Febrero 89

(28% de aprobados)

1 . Sea el sistema $\begin{array}{l} x' = 2xy \\ y' = 1-x^2+y^2 \end{array}$. **a**. Dibujar su mapa de fases. Elegir entre $\mathbf{b_1}$ y $\mathbf{b_2}$:

$\mathbf{b_1}$. Estudiar qué soluciones del sistema están definidas para todo t de $\mathbf{R}$.

$\mathbf{b_2}$. Hallar las curvas ortogonales a las órbitas del sistema. [3 puntos]

2 . El estudio del movimiento de dos osciladores acoplados conduce a un sistema de la forma:

$$\begin{array}{l} x'' + cx' + a^2x + y = 0 \\ y'' + cy' + a^2y + x = 0 \end{array}$$

a. Determinar qué condiciones deben verificar los coeficientes a y c para que el sistema sea asintóticamente estable.

b. Calcular para $a=1$ y $c=0$ la solución del sistema que satisface $x(0)=1$, $x'(0)=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$. ¿Es estable esta solución? [3 puntos]

3 . Decidir si son ciertas cada una de las siguientes afirmaciones, justificando las respuestas:

a. Por cada punto del plano pasa una única curva integral de $dy/dx = -y^3/x^3$.
b. Todas las soluciones de $dy/dt = 4y + \cos^2 y$ están definidas para todo t de **R**.
c. Hay soluciones de $y'' + 4y = \cos^2 t$ que están acotadas para todo t de **R**.
d. Todas las soluciones de $2ty'' - ty' + e^t y = 0$ tienden a 0 cuando t tiende a 0 . [4 puntos]

Junio 89

(48% de aprobados)

1. Sea $y' = 1 - y^{-2}$.

a. Estudiar si por cada punto del plano pasa una única curva integral. Dibujar aproximadamente las curvas integrales.

b. Sea y^* la solución de la ecuación que satisface $y^*(0)=2$. ¿Para qué valores de la variable independiente está definida y^* ? Calcular aproximadamente $y^*(0.2)$. [4 puntos]

2. Se considera la ecuación $ty'' + ay' = 1$, $a\in\mathbf{R}$ **.**

a. Calcular la solución particular $y_a(t)$ que verifica $y_a(1) = 0$, $y'_a(1) = 0$ para todo valor de a . ¿Es $y_a(t)$ función continua de a ?

b. Discutir la estabilidad de la solución $y_a(t)$. [3 puntos]

3. a. Sea el sistema $\begin{array}{l} x' = x+x^2y \\ y' = y \end{array}$.

Probar que no existen soluciones distintas de la trivial que tiendan hacia (0,0) cuando t tiende a ∞ .

b. Hallar la solución general de $(1+t^2)\, y'' - 2ty' + 2y = 0$. [3 puntos]

Septiembre 89

(39% de aprobados)

1. Sea la ecuación $y' = (x-4y)^{-2}$.
a. Estudiar existencia y unicidad de curvas integrales.
b. Dibujar aproximadamente dichas curvas.
c. Discutir la prolongabilidad de las soluciones. [3 puntos]

2. Resolver el sistema $\begin{array}{l} x' = z+e^t-1 \\ y' = x+y+e^t u_1(t) \\ z' = z-1 \end{array}$ con $x(0) = y(0) = z(0) = 0$. [3 puntos]

3. Dado $\begin{array}{l} x' = x-y^5 \\ y' = x^2-y \end{array}$, estudiar la estabilidad de la solución que verifica $x(7)=y(7)=1$. [2 puntos]

4. Hallar una solución no trivial de la ecuación $ty'' - (3t+1)y' + 9y = 0$. [2 puntos]

Febrero 90 (32% de aprobados)

1. Sea la ecuación $\frac{dy}{dx}=\frac{4y^2-4x^2}{3xy}$.

1a. Hallar la solución general. **1b.** Trazar las isoclinas y hacer un dibujo aproximado de las soluciones.

1c. Determinar si la solución del sistema $\begin{array}{l} x' = 3xy \\ y' = 4y^2-4x^2 \end{array}$ con $x(0)=1$, $y(0)=2$ está definida para todo valor de t.

[3.5 puntos]

2. Sea $x_a(t)$ la solución de $x''' + 5x'' + 2ax' + ax = -8e^{-2t}$ que satisface $x(0)=1$, $x'(0)=-1$, $x''(0)=9$.

2a. Determinar si son estables $x_2(t)$ y $x_0(t)$. **2b**. Calcular $x_4(t)$. [3.5 puntos]

3. Determinar si todas las soluciones de $t\,y'' + 2\,e^t\,y' = 0$ se pueden escribir en la forma:

$$c_1\, t^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \;+\; c_2\, t^s \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \quad .$$ [1.5 puntos]

4. Clasificar los puntos singulares del sistema autónomo: $\begin{array}{l} x' = x^3-y \\ y' = x+y^3 \end{array}$. [1.5 puntos]

Junio 90 (26% de aprobados)

1. Sea $y''' + y'' = f(t)$ donde $f(t) = \begin{cases} 6t & \text{si } 0\le t\le 1 \\ 0 & \text{si } 1\le t \end{cases}$, con $y(0)=-1$, $y'(0)=3$, $y''(0)=-6$.

a. Hallar su solución. **b.** Estudiar la estabilidad de dicha solución. [4 puntos]

2. Sea (E) $x'' = x^3 - 7x^2 + 10x$.

a. Dibujar su mapa de fases.

b. Determinar para qué valores de a es periódica la solución de (E) que satisface $x(0)=a$, $x'(0)=0$.

[4 puntos]

3. Sea $y' = -2\,\mathrm{sen}^2(y+2t)$.

¿Está definida para todo t la solución de esta ecuación que satisface $y(0) = \frac{\pi}{2}$? [1 punto]

4. Encontrar un valor del parámetro real a para el que la solución general de la ecuación $t\,y'' + a\,e^{\mathrm{sen}\,t}\,y' = 0$ se pueda escribir en la forma $c_1\, t^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + c_2\, t^s \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ y otro valor de a para el que no se pueda .

[1 punto]

Septiembre 90 (33% de aprobados)

1. Sea $(t-1)y'' + 2ty' + (t+1)y = 0$.

a. Comprobar que posee una solución de la forma $y = e^{at}$ para algún a real.
b. Escribir en términos de funciones elementales la solución con $y(0)=1$, $y'(0)=0$.
c. Escribir los tres primeros términos no nulos del desarrollo en torno a $t=0$ de esta solución utilizando el método de series directamente en la ecuación.
d. ¿Es estable la solución que satisface $y(\pi)=0$, $y'(\pi)=0$? [4 puntos]

2. Sea $\frac{dy}{dx}=\frac{2y-x}{x-2}$.

a. Estudiar existencia y unicidad de curvas integrales. **b.** Resolver la ecuación.
c. Dibujar isoclinas y curvas integrales. [4 puntos]

3. Sea $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x(x^2+y^2) \end{cases}$

a. Hallar la órbita que pasa por $(-1,0)$.
b. ¿Es periódica la solución del sistema que satisface $x(\pi)=-1$, $y(\pi)=0$? [2 puntos]

exámenes de EDOs

Febrero 91

(43% de aprobados)

1. Sea la ecuación $(t+1)^3 y'' + (t+1)y' - y = 0$.

1a. Sabiendo que $y = t+1$ satisface la ecuación, hallar la solución general y estudiar la estabilidad.

1b. Calcular hasta orden t^2 (inclusive) el desarrollo en serie de potencias (en torno a $t=0$) de la solución con $y(0)=1$, $y'(0)=1$, directamente a partir de la ecuación. ¿Se podría hallar la solución general en forma de serie de potencias en torno a $t=-1$?

[4 puntos]

2. Sea el sistema: $\begin{array}{l} x' = x+2xy \\ y' = y^2-1 \end{array}$. **2a.** Hallar la ecuación de sus órbitas y dibujar su mapa de fases.

2b. Estudiar si está definida para todo t la solución con $x(0)=0, y(0)=2$.

[4 puntos]

3. Sea la ecuación $ty' = y + t \operatorname{sen} t$.

3a. Imponer un dato inicial para el que existan infinitas soluciones y otro para el que posea solución única.

3b. Estudiar si es estable la solución que satisface $y(1)=0$.

[2 puntos]

Junio 91

(32% de aprobados)

1 . Sea la ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x} - \frac{1}{x}$.

Resolverla por dos métodos diferentes. Dibujar isoclinas y curvas integrales.
Determinar cuántas curvas integrales pasan por cada uno de los siguientes puntos: $(-1,0)$, $(0,0)$ y $(1,0)$.

[4 puntos]

2. Dado el sistema $\begin{array}{l} x'=2x-y \\ y'=x+|2-t| \end{array}$ hallar $x(t)$ si $x(0)=0$, $y(0)=-1$.

[3 puntos]

3. Entre las soluciones que se indican de las siguientes ecuaciones

$x' + 2x = \operatorname{sen} t$	$x' = \cos x$	$x'' + 2x' = \operatorname{sen} x$	$x''' + 2x'' + 4x = \cos t$
$x(0)=0$	$x(0)=0$	$x(0)=x'(0)=0$	$x(0)=x'(0)=x''(0)=0$

hay exactamente dos que son asintóticamente estables. ¿Cuáles son?

[2 puntos]

4. Sea el sistema $\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{3}{t^2}x + \left(\frac{5}{2t}\cos t\right) y \end{array}$. Probar que todas sus soluciones tienden a **0** cuando $t \to 0$.

[1 punto]

Septiembre 91

(64% de aprobados)

1. Sea la ecuación (E) $x''' + 2x'' + 2x' + n^2 x = t$, $n = 0,1,2,...$

a. Hallar una solución particular de (E) para todo valor de n .

b. Hallar la solución general: i) para el único valor de n para el que (E) es asintóticamente estable
ii) para un valor de n para el que (E) sea estable (no asintóticamente)

[4 puntos]

2. Sea el sistema: $\begin{array}{l} x'=3y^2-3 \\ y'=6x+4x^3 \end{array}$. Hallar la ecuación de sus órbitas y dibujar su mapa de fases.

[3 puntos]

3. Hallar todas las soluciones de $ty' = te^{-y/t} + y$ con $y(1)=0$; ¿cuántas hay?

Dibujar la isoclina asociada a la pendiente 1 de las soluciones de la ecuación.

[2 puntos]

4. Escribir una ecuación lineal homogénea de segundo orden que tenga un punto singular regular en $t=0$ y tal que las raíces de su polinomio indicial en ese punto sean $1/3$ y $-1/3$.

[1 punto]

Febrero 92

(32% de aprobados)

1 . Sea la ecuación $\mathbf{y' = y - t^a y^2}$. Resolverla y determinar la estabilidad de la solución que satisface $y(1)=0$ para todos los valores de la constante a .

[2 puntos]

2 . Hallar la solución de $\begin{cases} x''' + 6x' + 20x = 18\,\delta(t-\pi) \\ x(0)=x'(0)=x''(0)=0 \end{cases}$.

Escribir el valor de esa solución para $t=\frac{\pi}{2}$ y $t=\frac{13\pi}{12}$. ¿Cuántas derivadas posee dicha solución en $t=\pi$?

[2.5 puntos]

3 . Hallar una solución no trivial de la ecuación $\mathbf{3t^2[1+t]\,x'' + t\,[5+2t]\,x' - x = 0}$, resolviendo por medio de series en torno a $t = 0$.

[2 puntos]

4 . Sea el sistema [S] $\begin{cases} x' = x^2 - xy - 2y \\ y' = xy - y^2 + 2x \end{cases}$.

Escribir [S] en coordenadas polares, hallar la expresión de las órbitas en polares y deducir la expresión en cartesianas. Hallar y clasificar los puntos críticos de [S], probar que hay una órbita de [S] que es una recta y dibujar el mapa de fases de [S] .

[3.5 puntos]

Junio 92

(33% de aprobados)

1. a) Discutir para qué valores de a es $t=0$ punto singular regular de $\mathbf{t^a x'' + 4t\,x' + 2x = 0}$.

b) Si $a=2$, calcular el desarrollo en serie en $t=1$, hasta tercer orden, de la solución con $x(1)=1$ y $x'(1)=-1$.

c) Hallar la solución de la ecuación $\mathbf{t^2 x'' + 4t\,x' + 2x = e^t}$, con $x(1)=0$, $x'(1)=0$. ¿Es estable?

[4 puntos]

2 . a) Estudiar la existencia y unicidad de las curvas integrales de la ecuación $\mathbf{y' = x - \frac{1}{y}}$.

b) Dibujar aproximadamente sus curvas integrales en el semiplano $x\geq 0$. ¿Existe alguna solución que posea asíntota vertical?¿Existe, a la vista del dibujo, alguna solución acotada definida para todo $x\geq 0$?

[3 puntos]

3. a) Analizar los puntos críticos, resolver la ecuación diferencial de las órbitas y dibujar el mapa de fases de

$$\begin{aligned} x' &= 2xy \\ y' &= y^2 - 4x^2 - 4 \end{aligned}$$

b) Identificar la órbita asociada a la solución del sistema con $x(0)=2$, $y(0)=2$. Describir la $x(t)$ de esta solución.

[3 puntos]

Septiembre 92

(35% de aprobados)

1. Sea la ecuación $\mathbf{2\sqrt{t}\,x'' - x' = 0}$.

a) Calcular el desarrollo en serie en $t=1$, hasta tercer orden, de la solución con $x(1) = 1$ y $x'(1) = 1$.
b) Precisar si $t=0$ es un punto singular regular de la ecuación .

[3 puntos]

2 . Dada la ecuación $\mathbf{\frac{dy}{dx} = y - \frac{1}{x}}$.

Precisar cuántas y qué curvas integrales pasan por el origen. Dibujar aproximadamente las curvas integrales de la ecuación. Resolver la ecuación. ¿Existe alguna solución que posea una asíntota vertical a la derecha de $x=1$? ¿Existe alguna solución acotada definida para todo $x\geq 1$? Justificarlo.

[3.5 puntos]

3. Sea la ecuación $\mathbf{x'' = ax - 2x' + (x')^2}$.

Para a=0: Resolver la ecuación diferencial de las órbitas y, basándose en ello, dibujar el mapa de fases. Hallar la solución de la ecuación que satisface $x(0)=0$, $x'(0)=2$.

Para todo a: Discutir la estabilidad de la solución trivial $x=0$.

[3.5 puntos]

Febrero 93 (20% de aprobados)

1. **a)** Estudiar existencia y unicidad de soluciones de la ecuación $\mathbf{y' = \sqrt{y} + x}$.
b) Dibujar aproximadamente dichas soluciones. [2 puntos]

2. Estudiar para qué valores de a es asintóticamente estable la solución de $\begin{cases} x' = x+y \\ y' = -5x-y+z \\ z' = ax-z \end{cases}$ con
x(0)=1 , **y(0)=–2** , **z(0)=5** . Calcular esta solución si a=0 y estudiar su estabilidad. [3 puntos]

3. **a)** Hallar la solución general de la ecuación $\mathbf{\operatorname{sen} t\; x'' - 3\cos t\; x' = 2\operatorname{sen} t\cos t}$.
b) Determinar qué puntos t son regulares o singulares regulares y hallar los dos primeros términos no nulos del desarrollo en t=0 de una solución de la homogénea que no sea constante. [3 puntos]

4. Sea [S] $\begin{cases} x' = ay+bx^3 \\ y' = ax+by^3 \end{cases}$. Discutir según los valores de a y b : **a)** la estabilidad de su solución trivial $x=y=0$, **b)** si existe alguna solución no trivial de [S] que tienda a **0** cuando $t\to\infty$. [2 puntos]

Junio 93 (38% de aprobados)

1. Resover la ecuación $\mathbf{y' = (\sqrt{y} - 1)\, t}$.
Determinar en qué regiones crecen y decrecen las soluciones. Precisar cuántas soluciones satisfacen **i)** $y(0)=1$, **ii)** $y(0)=0$. ¿Esta definida para todo $t\geq 0$ la solucion con $y(0)=2$?.

2. Sea el sistema: $\begin{array}{l} x'=x+f(t) \\ y'=x+y \end{array}$ con $f(t) = \begin{cases} 2e^t & \text{si } 0\leq t<1 \\ 0 & \text{si } t\geq 1 \end{cases}$.
Hallar la y(t) de la solución que satisface los datos iniciales $x(0)=-2$, $y(0)=1$.

3. Sea $\mathbf{t\,x'' - x' - 4t^3 x = 0}$. Hallar el desarrollo en serie de potencias en torno a t=0 de una solución que se anule en t=0 . [Podría ser útil saber que $x=e^{t^2}$ es solución de la ecuación].

4. Sea la ecuación $\mathbf{x'' = (x - x^2)\, e^{-2x}}$. Dibujar su mapa de fases.
Estudiar la estabilidad de las soluciones que satisfacen: **i)** $x(0)=x'(0)=0$, **ii)** $x(0)=1$, $x'(0)=e^{-1}$.

Septiembre 93 (49% de aprobados)

1. Resolver la ecuación $\mathbf{\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2+y^2}{2xy}}$.
Dibujar sus isoclinas y curvas integrales. Determinar cuántas curvas integrales pasan por cada punto del plano. Estudiar si es asintóticamente estable la solución que cumple **y(1) = 1** .
[3 puntos]

2. Sea la ecuación **(E)** $\mathbf{x^{iv} + 4x''' + cx'' + 4x' + x = \operatorname{sen} t}$.
Hallar la solución general para **c = 6** . Determinar razonadamente un valor de **c** para el que (E) sea inestable. Determinar otro **c** para el que (E) no tenga ninguna solución periódica.
[2.5 puntos]

3. Sea el sistema: $\begin{array}{l} \mathbf{x' = \operatorname{sen} y} \\ \mathbf{y' = \operatorname{sen} x} \end{array}$.
Clasificar los puntos críticos del sistema, hallar la ecuación de sus órbitas y dibujar su mapa de fases.
[2.5 puntos]

4. Sea **(N)** $\mathbf{t^4 x'' + 2t^3 x' - x = 1}$.
Determinar si $t=0$ y $t=\infty$ son puntos regulares, singulares regulares o singulares no regulares de la ecuación homogénea. Hallar la solución de (N) que satisface $\mathbf{x(1)=0}$, $\mathbf{x'(1)=1}$.
[puede ser útil saber que $x=e^{1/t}$ es solución de la homogénea] [2.5 puntos]

Febrero 94

(29% de aprobados)

1. **a)** Estudiar la existencia y unicidad de las soluciones de $\frac{dy}{dt} = |y-t|$. **b)** Dibujar aproximadamente dichas soluciones. **c)** Hallar la solución que satisface **y(0) = 1/2** . [2.5 puntos]

2. **a)** Estudiar la estabilidad de la ecuación $x^{(n)} + x = 2\cos t$, según los valores de n (entero positivo).
b) Para **n=1994** , precisar si la homogénea y la no homogénea poseen alguna solución periódica. [2.5 puntos]

3. Hallar el desarrollo hasta orden 3 en torno a t=1 de la solución de $t^2 x'' + t x' + [t^2 - \frac{1}{4}] x = 0$ que satisface los datos iniciales **x(1)=0** , **x'(1)=1** . [2 puntos]

4. Sea el sistema [S] $\begin{array}{l} x' = y - xy \\ y' = -x + x^2 \end{array}$. **a)** Dibujar su mapa de fases. **b)** Estudiar la estabilidad de la solución constante **x=1** , **y=0** . **c)** Precisar las órbitas que corresponden a soluciones periódicas de [S] y calcular su periodo. [Dato: $\int_{-a}^{a} [1-x]^{-1}[a^2-x^2]^{-1/2}dx = \pi [1-a^2]^{-1/2}$, si $0<a<1$] [3 puntos]

Junio 94

(23% de aprobados)

1. **a)** Sea $\frac{dy}{dt} = y \ln|t|$. Resolverla. Estudiar existencia y unicidad de curvas integrales.
b) Sea x*(t) la solución de $\frac{d^2x}{dt^2} - \ln|t| \frac{dx}{dt} = 0$ con **x(1)=0** , **x'(1)=1** .
Escribir x*(t) en términos de funciones elementales. Determinar si es estable.
Hallar los tres primeros términos no nulos del desarrollo de x*(t) en torno a **t=1** .
Determinar qué puntos de la ecuación son regulares o singulares regulares. [4 puntos]

2. Hallar la solución del sistema $\begin{array}{l} x' = 2x + y \\ y' = -4x + 2z \\ z' = 4 - 2z \end{array}$ que satisface: **x(0)=1** , **y(0)=–2** , **z(0)=2** .
Determinar la estabilidad de dicha solución. [2 puntos]

3. Sea **[E]** $x'' = \mathrm{sen}(ax + x')$, $a \geq 0$.
Hallar y clasificar según los valores de **a** todos los puntos críticos de [E]. Para **a=2** , dibujar el mapa de fases de [E]. Para **a=0** , hallar la solución de [E] que satisface: **i)** $x(0)=\pi$, $x'(0)=0$, **ii)** $x(0)=0$, $x'(0)=\pi$, tras dibujar el mapa de fases a partir de la ecuación de las órbitas. [4 puntos]

Septiembre 94

(25% de aprobados)

1. **a)** Sea $\frac{dy}{dx} = e^{x-y}$. Resolverla y dibujar sus curvas integrales.
Estudiar la estabilidad de la solución que cumple **y(0) = 0** .
b) Dibujar el mapa de fases de $\begin{cases} x' = e^y \\ y' = e^x \end{cases}$. Hallar la solución del sistema que satisface **x(1) = y(1) = 0** .
[4 puntos]

2. Resolver $x^{iv} - x = 4\delta(t-\pi)$ con $x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$. [2 puntos]

3. Sea **(E)** $(1-t)(1-2t)x'' + 2tx' - 2x = 0$. Hallar el desarrollo en serie en torno a **t=0** de la solución de (E) que satisface **x(0) = x'(0) = 1** [puede ser útil observar que x=t es solución de (E)].
Hallar las raíces del polinomio indicial en cada punto singular regular de (E).
Estudiar cuántas soluciones de (E) satisfacen **x(1)=0, x'(1)=1** . [3 puntos]

4. Estudiar según los valores de **a** la estabilidad de la solución trivial de: $x'' + x = a\,\mathrm{sen}(x')$. [1 punto]

Febrero 95

(30% de aprobados)

1. Sea $\frac{dy}{dt}=y^2-\frac{2}{t^2}$. Probar que existen soluciones de la forma $y=\frac{A}{t}$.
Estudiar existencia y unicidad de curvas integrales y hallar las que pasen por el origen.
Determinar en qué intervalo está definida la solución con $y(1)=0$ y estudiar su estabilidad. [3 puntos]

2. Estudiar la estabilidad de la solución con $\mathbf{y(0)=0}$ de $\mathbf{y'=sen(\pi y)-ay}$, según los valores de **a** .
Dibujar isoclinas, puntos de inflexión y soluciones para **a=2** [$\frac{1}{\pi}\arccos\frac{2}{\pi}\approx 0.28$]. [4 puntos]

3. Hallar el desarrollo hasta orden 5 en torno a **t=0** de una solución que esté acotada en t=0 de
(E) $t^2x''+3t^4x'+[3t^3-2]x=0$ [puede ser útil observar que $x=\frac{1}{t}$ es solución de (E)].
Estudiar si es singular regular el punto del infinito de (E) . [2 puntos]

4. Sea el sistema [S] $\begin{array}{l} x'=a(y-x)+1 \\ y'=a(y-x)+x \end{array}$.
a) Clasificar sus puntos críticos según el valor de la constante **a** . Hallar la expresión de sus órbitas.
b) Para **a=–1** , calcular la solución de [S] que satisface $x(0)=y(0)=0$.
c) Si **a=0** , dibujar el mapa de fases y estudiar la estabilidad de sus soluciones. [4 puntos]

Junio 95

(42% de aprobados)

1. Sean la ecuación $\mathbf{y'=\sqrt{4-y^2}}$ y las condiciones iniciales: a) $\mathbf{y(0)=-2}$, b) $\mathbf{y(\pi)=0}$. Hallar la única solución que cumple una de las condiciones anteriores y encontrar dos distintas que satisfagan la otra. [2 puntos]

2. Sea (E) $\mathbf{x'''+ax''+bx'+abx=1}$.
Para **a=–1**, **b=1**, hallar la solución de (E) que cumple $\mathbf{x(0)=x'(0)=0}$, $\mathbf{x''(0)=-1}$.
Discutir la estabilidad de (E) según los valores de las constantes a y b .
Precisar para qué valores de a y b ninguna solución de (E) está acotada en todo $(-\infty,\infty)$. [3 puntos]

3. Sea $\mathbf{tx''-tx'+x=0}$. Sabiendo que $\mathbf{x=t}$ es solución de la ecuación, determinar si es posible escribir el desarrollo en torno a **t=0** de otra solución linealmente independiente sin que aparezcan logaritmos. Estudiar si es estable la solución con $\mathbf{x(1)=x'(1)=0}$. [2 puntos]

4. Sea [S] $\begin{array}{l} x'=y+x^2y \\ y'=-x+xy^2 \end{array}$. Resolver la ecuación de sus órbitas y dibujar su mapa de fases.
Escribir [S] en coordenadas polares. Estudiar para qué valores de b está definida para todo t la solución del sistema [S] que cumple $\mathbf{x(\pi)=0}$, $\mathbf{y(\pi)=b}$. [3 puntos]

Septiembre 95

(66% de aprobados)

1. Sea (E_1) $\frac{dy}{dt}=\frac{t-2y}{t}$. Resolverla. Dibujar isoclinas y curvas integrales. Estudiar si es estable la solucion con **y(3)=1** . Hallar una recta que corte perpendicularmente a las soluciones de (E_1).

2. Sea el sistema [S] $\begin{array}{l} x'=x-by^2 \\ y'=x-2y \end{array}$, **b** constante.
Discutir la estabilidad de todas las soluciones constantes que posea. Para **b=0** , dibujar el mapa de fases y determinar la estabilidad de la solución de [S] que cumple **x(0)=3** , **y(0)=1** .
[prob 1 + prob 2 = 5.5 puntos]

3. Sea (E_3) $\mathbf{tx''+2x'+a^2tx=0}$, $\mathbf{a\in R}$. Hallar el desarrollo hasta orden 4 de una solución no trivial que esté acotada en **t=0** . Hacer el cambio $\mathbf{x=y/t}$ y comprobar el resultado anterior. [2 puntos]

4. Resolver $\mathbf{tx''+2x'=t}$, i) considerándola como una ecuación de Euler, ii) haciendo $\mathbf{x'=y}$ y utilizando la solución del problema 1, iii) utilizando el cambio sugerido en el problema 3.
Discutir cuántas soluciones satisfacen $\mathbf{x(t_o)=0}$, $\mathbf{x'(t_o)=1}$. [2.5 puntos]

Febrero 96

(31% de aprobados)

1. Sea $\frac{dy}{dt}=1+y^{2/3}$ y sea y*(t) la solución que satisface **y*(0)=1** .

a) Estudiar existencia y unicidad de soluciones y curvas integrales. **b)** ¿Está y*(t) definida hasta ∞ ? ¿En qué instante T es y*(T)=0 ? **c)** Elegir entre: i) Probar que $2\leq y^*(1)\leq 5$, ó ii) Aproximar y*(1) por Euler-modificado con h=1 [$3^{2/3}\approx 2.08$]. [2 puntos]

2. Hallar la solución de $y'=-y+f(t)$, con $f(t)=\begin{cases} t\ , & t\leq 2 \\ 2\ , & t>2 \end{cases}$ y con **y(0)=–1** .

¿Cuántas derivadas tiene esta solución en t=2 ? [1.5 puntos]

3. Dar un valor de **a** , si existe, para el que $\begin{aligned} x' &= -2x+y \\ y' &= x-2y+az \\ z' &= ay-z \end{aligned}$ sea: i] asintóticamente estable, ii] estable no asintóticamente, iii] inestable . [2 puntos]

4. Sea $[t^4+t^2]\,x''+[5t^3+t]\,x'+[3t^2-1]\,x=0$. Probar que posee soluciones no triviales que tienden a 0 cuando i) $t\to 0$, ii) $t\to\infty$. ¿Existen soluciones que tiendan a 0 tanto cuando $t\to 0$ como cuando $t\to\infty$? [la ecuación para el punto del infinito tiene una solución calculable a ojo] [2 puntos]

5. Sea la ecuación [E] $x''+x+ax^2+bxx'=0$. **a)** Estudiar para que valores de **a** y **b** se puede garantizar que [E] posee un centro en el origen. **b)** Si **a = b = –1** , dibujar el mapa de fases. ¿Qué sugiere este dibujo sobre la estabilidad de la solución x=0 ? [2.5 puntos]

Junio 96

(27% de aprobados)

1. Sea la ecuación [E] $\frac{dy}{dt}=by+\frac{y^2}{t}$, b constante.

a) Discutir, según los valores de **b** , dónde crecen y decrecen las soluciones y hallar la curva de sus puntos de inflexión. Precisar cuántas curvas integrales de [E] pasan por el origen.

b) Discutir la estabilidad de la solución de [E] que satisface **y(1)=0 .** [3 puntos]

2. **a)** Para todos los valores de la constante **a** , hallar la solución de $t^2x''-6x=(a-3)\,t^a$ con **x(1)=0** , **x'(1)=1** y determinar su estabilidad.

b) Para **a=–2** , comprobar el resultado haciendo $t=e^p$ y utilizando transformadas de Laplace. [3 puntos]

3. Hallar el desarrollo hasta orden **4** en **t=0** de la solución de la ecuación

$\cos t\ x''+(2-\operatorname{sen} t)\,x'=0$ con **x(0)=1** , **x'(0)=–1** . [2 puntos]

4. Estudiar las simetrías de sus órbitas y dibujar el mapa de fases de $x''=x-x^3-xx'$. [2 puntos]

Septiembre 96

(34% de aprobados)

1. Sea $y'=6t^2\sqrt{y}$. **a)** Dar un valor de **a** para el que tenga solución única con **y(0)=a** , y otro para el que tenga más de una solución. **b)** Discutir la estabilidad de la solución que satisface **y(1)=1** . [2 puntos]

2. Hallar **una** solución de $x'''+x'+x=\cos t+te^{-t}$ y determinar si dicha solución es estable. [2 puntos]

3. Sea $t^2x''+(1-e^t)\,x'+tx=0$. Hallar los **dos** primeros términos no nulos del desarrollo de una solución que se anule en **t=0** . [2 puntos]

4. Sea [S] $\begin{cases} x'=x^2+3y^2 \\ y'=-2xy \end{cases}$. **a)** Resolver la ecuación diferencial de sus órbitas de dos formas diferentes. **b)** Dibujar isoclinas y curvas de puntos de inflexión de esta ecuación. **c)** Dibujar el mapa de fases de [S] . **d)** Precisar si está definida para todo t la solución de [S] con **x(2)=1**, **y(2)=0** . **e)** Determinar si es estable la solución de [S] con **x(2)=y(2)=0** . [4 puntos]

exámenes de EDOs

Febrero 97

(29% de aprobados)

1. Sea $y' = e^{-y/t}$. **a)** Estudiar la existencia y unicidad de sus soluciones. **b)** Determinar si posee rectas solución. Estudiar si existen puntos de inflexión. Dibujar aproximadamente las soluciones. **c)** Estudiar la prolongabilidad de la solución con $y(1) = 1$. [2.5 puntos]

2. Calcular la solución de $x'''-3x''+2x' = \begin{cases} 0 & , \ t<1 \\ 2e[2t-3] & , \ t\geq 1 \end{cases}$ que verifica $x(0)=x'(0)=x''(0)=2$. [2 puntos]

3. Estudiar la estabilidad de las soluciones de la ecuación $e^{\cos t}x'' - tx' + x = \log\left(1+e^t\right)$. [1 punto]

4. Sea [e] $t^3x'' + \left[At^2+B\right]x' + \left[Ct^2+D\right]x = 0$. Determinar para qué valores de A, B, C y D son tanto t=0 como t=∞ puntos singulares regulares de [e] . Para estos valores, precisar cuándo existen soluciones de [e] que tienden hacia 0 cuando t tiende a ∞ . [1.5 puntos]

5. Sea [n] $x'' = ax + (x')^2$. **a)** Resolver la ecuación diferencial de sus órbitas. **b)** Discutir, según los valores de la constante a , la estabilidad de la solución $x=0$ de [n] . **c)** Para a=–1, dibujar el mapa de fases y hallar la solución de [n] que cumple $x(2)=1/2$, $x'(2)=1$. [3 puntos]

Junio 97

(23% de aprobados)

1. Sea $y' = \begin{cases} t \text{ si } y\geq t \\ y \text{ si } y\leq t \end{cases}$. **a)** Estudiar existencia y unicidad de soluciones. Dibujar estas soluciones. **b)** Hallar para todo t la solución que satisface $y(-3) = 3$. **c)** Determinar la estabilidad de la solución con $y(0) = 1$. [2.5 puntos]

2. **a)** Discutir, en función del parámetro real a , la estabilidad del sistema: $\begin{cases} x'=z \\ y'=u+1 \\ z'=-x+au+2 \\ u'=-y-az+t \end{cases}$.

b) Para a=0 , hallar la solución que satisface $x(0)=y(0)=z(0)=u(0)=0$. [2.5 puntos]

3. Sea [E] $t[t-1]x'' + 2[2t-1]x' + 2x = 0$.
a) Probar que existe una solución analítica de [E] en torno a t=0 y calcularla.
b) Estudiar si todas las soluciones de [E] tienden hacia 0 cuando t tiende a ∞ . [2.5 puntos]

4. Sea $\begin{cases} x' = x-x^2y \\ y' = y-x^3 \end{cases}$. **a)** Resolver la ecuación diferencial de sus órbitas. **b)** Hallar todas las órbitas rectas que pasen por el origen. **c)** Dibujar el mapa de fases del sistema. [2.5 puntos]

Septiembre 97

(35% de aprobados)

1. Sea $y' = \frac{2}{t}\sqrt{y}$. **a)** Resolverla. **b)** Dibujar aproximadamente isoclinas, curva de puntos de inflexión y soluciones. **c)** Estudiar cuántas soluciones de la ecuación cumplen: i) $y(1)=0$; ii) $y(-1)=1$. [2.5 puntos]

2. Sea $\begin{cases} x' = 2xy \\ y' = 1-x^2-y^2 \end{cases}$. **a)** Dibujar su mapa de fases. **b)** Estudiar para qué órbitas las soluciones de las que son proyección: i) están definidas para todo t ; ii) no están definidas para todo t . [3 puntos]

3. Sea [E] $t^2x'' - 4tx' + \left[t^2+6\right]x = f(t)$.

a) Si $f(t) = 0$, hallar **una** solución de [E] por el método de Frobenius e identificar la serie obtenida.

b) Para $f(t) = t^4$, hallar la solución general de [E] en términos de funciones elementales.

c) Para $f(t) = e^{-t}$, determinar la estabilidad de la solución de [E] que verifica $x(1)=\pi$, $x'(1)=10$.

[al final se puede hacer el cambio $x=t^ay$ que sugieren las soluciones para comprobar los resultados]

[4.5 puntos]

Febrero 1998 (39% de aprobados)

1. Sea $\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}[y-t]^3$. **a)** Dibujar aproximadamente las curvas integrales.
b) Estudiar si está definida para todo $t\geq 0$ la solución con $y(0)=-1$. [2 puntos]

2. **a)** Resolver $\begin{cases} x'=y-2z \\ y'=x+2y \\ z'=y-2 \end{cases}$ con $\begin{matrix} x(0)=2 \\ y(0)=0 \\ z(0)=3 \end{matrix}$. **b)** ¿Es estable esta solución? [2 puntos]

3. Hallar una solución de $t^2x''-6x=t^3$ y estudiar su estabilidad. [1.5 puntos]

4. Sea $t[1+t^2]x''-x'=0$. **a)** Precisar si existen soluciones no triviales que tiendan a 0 cuando $t\to\infty$.
b) Hallar los tres primeros términos no nulos del desarrollo en serie de una solución que se anule en $t=0$. [2 puntos]

5. **a)** Dibujar el mapa de fases de [E] $x''-xx'+x=0$. **b)** ¿Es periódica la solución de [E] que cumple $x(0)=0$, $x'(0)=2$? **c)** Hallar la solución de [E] que satisface $x(3)=2$, $x'(3)=1$. [2.5 puntos]

Junio 1998 (37% de aprobados)

1. Sea $\frac{dy}{dt}=\frac{3ty+2y^2}{t^2+ty}$. Resolverla y dibujar aproximadamente sus curvas integrales. [2.5 puntos]

2. Sea [e] $x'''+6x''+9x'+bx=4$.
a) Hallar para todos los valores de la constante b una solución de [e] y discutir su estabilidad.
b) Para b=4 hallar la solución de [e] que satisface $x(0)=x'(0)=0$, $x''(0)=1$. [3 puntos]

3. Hallar la solución de $[t^2-4]x''-2tx'+2x=0$ que satisface $x(0)=4$; $x'(0)=-4$.
Imponer unos datos iniciales para los que la ecuación tenga infinitas soluciones. [2 puntos]

4. Dibujar el mapa de fases de [S] $\begin{cases} x'=y-x^2 \\ y'=x-y^2 \end{cases}$. ¿Es estable la solución de [S] que cumple $x(2)=y(2)=0$? [2.5 puntos]

Septiembre 1998 (37% de aprobados)

1. Sea [E] $\frac{dy}{dt}=1-\frac{t}{4y}$. Resolverla y dibujar aproximadamente sus curvas integrales.
¿Cuántas soluciones de [E] satisfacen i) $y(2)=1$, ii) $y(2)=0$? [3 puntos]

2. Hallar la solución de $\begin{cases} x'=y-x \\ y'=y-3e^{-2t} \end{cases}$ con $\begin{cases} x(0)=0 \\ y(0)=1 \end{cases}$ y determinar si es estable . [2.5 puntos]

3. Sea $tx''+[t-1]x'-2x=0$. Sabiendo que $x=t^2$ es solución, precisar si es posible escribir el desarrollo en torno a $t=0$ de una solución linealmente independiente de ella sin que aparezcan logaritmos. [2 puntos]

4. Dibujar el mapa de fases de [S] $\begin{cases} x'=y-x \\ y'=y-x^2 \end{cases}$. ¿Es periódica la solución de [S] que cumple $x(0)=y(0)=2$? [2.5 puntos]

Junio 1999

(33% de aprobados)

(elegir 3 de los 4 problemas)

1. Dibujar aproximadamente las soluciones de $\frac{dy}{dt}=\sqrt{\frac{y}{t}}$ y determinar cuántas soluciones satisfacen cada uno de los siguientes datos iniciales: i) $y(-1)=-1$, ii) $y(1)=0$, iii) $y(1)=1$.

2. Resolver $\begin{cases} x'=x-y+2 \\ y'=x+y \end{cases}$ con $\begin{matrix} x(0)=0 \\ y(0)=1 \end{matrix}$.

3. Sea $t^2x''+t^2x'+[t-2]x=0$ $\left[x=\frac{1}{t}\right.$ es solución$\left.\right]$.
Hallar los tres primeros términos no nulos del desarrollo en serie de una solución que se anule en $t=0$.

4. Calcular la solución $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ del sistema $\begin{cases} \dot{x} = x^2-y^2 \\ \dot{y} = 2xy \end{cases}$ que satisface $x(2)=0$, $y(2)=1$ y dibujar la órbita asociada [haciendo $z=x+iy$ no es necesario resolver la ecuación de las órbitas del sistema].

Septiembre 1999

(21% de aprobados)

(elegir 3 de los 4 problemas)

1. Dibujar aproximadamente las soluciones de $\frac{dy}{dt}=1-e^ty$.
Determinar la estabilidad de la que satisface $y(0)=0$.

2. Sea $x^{IV}+2x'''+6x''+2x'+5x=\cos t$. a) Hallar una solución particular de la no homogénea.
b) Hallar la solución general de la homogénea.

3. Hallar la solución de $[t+1][t-3]x''-2[t-1]x'+2x=0$ con $x(0)=1$, $x'(0)=2$.
Imponer unos datos iniciales $x(a)=b$, $x'(a)=c$ para los que la ecuación tenga infinitas soluciones.

4. Dibujar el mapa de fases de la ecuación $x''=x-x^2-(x')^2$.

exámenes de EDOs

Junio 2000

(81% de aprobados)

(elegir 2 de los 4 problemas; entregando 3, se toman las dos mejores notas)

1. Sea $\frac{dy}{dt} = y - \frac{4}{y^2}$. Trazar alguna isoclina, estudiar concavidad y convexidad y dibujar las soluciones. Estudiar si está definida para todo t la solución que cumple $y(0)=2$. [$\sqrt[3]{4} \approx 1.6$]

2. Resolver $\begin{cases} x'=x-y \\ y'=2x-y+t \end{cases}$ con $x(0)=0$, $y(0)=1$. ¿Es estable esta solución?

3. Sea $x'' - x' + e^{2t}x = 0$. Hallar los 3 primeros términos no nulos del desarrollo una solución que se anule en $t=0$. [Podría ser útil saber que $x_1 = \cos(e^t)$ es solución de la ecuación]

4. Dibujar el mapa de fases de [S]$\begin{cases} x' = xy-y \\ y' = x-y \end{cases}$. Hallar la solución de [S] con $x(0)=1$, $y(0)=2$.

septiembre 2000

(40% de aprobados)

(elegir 2 de los 4 problemas de cada parcial; entregando 3, se toman las dos mejores notas)

1. Sea $\frac{dy}{dt} = [y-t]^2$. **a)** Dibujar aproximadamente sus soluciones. **b)** Resolverla.

2. Hallar la solución de $\begin{cases} x' = 2x-3y \\ y' = x-2y-2e^{-t} \end{cases}$ con $x(0)=0$, $y(0)=1$ y precisar la estabilidad de dicha solución.

3. Sea $tx''-(2-3t^3)x'=0$. Hallar el desarrollo en serie de potencias de una solución que se anule en $t=0$.

4. Hallar la expresión de las órbitas y dibujar el mapa de fases de $\begin{cases} x' = y^2-x \\ y' = y+x^2 \end{cases}$.