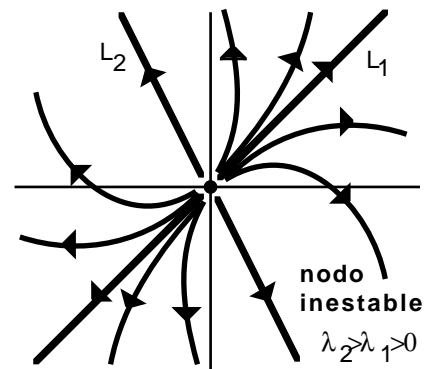
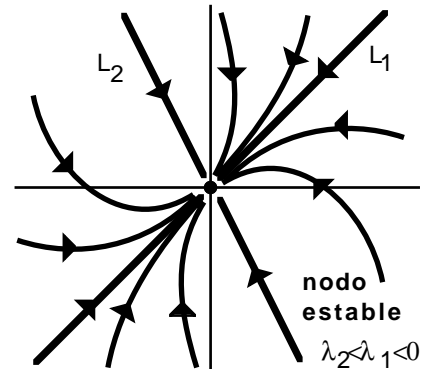
Si $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, se tiene la misma situación cambiando $+\infty$ por $-\infty$ y el origen se llama **nodo inestable**.

Si $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, las órbitas sobre L_2 se aproximan al origen y se alejan sobre L_1 . Las demás tienden asintóticamente a L_1 o L_2 según tienda t a $+\infty$ o $-\infty$ adoptando la forma hiperbólica del dibujo y tenemos un **punto silla**.

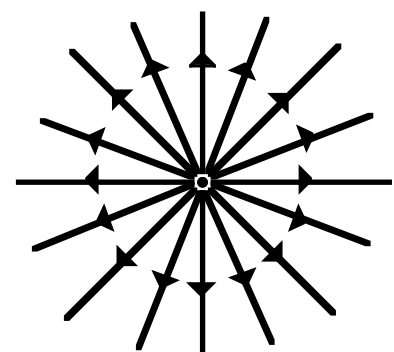
λ **doble**. Si \mathbf{A} es diagonal la solución general es

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$

con lo que si $\lambda < 0$ ($\lambda > 0$) para cada par de constantes nos acercamos (alejamos) al origen según una recta diferente y se dice entonces que dicho punto es un **nodo estelar estable (inestable)**.



nodo estelar estable
 λ doble < 0 , \mathbf{A} diagonal



nodo estelar inestable
 λ doble > 0 , \mathbf{A} diagonal

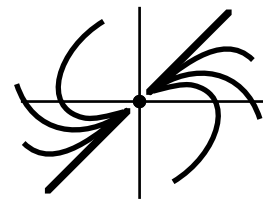
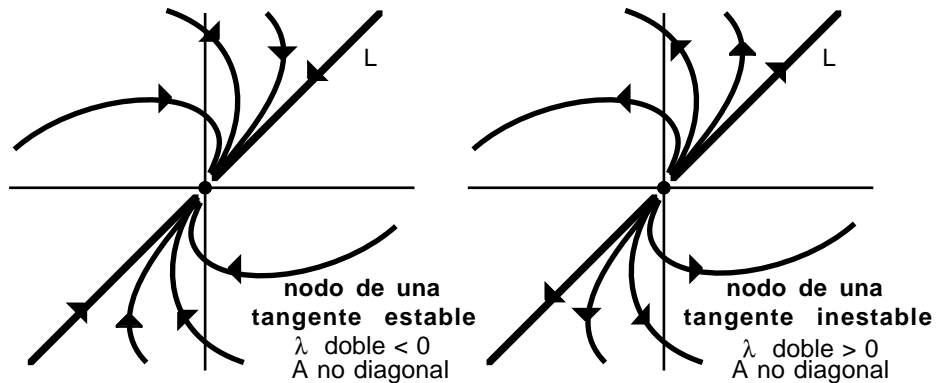
Si **A** no es diagonal la solución general es

$$\mathbf{x}(t)=[c_1\mathbf{w}+(c_1t+c_2)\mathbf{v}]e^{\lambda t}$$

con **v** único vector propio asociado a λ .

Si $c_1=0$ estamos sobre la recta **L** generada por **v**. Se puede ver, calculando el vector tangente unitario, que todas las demás órbitas

son tangentes en el origen a **L**. Si $\lambda < 0$ ($\lambda > 0$) sobre cada órbita nos acercamos (alejamos) al punto crítico, que se llama **nodo de una tangente estable (inestable)**. La forma de las órbitas en los dos casos podría ser también la del tercer dibujo (esto se precisa con facilidad acudiendo al campo **v** de la sección anterior).



Autovalores complejos $\lambda=p\pm qi$. La solución es

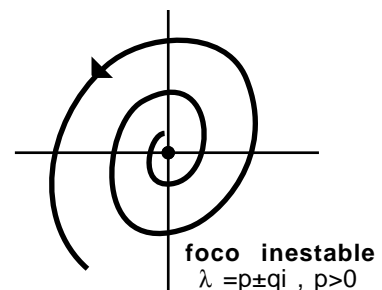
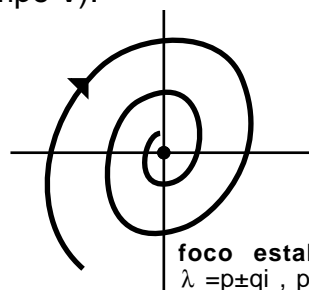
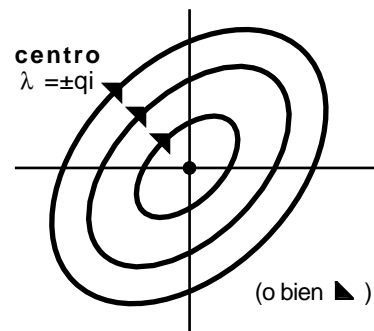
$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} c_1 \cos qt + c_2 \sin qt \\ c_3 \cos qt + c_4 \sin qt \end{pmatrix} e^{pt}$$

donde las c_i son constantes reales de las cuales sólo dos son arbitrarias.

Si $p=0$, todas las soluciones son periódicas y las órbitas son curvas cerradas que rodean el origen, que se llama **centro** (el sentido de giro lo da el campo **v**).

Si $p < 0$ la exponencial decreciente obliga a las orbitas a cerrarse en espiral cuando $t \rightarrow \infty$ hacia el origen, que se llama **foco estable**.

Si $p > 0$ las espirales corresponden a soluciones que se alejan del punto crítico que es un **foco inestable**.



La forma de las espirales podría ser también la del dibujo de la izquierda (como siempre lo precisaremos a la vista del campo **v**).

Consideremos ya el sistema no lineal [S] $\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$ y sea $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ punto crítico.

Desarrollando por Taylor la funciones **f** y **g** en torno a \mathbf{x}_0 y llevando después este punto al origen mediante el cambio $u=x-x_0$, $v=y-y_0$ (o lo que es equivalente, haciendo primero el cambio y desarrollando luego en torno a $u=v=0$) se obtiene:

$$\begin{cases} u' = f_x(x_0,y_0)u + f_y(x_0,y_0)v + R_f(u,v) \\ v' = g_x(x_0,y_0)u + g_y(x_0,y_0)v + R_g(u,v) \end{cases} \text{ con } R_f, R_g = o(\sqrt{u^2+v^2}) \text{ si } u,v \rightarrow 0$$

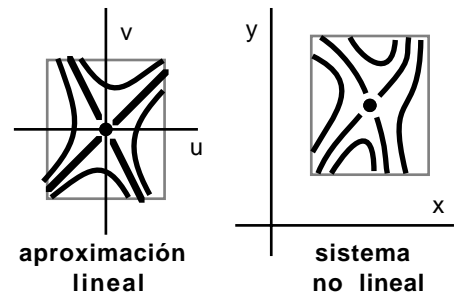
Como R_f y R_g son pequeños es de esperar que (cerca del origen) sean similares las órbitas de este sistema y las de la aproximación lineal obtenida ignorando los términos no lineales. El siguiente teorema nos precisará que esto es cierto si el sistema lineal es de cualquiera de los tipos clasificados anteriormente, salvo en el caso de los centros.

Llamemos $[A]$ al sistema $\mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{u}$, con $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ y $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$.

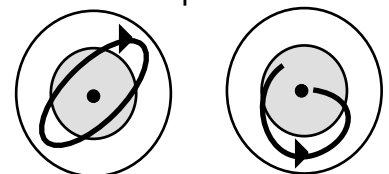
Suponemos que $|\mathbf{A}| \neq 0$. Diremos entonces que \mathbf{x}_0 es **punto crítico elemental** de $[S]$. Del teorema de la función implícita se deduce entonces que \mathbf{x}_0 es aislado, es decir, que existe un entorno de \mathbf{x}_0 en el no hay más puntos críticos (un punto con $|\mathbf{A}| = 0$ puede no ser aislado y si lo es no se parece al origen, no aislado, de la aproximación lineal).

Teor 1. Si el origen es un nodo, un punto silla o un foco de $[A]$ entonces \mathbf{x}_0 es un punto crítico del mismo tipo de $[S]$, con el mismo caracter de estabilidad. Si el origen es un nodo estelar o de una tangente de $[A]$ y las funciones f y g tiene derivadas parciales de segundo orden continuas entonces \mathbf{x}_0 es un nodo del mismo tipo (y la misma estabilidad) del sistema no lineal $[S]$. Las órbitas rectas que en los nodos y puntos sillas de $[A]$ llegan o salen del origen se deforman, en general, en curvas de $[S]$ que llegan o salen de \mathbf{x}_0 , pero manteniendo la tangencia dada por los vectores propios. Si el origen es un centro de la aproximación lineal y las funciones f y g son analíticas entonces \mathbf{x}_0 es o un centro, o un foco estable o un foco inestable en el sistema no lineal.

La demostración del teorema es complicada y no la damos. No es extraño que sean los centros los únicos puntos críticos que no se conservan pues los pequeños términos no lineales pueden hacer que las órbitas dejen de cerrarse sobre sí mismas. De otra forma: una pequeña perturbación puede apartar los autovalores del eje imaginario. Por la misma razón podría pensarse que también puede separar dos autovalores iguales, pero si f y g son regulares esto no sucede (si no lo son puede cambiar el nodo en uno de otro tipo o en un foco). Así pues, analizando sistemas lineales podemos, casi siempre, conocer la forma de las órbitas en un entorno de cada punto crítico (fuera de ese entorno las órbitas pueden ser totalmente diferentes de las del lineal), lo que constituye el paso principal hacia la búsqueda del mapa de fases global de $[S]$. En muchos problemas físicos, además, lo que se busca es precisamente el comportamiento de las soluciones cerca de las soluciones de equilibrio.



Es fácil extraer de este teorema conclusiones sobre la **estabilidad** de las soluciones de equilibrio, semejantes a las vistas para las ecuaciones autónomas de primer orden. El significado geométrico sobre el plano de fases de esta estabilidad es claro: \mathbf{x}_0 es estable si las órbitas que parten suficientemente cerca no se salen de cualquier círculo de radio prefijado. Es asintóticamente estable si además las órbitas tienden a \mathbf{x}_0 cuando $t \rightarrow \infty$.



Teor 2. Si los autovalores de \mathbf{A} tienen parte real negativa \mathbf{x}_0 es una solución de equilibrio asintóticamente estable de $[S]$. Si alguno de los autovalores tiene parte real positiva \mathbf{x}_0 es inestable.

(como siempre nos queda la duda de lo que sucede para autovalores con $\text{Re}\lambda = 0$)

La inestabilidad de algunas soluciones no constantes también es clara a la vista de un mapa de fases: si las órbitas se alejan, también lo hacen las soluciones de las que son proyección. Pero la estabilidad no se puede ver: órbitas próximas pueden corresponder a soluciones muy diferentes (por ejemplo las órbitas de un sistema lineal con un punto silla se pegan entre sí y sin embargo todas las soluciones son inestables).

Ej 1. $\begin{cases} x'=y(x-2) \\ y'=x(y-2) \end{cases}$ Sus puntos críticos son $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

La aproximación lineal $\begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x-2 \\ y-2 & x \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = \pm 2, \text{ con vectores propios: } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

El sistema no lineal tiene un punto silla en el origen.

En $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = 2$ doble y es un nodo estelar.

Completamos esta información local con el campo \mathbf{v} (la ecuación diferencial de la órbitas es separable, pero proporciona una expresión poco manejable).

Los vectores del campo son verticales cuando $x'=0$, es decir si $y=0$ o si $x=2$ (esto garantiza que la recta $x=2$ es un órbita (más exactamente: está formada por tres órbitas)). Son horizontales si $y'=0 \rightarrow x=0, y=2$ (que también es tangente al campo y es órbita).

Dibujamos además algunos vectores del campo:

$$\mathbf{v}(x,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2x \end{pmatrix}, \mathbf{v}(0,y) = \begin{pmatrix} -2y \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(x,x) = \begin{pmatrix} x(x-2) \\ x(x-2) \end{pmatrix}, \mathbf{v}(-1,3) = \begin{pmatrix} -9 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(3,-1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v}(-1,1) = \mathbf{v}(1,3) = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(1,-1) = \mathbf{v}(3,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(3,4) = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(4,3) = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(se observa una simetría respecto a $y=x$ que podíamos haber visto en el sistema; esta bisectriz está formada por órbitas porque los vectores sobre ella $[\mathbf{v}(x,x)]$ tienen su misma dirección; excepcionalmente, la órbita recta estable del punto silla del sistema lineal se ha conservado, aunque la inestable se ha deformado).

Con toda esta información tenemos que el mapa de fases es más o menos el del dibujo. No sabemos resolver el sistema, pero tenemos a la vista propiedades esenciales de las soluciones. Citemos algunas de ellas: que las dos soluciones constantes son inestables estaba claro desde que calculamos los autovalores de las aproximaciones lineales; el segmento que une los puntos críticos corresponde a una solución definida para todo t (pues está acotada); esta solución es inestable, pues mientras ella tiende a $\mathbf{0}$ la x de algunas cercanas y la y de otras tiende a $-\infty$; no podemos saber, sin embargo, si las soluciones no acotadas están o no definidas para todo t , ni si, por ejemplo, la solución cuya proyección es $y=2$ y cuya x tiende a $-\infty$ es o no estable.

Ej 2. $\begin{cases} x'=8x-y^2 \\ y'=-6y+6x^2 \end{cases}$ Sus puntos críticos son $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

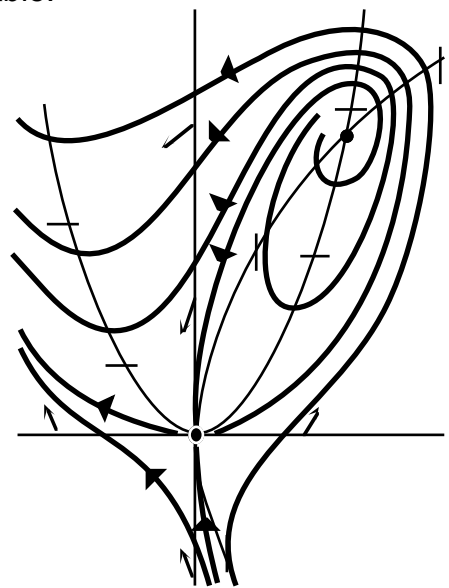
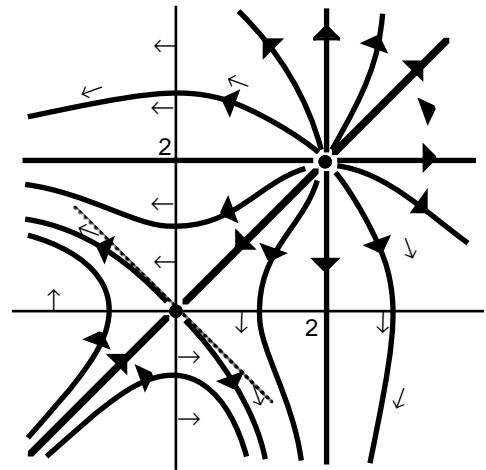
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es un punto silla con $\lambda=8 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\lambda=-6 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ es un foco inestable ($\lambda=1 \pm i\sqrt{143}$).

El campo es horizontal si $y=x^2$ y vertical si $8x=y^2$.

Sobre los ejes: $\mathbf{v}(x,0) = \begin{pmatrix} 8x \\ 6x^2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(0,y) = \begin{pmatrix} -y^2 \\ -6y \end{pmatrix}$.

Estos vectores nos precisan el sentido en el que se abren las espirales del foco y la dirección en que se deforman las órbitas que llegan y parten del punto silla (a partir de ahora llamaremos **separatrices** a estas órbitas, como usualmente se hace). Se tiene, pues, el mapa de fases de la figura.



4.3 Ecuaciones autónomas de segundo orden

Todo lo dicho en las secciones anteriores sobre sistemas autónomos se puede, evidentemente, aplicar al caso particular de las ecuaciones autónomas

[e] $x''=g(x,x')$, o escrita en forma de sistema: [SE] $\begin{cases} x' = v \\ v' = g(x,v) \end{cases}$

(utilizamos la variable v porque en muchos problemas físicos representa una velocidad).

La matriz de la aproximación lineal es $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g_x(x,v) & g_v(x,v) \end{pmatrix}$ evaluada en cada punto crítico.

La ecuación de las órbitas y el campo \mathbf{v} adoptan ahora la forma:

[o] $v \frac{dv}{dx} = g(x,v)$ $\mathbf{v}(x,v) = \begin{pmatrix} v \\ g(x,v) \end{pmatrix}$

Algunas propiedades particulares de los mapas de fases de ecuaciones se deducen inmediatamente de las expresiones anteriores:

- los puntos críticos de las ecuaciones están sobre el eje $v=0$.
[y las x de esos puntos son los ceros de $g(x,0)$]
- las órbitas se dirigen hacia la derecha en el semiplano superior y hacia la izquierda en el inferior
- las órbitas que cortan el eje $v=0$ lo hacen perpendicularmente
- las ecuaciones no poseen nodos estelares
- un vector propio asociado a un autovalor λ es $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$

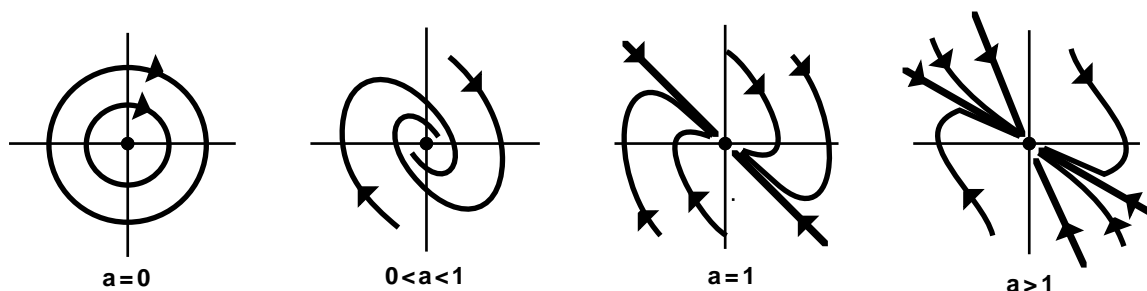
Veamos un par de ejemplos de mapas de fases de ecuaciones que pueden describir sistemas físicos e interpretemos sus órbitas:

Ej 1. $x''+2ax'+x=0$, con $a \geq 0$ [sistema muelle-masa con rozamiento (si $a > 0$)]

Aunque esta ecuación lineal es fácilmente resoluble, también lo es dibujar su mapa de fases. Para todo a el único punto crítico es el origen. Sabemos que los autovalores son las raíces de la ecuación $\lambda^2+2a\lambda+1=0$, es decir: $\lambda = -a \pm [a^2-1]^{1/2}$. Por tanto:

- Si $a=0$, el origen es un centro ($\lambda = \pm i$ y el sistema es lineal)
- Si $0 < a < 1$, es un foco estable (autovalores complejos con $\text{Re} \lambda < 0$)
- Si $a=1$, es un nodo de una tangente estable (con $\lambda = -1$ doble)
- Si $a > 1$, es un nodo estable ($\lambda_2 = -a - [a^2-1]^{1/2} < -1 < \lambda_1 = -a + [a^2-1]^{1/2} < 0$)

Con estos datos y alguna información adicional más (por ejemplo, el campo \mathbf{v} sobre el eje $x=0$ y los puntos en que este campo es horizontal) completamos los mapas de fases:



En todos los casos el origen representa la solución trivial correspondiente a la situación estable de la masa sobre la posición de equilibrio sin velocidad inicial.

Si $a=0$, cada órbita no trivial describe un movimiento oscilatorio no amortiguado en torno al equilibrio: si inicialmente, por ejemplo, está en el origen con una velocidad v positiva a partir de entonces va aumentando la x hasta su valor máximo en el instante en que la v se hace 0; disminuye la x a partir de entonces (la v (en valor absoluto) pasa por un máximo y luego disminuye cuando el movimiento se opone a la fuerza de recuperación del muelle); avanza después la masa hacia la posición de equilibrio a la que llega con la misma velocidad inicial y repite este movimiento indefinidamente.

Si $0 < a < 1$, la masa pasa infinitas veces por la posición de equilibrio, pero la amplitud de la oscilación va decreciendo hacia 0 según pasa el tiempo.

Si $a \geq 1$, todas las órbitas describen movimientos de la masa que tienden al equilibrio, pero al ser mayor el rozamiento, no son posibles las oscilaciones. Dependiendo de su posición y velocidad iniciales, o bien tiende indefinidamente hacia la posición de equilibrio sin llegar a superarla, o bien la cruza una única vez.

Ej 2. $x'' = x^2 + 3x - 4x'$

Puede describir el movimiento de una partícula sobre el eje de las x , sometido a una fuerza que sólo depende de su posición [$F(x) = x^2 + 3x$] y con un rozamiento proporcional a su velocidad [$-4x'$].

Dibujemos sus órbitas.

En forma de sistema:

$$\begin{cases} x' = v \\ v' = x^2 + 3x - 4v \end{cases}$$

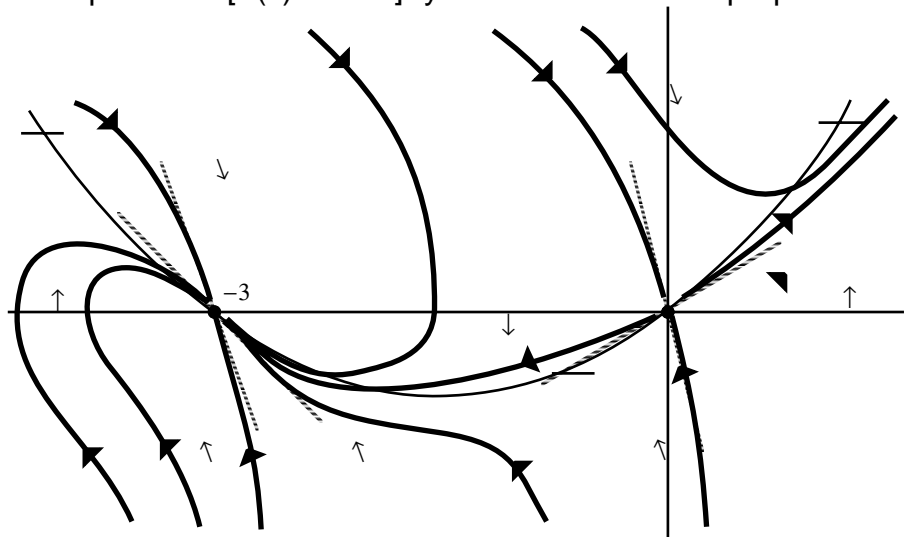
Hallando sus puntos críticos y evaluando

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2x+3 & -4 \end{pmatrix}$$

en cada uno de ellos se obtienen la matrices:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = -1, -3$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = -2 \pm \sqrt{7}$$



Por tanto son un nodo estable y un punto silla.

El campo es horizontal sobre la parábola $v = (x^2 + 3x)/4$. Valores interesantes de v :

$$v(-3, v) = v(0, v) = v \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}, v(-4, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v(-4, 3) = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix}, v(-2, -1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, v(-2, -3) = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \end{pmatrix}$$

(estos últimos vectores indican como se deforman las rectas del nodo lineal)

Evaluamos v sobre las separatrices del lineal, es decir $v(x, \lambda x)$. Unos pocos cálculos indican que se deforman de la manera dibujada y completamos el mapa de fases.

Interpretemos alguna de las órbitas. Observemos que el sentido de las fuerzas es el esquematizado por: $\rightarrow -3 \leftarrow 0 \rightarrow$ (por eso el primer punto es estable y el segundo es inestable). Supongamos que tenemos la partícula inicialmente entre -3 y 0 y discutamos su movimiento para diferentes velocidades v_0 iniciales. Si $v_0 < 0$ la partícula tiende hacia el equilibrio estable (llegando a superarlo una vez o no, dependiendo de la magnitud de v_0). Si $v_0 > 0$ y pequeño, no puede superar la fuerza que se le opone, llega a un x máximo y después regresa acercándose indefinidamente a -3. Si $v_0 > 0$ y grande consigue cruzar $x=0$ y, ayudado por la fuerza, tiende a ∞ (¿en tiempo finito?) al tiempo que aumenta su velocidad. Si $v_0 > 0$ es tal que estamos sobre la separatriz del punto silla tenemos un movimiento irrealizable en la práctica: acercarse indefinidamente al equilibrio inestable.

4.4 Sistemas y ecuaciones exactos

Un sistema del tipo [S] $\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$ se llama **exacto** si $f_x(x,y) + g_y(x,y) = 0$

(suponemos f y g funciones de clase 1 en todo \mathbf{R}^2 como hicimos en la sección 4.1).

Si [S] es exacto, entonces la ecuación diferencial de sus órbitas

$$[o] \quad \frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)} \quad , \text{ es decir, } g(x,y) - f(x,y) \frac{dy}{dx} = 0$$

es también exacta, y por tanto resoluble: **existe una** $H(x,y)$ **tal que** $f = H_y$ **y** $g = -H_x$, **y las órbitas de [S] vienen dadas por** $H(x,y) = C$. Además se tiene el siguiente resultado sobre la clasificación de sus puntos críticos:

Teor 1. Los puntos críticos elementales de un sistema exacto sólo pueden ser centros o puntos silla.

La ecuación de autovalores de la matriz de la aproximación lineal $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$ en cualquier punto crítico \mathbf{x}_0 es de la forma $\lambda^2 + |\mathbf{A}| = 0$ (pues $f_x + g_y = 0$), con lo que o bien (si el determinante es negativo) tiene dos raíces reales de distinto signo y el punto crítico es un punto silla (tanto del sistema lineal como del no lineal) o bien (si $|\mathbf{A}| > 0$) las raíces son imaginarias puras y se tiene un centro en la aproximación lineal. Además es fácil ver, por ser H continua, que $H(x,y) = H(x_0, y_0)$ contiene además del punto crítico \mathbf{x}_0 todas las órbitas que tienden a dicho punto cuando t tiende a $+\infty$ o $-\infty$, con lo que el sistema [S] no puede tener focos (ni nodos) y los centros del lineal lo son también en el no lineal.

Ej 1. $\begin{cases} x' = x - 2xy \\ y' = x - y + y^2 \end{cases}$ Es exacto: $f_x + g_y = 1 - 2y - 1 + 2y = 0$. Hallando la H tal que $H_x = -x + y - y^2$,

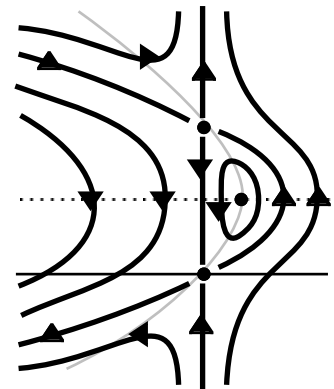
$H_y = x - 2xy$, obtenemos sus órbitas $H(x,y) = xy - xy^2 - \frac{x^2}{2} = C$.

Los puntos críticos son $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ [autovalores $\lambda = \pm 1$: son

puntos silla] y $\begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ [$\lambda = \pm i\sqrt{2}$: centro también del no lineal].

Dibujar todas las curvas $H=C$ es complicado pero para $C=0$ tenemos dos curvas sencillas $x=0$ y $x=2(y-y^2)$ (cada una de ellas formada por cinco órbitas distintas). El campo \mathbf{v} es horizontal sobre $x=y-y^2$ y vertical en la órbita $x=0$ y en la recta $y=1/2$. Podemos dibujar ya aproximadamente las órbitas, si bien aún no están orientadas. Para ello basta dar

un único valor a \mathbf{v} o considerar algún vector propio de los puntos silla. Estudiemos también la prolongabilidad de alguna solución del sistema: por ejemplo, sobre $x=0$ es $y' = -y + y^2$, y podemos afirmar (resolviendo esta ecuación o comparándola con otras de la forma $y' = ay^2$) que ninguna de las soluciones cuya proyección es una de las semirrectas de $x=0$ está definida para todo t (se sabía que sí lo están las asociadas al segmento vertical). Análogamente, también explotan para algún t las soluciones no acotadas cuya órbita está sobre $x=2(y-y^2)$ pues satisfacen $y' = y - y^2$. Es difícil tratar el resto de soluciones no periódicas por ser complicada la expresión de su órbita.



Caso particular de los sistemas exactos, son las **ecuaciones exactas**: $x''=g(x)$,

es decir $\begin{cases} x' = v \\ v' = g(x) \end{cases}$. La ecuación [0] es ahora $v \frac{dv}{dx} = g(x)$ y las órbitas vienen dadas por:

$$H(x,v) = \frac{v^2}{2} - \int g(x) dx = C \quad , \text{ o sea, } \frac{v^2}{2} + V(x) = C \quad , \text{ si } V(x) = -\int g(x) dx$$

(si consideramos que la ecuación describe el movimiento (sin rozamiento) sobre el eje x de una partícula sometida a una fuerza que sólo depende de su posición, la H es la energía total , $v^2/2$ es la cinética y $V(x)$ es la potencial). A la vista de la solución está claro que **las órbitas son simétricas respecto al eje x** y que la órbita u órbitas correspondientes a cada valor de C son curvas definidas en los intervalos del eje x para los que $V(x) \leq C$ y que cortan dicho eje en los x tales que $V(x)=C$. Con lo anterior y el teorema siguiente podremos dibujar el mapa de fases conociendo la gráfica de $V(x)$.

Teor 2. Si V tiene un mínimo en x_0 entonces $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es un centro del mapa de fases. Si V tiene un máximo, \mathbf{x}_0 es un punto silla.

Si V tiene un máximo o mínimo en x_0 entonces $V'(x_0) = -g(x_0) = 0$ con lo que \mathbf{x}_0 es punto crítico. La ecuación de autovalores en ese punto es $\lambda^2 + V''(x_0) = 0$ y por tanto se trata de un centro si $V''(x_0) > 0$ (mínimo de V) o de un punto silla si $V''(x_0) < 0$ (máximo de V) [analizando la ecuación de las órbitas se puede ver que el teorema es válido también aunque \mathbf{x}_0 sea no elemental ($V''(x_0) = 0$)].

Ej 2. $x'' = 1 - x^2 \rightarrow V(x) = -x + \frac{x^3}{3}$.

Usando sólo la gráfica de $V(x)$ deducimos el mapa de fases del dibujo inferior:

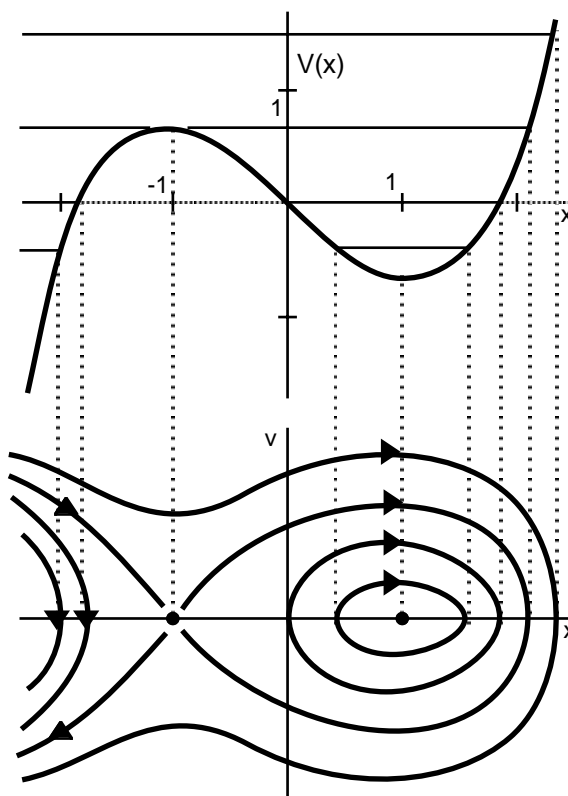
Como V posee un máximo en $x = -1$ y un mínimo en $x = 1$ el mapa de fases posee el punto silla y el centro dibujados abajo.

Dibujamos ahora diferentes rectas $V=C$ y las órbitas correspondientes: $v^2/2 + V(x) = C$.

Para $C=0$, $V(x) \leq 0$ si $0 \leq x \leq \sqrt{3}$ (y la órbita, que es una curva simétrica definida en ese intervalo y que corta $v=0$ en sus extremos, se trata de una curva cerrada rodeando al mínimo) o si $x \leq -3$ (la órbita sólo corta $v=0$ en $x=-3$ y por tanto es abierta). Similares son las dos órbitas dibujadas para un $C < 0$.

La $V=C$ que pasa por el máximo de V nos da una curva del mapa de fases que corta $v=0$ en dos puntos uno de los cuales es el punto silla (nos proporciona, pues, cuatro órbitas: el punto, la órbita que sale y entra en él y las separatrices de la izquierda).

Para un C mayor se tiene la otra órbita. La orientación es la de toda ecuación (hacia la derecha arriba, hacia la izquierda abajo).



[Como las órbitas son $\frac{dx}{dt} = v = \pm [2x - \frac{2x^3}{3} + C]^{1/2}$ las soluciones se obtendrían a partir de:

$$\pm \int [2x - \frac{2x^3}{3} + C]^{-1/2} dx = t + K \quad , \text{ pero la integral elíptica de la izquierda no es calculable].$$

4.5 ¿Centro o foco?

Ya vimos en la sección 4.2 que el único caso en que no basta el estudio de la aproximación lineal para clasificar un punto crítico elemental \mathbf{x}_0 de un sistema no lineal

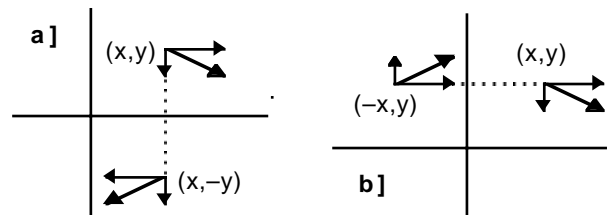
$$[S] \quad \begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$$

es el caso en que el lineal posea un centro, ya que entonces el punto de [S] puede también ser un centro o bien ser un foco estable o inestable. Tratamos en la sección anterior una situación en la que el centro del lineal se conservaba: si [S] era **exacto**. En esta sección veremos otras técnicas para atacar el problema.

También se conservará un centro si las órbitas de [S] poseen **simetría** respecto a alguna recta que pase por \mathbf{x}_0 (las órbitas en torno a un centro pueden ser asimétricas y hay puntos críticos con simetría especular (los focos, claramente no la tienen) que no son centros, pero si un punto con esta simetría es centro o foco, necesariamente será centro). El análisis de las simetrías se podrá hacer a la vista de las propias órbitas, en el caso excepcional de que la ecuación diferencial de las órbitas sea resoluble, o a partir del propio campo \mathbf{v} . Un ejemplo de esto último lo da el siguiente teorema:

Teor 1. Si \mathbf{x}_0 es punto crítico de [S], la aproximación lineal posee un centro y o bien **a]** \mathbf{x}_0 está sobre el eje x , $f(x,-y) = -f(x,y)$, $g(x,-y) = g(x,y)$ o bien **b]** \mathbf{x}_0 está sobre el eje y , $f(-x,y) = f(x,y)$, $g(-x,y) = -g(x,y)$ entonces es un centro del sistema no lineal [S]

Las hipótesis sobre f y g aseguran en el caso **a]** que las órbitas son simétricas respecto al eje x y en el **b]** que lo son respecto al eje y (y que se recorren en sentidos opuestos a cada lado del eje, como debe ocurrir en un centro). De ello se deduce el resultado.



Ej 1. $x'' = \sin(x+x'^2)$, es decir, $\begin{cases} x' = v \\ v' = \sin(x+v^2) \end{cases}$. Clasifiquemos sus puntos críticos.

Estos resultan ser $\begin{pmatrix} k\pi \\ 0 \end{pmatrix}$, con aproximación lineal $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \cos(x+v^2) & 2v\cos(x+v^2) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^k & 0 \end{pmatrix}$.

Por tanto, si k es par se tratan de puntos silla y si k es impar son centros del lineal. Como f es impar y g es par en v , son también centros del sistema no lineal.

Ej 2. $\begin{cases} x' = x(1-y) \\ y' = y(x-1) \end{cases}$ Sus puntos críticos son $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

El primero es punto silla y el segundo centro del lineal. Podríamos trasladar éste al origen haciendo $u=x-1$, $v=y-1$ e intentar aplicar el teorema 1, pero se comprueba que el sistema en uv no satisface ninguna de las dos parejas de condiciones. En este caso se pueden calcular las órbitas (ecuación separable) y obtener: $\ln|y-y| + \ln|x-x| = C$. Como esta expresión no varía al cambiar los papeles de x e y las órbitas son simétricas respecto a la recta $y=x$, con lo que el centro lo sigue siendo en el no lineal. [Este sistema es, para unos parámetros muy concretos, el de Lotka-Volterra que rige la evolución de la población de dos especies animales en relación predador-presa].

En algunas ocasiones podremos precisar que el centro se transforma en un foco estable o inestable analizando el sistema escrito en **coordenadas polares** (aunque en la mayoría de los casos esto nos proporcione un sistema más complicado que el inicial). Derivando las relaciones $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ se obtiene

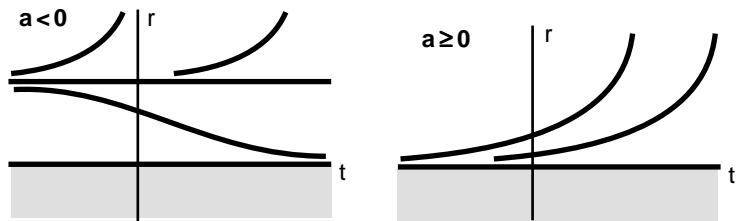
$$\begin{cases} r' \cos \theta - \theta' r \sin \theta = f(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ r' \sin \theta + \theta' r \cos \theta = g(r \cos \theta, r \sin \theta) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r' = \cos \theta f(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta g(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ \theta' = \frac{1}{r} [\cos \theta g(r \cos \theta, r \sin \theta) - \sin \theta f(r \cos \theta, r \sin \theta)] \end{cases}$$

En vez de seguir con resultados generales pasamos a analizar un ejemplo concreto:

Ej 3. $\begin{cases} x' = ax - 2y + x^3 \\ y' = 2x + ay + 2x^2y + y^3 \end{cases}$ Clasifiquemos el origen para todo valor de a .

La matriz de la aproximación lineal $\begin{pmatrix} a & -2 \\ 2 & a \end{pmatrix}$ tiene por autovalores $\lambda = a \pm 2i$, con lo que si $a < 0$ es foco estable, si $a > 0$ es foco inestable y si $a = 0$ es centro del lineal. Ya que el sistema no es exacto ni simétrico hacemos el trabajo de pasar a polares, obteniendo:

$$\begin{cases} r' = ar + r^3 \\ \theta' = 2 + r^2 \cos \theta \sin \theta \end{cases}$$



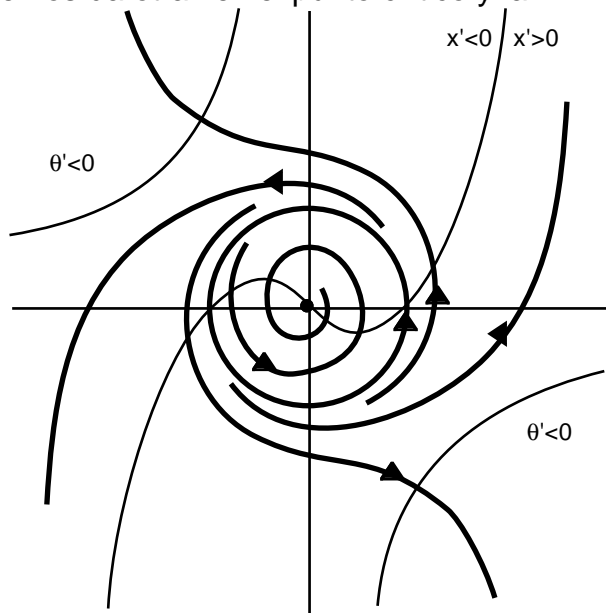
Por suerte hemos obtenido una sencilla ecuación independiente de θ para la r fácil de dibujar. Al crecer con el tiempo la distancia al origen podemos asegurar para

el caso $a=0$ que el origen, que no sabíamos si era centro o foco, es un foco inestable.

Utilicemos la expresión en polares para dibujar el mapa de fases para un valor de a concreto: $a = -1$. La ecuación autónoma $r' = -r + r^3$ tiene entonces la única solución de equilibrio $r = 1$ en $r > 0$ (además tiene la $r = 0$ que nos da otra vez el punto crítico y la $r = -1$ carece de sentido en coordenadas polares).

Para $r = 1$ se tiene $\theta' = 2 + \sin 2\theta / 2 > 0$. Existe por tanto una órbita (la circunferencia unidad) tal que $r = 1$ para todo t y tal que su θ crece con el tiempo [a una órbita cerrada aislada como esta se le llama **ciclo límite**]. Como se ve en la ecuación autónoma el resto de las órbitas tienden hacia ella cuando $t \rightarrow \infty$.

Podemos también asegurar que no hay más puntos críticos que el origen (difícil sería verlo en la expresión cartesiana) ya que no tiene otras soluciones $r' = \theta' = 0$ (para una solución constante tanto la r como la θ deben permanecer constantes). Dibujando además la curva de puntos con $x' = 0$ y $\theta' = 0$ ($y = (x^3 - x)/2$ y $xy = -2$, respectivamente) se puede ya dibujar el mapa de fases. Es fácil determinar qué soluciones de este sistema



están definidas para todo t : lo están las periódicas asociadas al ciclo límite y las asociadas a las órbitas contenidas en su interior, por estar acotadas; llegan a infinito en tiempo finito aquellas cuya proyección cae fuera del ciclo límite, pues lo hace su distancia al origen, como se ve con facilidad a partir de la ecuación para r' .

Otra técnica para distinguir centros de focos no lineales serán las **funciones de Lyapunov** que se verán en la última sección del capítulo.

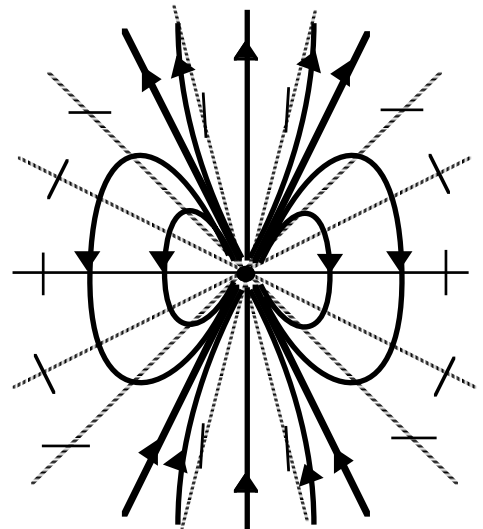
4.6 Ejemplos con puntos no elementales.

Dibujemos cuatro mapas de fases para los que no podremos clasificar sus puntos críticos (serán no elementales o no los tendrán) y por lo tanto nos basaremos en la ecuación de sus órbitas y en el campo \mathbf{v} . En alguno de estos ejemplos, además, el sistema no será de clase 1 en todo el plano, a diferencia de lo que hemos supuesto hasta ahora. Estudiaremos también esas propiedades de las soluciones que involucran a la variable t y que normalmente no podemos deducir del dibujo de las órbitas.

Ej 1. $\begin{cases} x' = 3xy \\ y' = 4y^2 - 4x^2 \end{cases}$ El único punto crítico es el $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

con aproximación lineal $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y por tanto se trata de un punto no elemental. La ecuación diferencial de sus órbitas $\frac{dy}{dx} = \frac{4y^2 - 4x^2}{3xy}$ se puede resolver, ya que es homogénea o de Bernoulli, obteniéndose:
 $y^2 = 4x^2 + Cx^{8/3}$ (si $C=0$ se tienen las rectas $y = \pm 2x$).

Mejor que dibujar estas curvas, trazamos algunas isoclinas, que por ser la ecuación homogénea son rectas $y = mx$ pasando por el origen. La pendiente de las órbitas sobre ellas es: $K = (4m^2 - 4)/3m$. Para $m = 0, \pm 1/2, \pm 1, \pm 2, \pm 4$ es $K = \infty, \pm 2, 0, \pm 2, \pm 5$, que son las dibujadas. Para orientar las órbitas vemos que $\mathbf{v}(0, y)$ es un vector vertical apuntando hacia arriba (que además nos da las órbitas verticales no recogidas en la solución).



Observemos que aparecen conjuntos de órbitas (llamadas elípticas) que salen y llegan al punto crítico, situación que no se da en los elementales. Se puede ver que los puntos no elementales aislados o son centros o son focos o existen en torno suyo sectores formados por órbitas elípticas, parabólicas (como las de los nodos o las demás órbitas del ejemplo) o hipérbolicas (como las de los puntos silla).

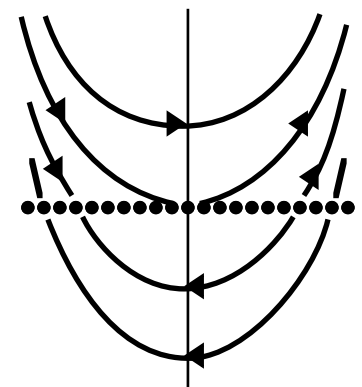
Saquemos alguna conclusión sobre las soluciones: el origen es inestable; la solución que satisface $x(0)=1, y(0)=2$, cuya órbita es $y=2x$, no está definida para todo t , pues para ella $x'=6x^2, y'=3y^2$, con soluciones que explotan a la derecha de $t=0$ (se podrían incluso calcular); la solución con $x(0)=1, y(0)=0$ sí está definida para todo t por estar acotada (no podemos hallarla explícitamente) y con el mapa de fases no se puede ver si es o no estable (aunque su diferencia con las soluciones cercanas tienda a 0 cuando $t \rightarrow \infty$, esto no basta en sistemas para asegurar su estabilidad).

Ej 2. $x'' = 2xx'$ $\rightarrow \begin{cases} x' = v \\ v' = 2xv \end{cases} \rightarrow \frac{dv}{dx} = 2x \rightarrow v = x^2 + C = \frac{dx}{dt}$

El eje x está lleno de puntos críticos no aislados (y no elementales). Parte de las parábolas están formadas por varias órbitas, recorridas como siempre en las ecuaciones. Los puntos críticos con $x \geq 0$ son inestables. Los de $x < 0$ son estables (no asintóticamente). Las soluciones de $v < 0$ están definidas para todo t . Para ver que no lo están las de $v > 0$ podemos comparar la $x' = x^2 + C$ o incluso resolverla:

$$t + K = \int \frac{dx}{x^2 + C} \rightarrow x = \sqrt{C} \operatorname{tag}(\sqrt{C} t + K), \text{ si } C > 0; \quad x = \frac{1}{K - t}, \text{ si } C = 0;$$

$$x = \sqrt{-C} \frac{1 - Ke^{2\sqrt{-C}t}}{1 + Ke^{2\sqrt{-C}t}}, \text{ si } C < 0; \text{ además de las } x = K \text{ perdidas en el cálculo.}$$



Ej 3. $x'' = \sqrt{x}$ La ecuación sólo tiene sentido para $x \geq 0$.

El único punto crítico (no elemental) es el origen y por tanto hay una única solución constante: $x=0$.

Las órbitas son $v \frac{dv}{dx} = \sqrt{x} \rightarrow v^2 = \frac{4}{3} x^{3/2} + C$

Dibujamos las isoclinas: $\frac{\sqrt{x}}{v} = K$, para $K=0, \pm 1/2, \pm 1, \pm 2, \infty$

La curva de puntos de inflexión de las órbitas es $v^2 = 2x^{3/2}$

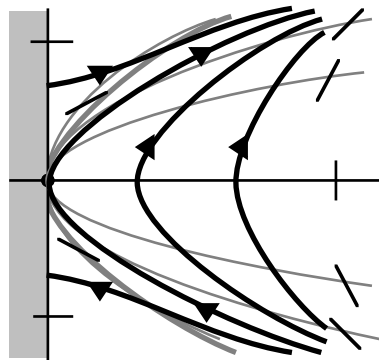
La orientación es la típica de las ecuaciones.

Calculemos y estudiemos la estabilidad de la solución con $x(2)=1/9$, $x'(2)=2/9$. Para hallar la órbita asociada imponemos que $v(x=1/9)=2/9 \rightarrow C=0$. Así pues:

$$v = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} x^{3/4} = \frac{dx}{dt} ; 2\sqrt{3} x^{1/4} = t+k ; x = \frac{(t+k)^4}{144} ; \text{imponiendo } x(2)=1/9 \rightarrow x = \frac{t^4}{144}$$

(en $x=0$ podía fallar la unicidad y, como se observa, existen dos soluciones que satisfacen $x(0)=x'(0)=0$: la que acabamos de calcular y la $x=0$)

$\left| \frac{2}{\sqrt{3}} x^{3/4} - \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{x^{3/2} + C} \right| \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$, pero ello no implica que la solución considerada sea estable (además, no podemos hallar la $x(t)$ si $C \neq 0$).



Ej 4. $x'' = -x^{-2}$ No tiene puntos críticos.

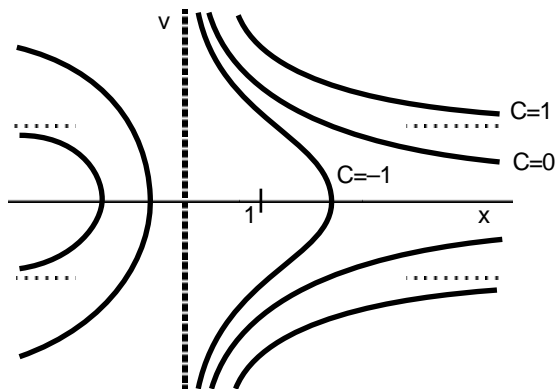
(describe, para $x > 0$, el movimiento bajo un campo gravitatorio en unidades adecuadas)

Sus órbitas son $x = \frac{2}{v^2 - C} \leftrightarrow v = \pm \sqrt{C + \frac{2}{x}}$.

(la interpretación física es fácil, por ejemplo, si $x(0)=2$, $x'(0)=v_0$ y $v_0 < 1$, la partícula acaba en el origen; $v_0=1$ es la llamada velocidad de escape ($x=2$): para velocidades iniciales mayores que ella la partícula se aleja del origen indefinidamente)

Determinemos el tiempo T que tardaría una partícula, inicialmente en reposo en $x=2$, en llegar al origen. La órbita correspondiente ($v(x=2)=0$) es la de $C=-1$. Así pues:

$$T = \int_0^T dt = - \int_2^0 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{2-x}} = \left[\sqrt{x} \sqrt{2-x} + 2 \arctan \sqrt{\frac{2}{x} - 1} \right]_2^0 = \pi.$$

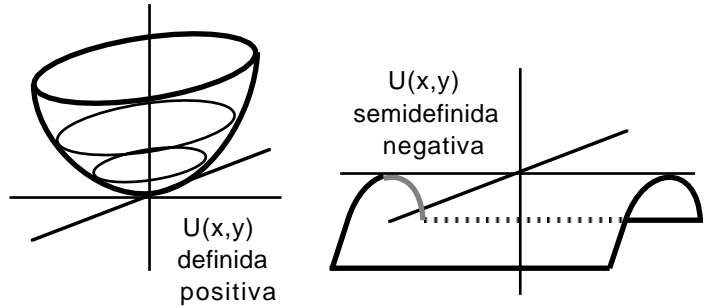


4.7 Funciones de Lyapunov

El método directo de Lyapunov tiene como objetivo determinar la estabilidad de un punto crítico. Esto, en la mayoría de los casos, es más fácil hacerlo analizando la aproximación lineal, pero cuando ésta no decida (centros o puntos no elementales) será cuando acudamos a dicho método.

Antes de dar los resultados necesitamos unas definiciones previas:

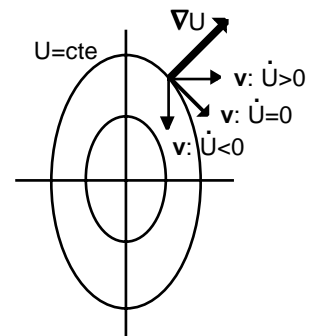
Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ que contiene al origen en su interior. Decimos que una función $U(x,y)$ es **definida positiva** en D si $U(0,0)=0$ y $U(x,y)>0$ para cualquier otro punto de D . Si sustituimos $>$ por $<$ ó \leq , la U se dice, respectivamente, **definida negativa** o **semidefinida negativa**. Por ejemplo $U(x,y)=x^2+2y^2$ es definida positiva y $U(x,y)=-x^2$ es semidefinida negativa en todo \mathbb{R}^2 .



Dados [S] $\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$ y $U(x,y)$ denotaremos $\dot{U}(x,y) = U_x(x,y)f(x,y) + U_y(x,y)g(x,y)$
(f, g y U de clase 1)

Teor 1. Supongamos que el origen es punto crítico de [S]. Si existen un conjunto D y una función U de clase 1 definida positiva en D tal que \dot{U} es definida negativa, semidefinida negativa o definida positiva en D , entonces el origen es, respectivamente, asintóticamente estable, estable o inestable. A una U con cualquiera de esas propiedades se le llama **función de Lyapunov**.

La idea de la demostración es sencilla: como $\dot{U} = \nabla U \cdot \mathbf{v}$, el ∇U es perpendicular a las curvas $U = \text{cte}$ (curvas cerradas que rodean el origen) y \mathbf{v} es tangente a las órbitas, el hecho de que el producto escalar sea menor, menor o igual, o mayor que 0 en D implica que las órbitas cruzan todas las curvas de nivel de U contenidas en D hacia dentro, que no las cruzan hacia fuera o que sí lo hacen.



El problema básico de este método es encontrar una U adecuada. En un problema físico se puede intentar probar como U la energía total del sistema, pero en otras ocasiones deberemos acudir a tanteos con posibles funciones U que sepamos que son definidas positivas (y en muchas ocasiones no sabremos encontrar la función de Lyapunov).

Ej 1. $\begin{cases} x' = y + x^3 - xy^2 \\ y' = -x + y^3 \end{cases}$ El origen es un centro de la aproximación lineal.

Buscamos una U tanteando con las funciones definidas positivas mas sencillas:
 $U(x,y) = ax^2 + by^2$, $a, b > 0 \rightarrow \dot{U} = 2ax(y + x^3 - xy^2) + 2by(-x + y^3) = 2(a-b)xy + 2ax^4 - 2ax^2y^2 + 2by^4$
 Para que tenga signo definido debe ser $a=b$ ($=\frac{1}{2}$, por ejemplo) $\rightarrow \dot{U} = x^4 - x^2y^2 + y^4$
 que es definida positiva en todo \mathbb{R}^2 ($\dot{U} = (x^2 - y^2)^2 + x^2y^2$). El origen es inestable (foco).

Ej 2. $x''+x'+x^3=0 \rightarrow \begin{cases} x' = v \\ v' = -v-x^3 \end{cases}$. El origen no es elemental.

Podemos interpretar la ecuación como describiendo el movimiento con rozamiento de un punto sobre el eje x sometido a una fuerza $-x^3$. Esto nos hace suponer que el origen es asintóticamente estable y nos sugiere probar como U la energía total:

$$U = \frac{v^2}{2} + \frac{x^4}{4} \rightarrow \dot{U} = x^3v+v(-v-x^3) = -v^2 \text{ semidefinida negativa.}$$

El teorema nos asegura que el origen es al menos estable, pero lo esperado es la estabilidad asintótica (de hecho, dicho teorema es la versión menos fina de todos los que existen: se debería esperar que si, como en el ejemplo, las órbitas cruzan hacia dentro cada curva de nivel excepto en un par de puntos de cada una (los de $v=0$ en este caso) deberíamos tener no sólo estabilidad, sino estabilidad asintótica; aunque no los enunciemos, se pueden encontrar teoremas que precisan esta idea).

Podemos probar la estabilidad asintótica utilizando el teorema dado, aunque para ello hay que tantear con más términos. Haciéndolo se encuentra la siguiente U:

$$U = \frac{(x+v)^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{v^4}{4} \rightarrow \dot{U} = -x^4 - v^4 - x^3v^3 \text{ definida negativa en un entorno del origen}$$

(pues los términos de orden 6, aunque no tienen signo definido, son despreciables respecto a los de orden 4 en las cercanías del origen).