problemas 1

1 . Hallar las soluciones particulares que satisfacen los siguientes problemas de valores iniciales:

$2tyy'-3y^2+3t^2=0$, $y(1)=2$ $\quad$ $t^2+y^2+t+tyy'=0$, $y(1)=0$ $\quad$ $y'=1+\cos^2(y-t)$, $y(0)=0$

$y\,\text{sen}\,t+y'\ln y=0$, $y(0)=2$ $\quad$ $ty'=2y+t$, $y(1)=2$ $\quad$ $y'=\cos t-y-y^2\,\text{sen}\,t\,\cos^{-2}t$, $y(0)=-1$

$e^y-2t+te^y\,y'=0$, $y(1)=0$ $\quad$ $t^2y'=2ty-y^2$, $y(1)=-1$ $\quad$ $3y'+y=(1-2t)\,y^4$, $y(1)=1$

2 . Probar que la ecuación lineal admite un factor integrante que sólo depende de t y utilizarlo para deducir la expresión de la solución general de dicha ecuación.

3 . Resolver $\frac{dy}{dx}=\frac{x+2y+2}{y-2x+6}$ (convertirla en homogénea mediante un adecuado cambio de variables).

4 . Dibujar el campo de direcciones y la forma aproximada de las curvas integrales de

$y'=1-y^2$ $\quad$ $y'=t^2+y$ $\quad$ $y'=\frac{y}{y-t}$ $\quad$ $y'=\frac{y-t}{y+t}$ $\quad$ $y'=\frac{1}{t^2+y^2}$ $\quad$ $y'=\frac{1}{(t-4y)^2}$ $\quad$ $y'=\frac{t^2-y}{t+y^2}$

5 . Integrar numéricamente entre 0 y 1 los problemas $y'=t+y$, $y(0)=2$; $y'=t-y$, $y(0)=2$, mediante los métodos de Euler, Euler modificado y Runge-Kutta, para h=0.2, h=0.1 y h=0.05 . Resolver las ecuaciones y comparar con los valores exactos.

6 . Calcular el valor aproximado en t=0.2 de la solución de: $\begin{matrix} y'=y^2 \\ y(0)=1 \end{matrix}$ $\quad$ $\begin{matrix} y'=t^2+y^2 \\ y(0)=0 \end{matrix}$ $\quad$ $\begin{matrix} y'=t-|y| \\ y(0)=0 \end{matrix}$

a partir de la segunda aproximación de Picard. Comparar con Euler y Runge-Kutta para h=0.1 .

7 . Estudiar en qué subconjuntos de $\mathbf{R}^2$ son lipschitzianas respecto de la y las funciones:

$$f(t,y)=t^3|y| \qquad g(t,y)=\begin{cases} t-y\ ,\ y>0 \\ t\ ,\ y\le 0 \end{cases}$$

8 . Estudiar existencia y unicidad de soluciones y curvas integrales:

$y'=\frac{y-t}{y+t}$ $\quad$ $y'=3ty^{1/3}$ $\quad$ $y'=-\frac{2y}{t}+4t$ $\quad$ $y'=\frac{1}{(t-4y)^2}$ $\quad$ $y'=y\ln|t|$ $\quad$ $y'=\begin{cases} -y\ln y\ ,\ y>0 \\ 0\ ,\ y=0 \end{cases}$

9 . Estudiar existencia y unicidad de soluciones y curvas integrales de $y'=1+y^{2/3}$.
Sea y^* la solución con $y^*(0)=1$. ¿Está y^* definida hasta ∞?¿En qué instante T es $y^*(T)=0$?
Probar que $y^*(1)\ge 3$. Calcular aproximadamente $y^*(1)$ por Euler-modificado con h=1 .

10. Sea $ty'=te^{-y/t}+y$. Resolverla. ¿Cuántas soluciones satisfacen $y(-1)=0$? Probar que todas las soluciones de la ecuación son crecientes. Dibujar la isoclina asociada a la pendiente 1 de las soluciones de la ecuación y la curva de puntos de inflexión.

11. Sea $y'=\frac{y^2}{t}-\frac{1}{t}$. Resolverla por dos métodos diferentes. Dibujar isoclinas y curvas integrales. Determinar cuántas curvas integrales pasan por los puntos $(0,-1)$, $(0,0)$ y $(0,1)$.

12. Estudiar existencia y unicidad y dibujar aproximadamente las soluciones de $y'=|y-t|$.
Hallar la solución que satisface la condición inicial $y(0)=1/2$.

13. Resolver $y'=(\sqrt{y}-1)\,t$. Estudiar crecimiento y decrecimiento. Precisar cuántas soluciones satisfacen i) $y(0)=1$, ii) $y(0)=0$. ¿Esta definida para todo $t\ge 0$ la solucion con $y(0)=2$?.

14. Sean: i) $y'=\sqrt{y}+t$, ii) $y'=\frac{2}{t}\sqrt{y}$.
Estudiar para ambas la existencia y unicidad y dibujar aproximadamente sus soluciones.

15. Sean la ecuación $y' = \sqrt{4-y^2}$ y las condiciones iniciales: a) $y(0)=-2$, b) $y(\pi)=0$.
Hallar la única solución que satisface una de las condiciones anteriores y encontrar dos soluciones distintas que satisfagan la otra.

16. Sea $y' = y^2 - 2t^{-2}$. Estudiar existencia y unicidad de curvas integrales y hallar las que pasen por el origen. Probar que existen soluciones de la forma $y = A/t$. Determinar en qué intervalo está definida la solución con $y(1)=0$ y estudiar su estabilidad.

17. Estudiar existencia, unicidad y prolongabilidad, según los valores iniciales, de las solciones de

$y' = y^4 + y$ $\quad$ $y' = e^{-y/t}$ $\quad$ $y' = 1-y^{-2}$ $\quad$ $y' = y^2+t^2$ $\quad$ $y' = 4y+\cos y$

$y' = -ye^{-y^2}$ $\quad$ $y' = \dfrac{1}{t^2+y^2}$ $\quad$ $y' = \dfrac{y}{y-t}$ $\quad$ $y' = \dfrac{y^3}{1+y^2}$ $\quad$ $y' = y\cos^2\sqrt{y} + t^2$

18. Dadas la ecuaciones i) $y' = y - 1/t$ y ii) $y' = t - 1/y$:
Estudiar existencia y unicidad de curvas integrales y dibujarlas aproximadamente.
Sea y_a la solución con $y(1)=a$. ¿Alguna y_a posee una asíntota vertical a la derecha de $t=1$?
¿Para algún a está acotada y_a para todo $t\geq 0$? Aproximar este a con métodos numéricos.

19. Comprobar que $y' = t^{n-1}f(y+at^n)$ se convierte en una ecuación de variables separadas haciendo $z=y+at^n$ y utilizarlo para resolver $y' = 2t\,(y+t^2)^2$. Resolverla después considerándola como una ecuación de Ricatti. ¿Está definida hasta ∞ la solución que satisface $y(1)=2$?

20. Comprobar que las soluciones de $y' = -y+e^{at}$ e $y' = \cos^2 ay$ que satisfacen $y(0)=0$ dependen de forma continua del parámetro a.

21. Probar que para que una solución $y(t)$ sea asintóticamente estable a la derecha de t_0 basta que las soluciones $y^*(t)$ que parten suficientemente cerca de ella estén definidas para $t\geq t_0$ y que la diferencia $|y(t)-y^*(t)|$ tienda a 0 cuando t tiende a ∞ .

22. Estudiar para qué valores de las constantes a, b y c la solución de $y' = (\mathrm{sen}\,t+2bt)y+e^{ct}$, $y(0) = a$: existe, es única, es prolongable hasta ∞, depende continuamente de a, b y c, es estable.

23. Sea $y' = y^{2/3} - y$. Estudiar si existe una única solución satisfaciendo $y(0)=0$ y si es estable la solución que verifica $y(0)=1$.

24. Sea $ty' = y + t\,\mathrm{sen}\,t$. Imponer un dato inicial para el que existan infinitas soluciones y otro para el que haya solución única. Estudiar la prolongabilidad y si es estable la solución con $y(1)=0$.

25. Sea $y' = 6t^2\sqrt{y}$. Dar un valor de a para el que tenga solución única con $y(0)=a$, y otro valor para el que tenga más de una solución. Discutir la estabilidad de la solución que cumple $y(1)=1$.

26. Sea $y' = by + \dfrac{y^2}{t}$. Discutir, según los valores de b , dónde crecen y decrecen las soluciones. Hallar la curva de sus puntos de inflexión. Precisar cuántas curvas integrales pasan por el origen. Discutir la estabilidad de la solución que satisface $y(1)=0$.

27. Sea $y' = y - t^a y^2$. Resolverla y determinar la estabilidad de la solución que satisface $y(1)=0$ para todos los valores de la constante a .

28. Estudiar la estabilidad de la solución que satisface $y(1)=a$, según los valores de a:

$y' = \mathrm{sen}\,y$ $\quad$ $y' = -y^3 - y\cos^2 t$ $\quad$ $y' = \dfrac{y-y^2}{t}$ $\quad$ $y' = 2t^{-3}y + \cos^3 t$ $\quad$ $y' = \begin{cases} y-y^2, & y>0 \\ 0\ , & y\leq 0 \end{cases}$

29. Determinar la estabilidad de las soluciones con $y(1)=0$ e $y(1)=-3$:

$y' = -2y + \mathrm{sen}\,t$ $\quad$ $y' = -e^{\cos t}y + y^2$ $\quad$ $y' = -\dfrac{2y}{t} + y^2$ $\quad$ $y' = 1-e^y$ $\quad$ $y' = y\cos t - y^3$

30. Dibujar aproximadamente las soluciones de las siguientes ecuaciones, probar que está definida hasta ∞ la solución que satisface la condición inicial que se indica y estudiar su estabilidad:

$y' = t-\lvert y\rvert$	$y'=1-ty$	$y'=y^3+2y^2$	$y'=\frac{2y-t}{t-2}$	$y'=\frac{2ty-y^2}{t^2}$	$y'=e^{t-y}$
$y(0)=-1$	$y(0)=0$	$y(0)=-2$	$y(\pi)=0$	$y(2)=1$	$y(0)=0$

31. Sea $y' = y - (2+2\cos t)\, y^2$. Resolverla y dibujar a grandes rasgos sus soluciones. Estudiar la prolongabilidad. Determinar la estabilidad de la solución $y=0$ y de la que satisface $y(0)=1/3$.

32. Sean $y'=t^2-y^2-1$, $y'=t^2-y^2$ e $y'=t^2-y^2+1$.
Resolver las que se pueda. Dibujar isoclinas y soluciones. Estudiar la prolongabilidad de las soluciones con $y(0)=a$. Determinar la estabilidad de las rectas solución que aparezcan.

33. Resolver $\frac{dy}{dt}=\frac{t^2+y^2}{2ty}$. Dibujar isoclinas y curvas integrales. Determinar cuántas curvas integrales pasan por cada punto del plano. Estudiar la estabilidad de la solución que cumple $y(1) = 1$.

34. Sea $y' = \begin{cases} t & \text{si } y\geq t \\ y & \text{si } y\leq t \end{cases}$. Estudiar existencia y unicidad de soluciones. Dibujar estas soluciones. Hallar para todo t la solución con $y(-3)=3$. Determinar la estabilidad de la solución con $y(0)=1$.

35. Estudiar la estabilidad de solución con $y(0)=0$ de $y' = \operatorname{sen}(\pi y) - ay$, según los valores a .
Dibujar isoclinas, puntos de inflexión y soluciones para $a=2$ [$\frac{1}{\pi}\arccos\frac{2}{\pi} \approx 0.28$]

36. Sea la ecuación $y' = y^2 - ay^3$, $a\geq 0$. Dibujar aproximadamente sus soluciones.
Estudiar existencia, unicidad, prolongabilidad y estabilidad. Resolverla.
Comprobar la dependencia continua del parámetro a cuando éste tiende a 0 .

37. Dada la ecuación [E_a] $y' = 1 - \frac{a}{t+y}$, $a\geq 0$.
a) Estudiar existencia y unicidad. Resolverla. Dibujar aproximadamente sus soluciones.
b) Sea $y_a(t)$ la solución de [E_a] tal que $y_a(0)=1$. Estudiar el comportamiento de y_a cuando $a\to 0$.
c) Estudiar la prolongabilidad de las soluciones y la estabilidad de la que verifica $y(0)=a/2$.

38. Sea $\frac{dy}{dt}=\frac{2ty}{ay^2-t^2}$. Hallar la solución general para todo a y dibujar las curvas integrales si $a=3$.
Precisar para todo a el número de curvas integrales que pasan por cada punto del plano.

39. Sea la ecuación [E_a] $y' = \frac{ay}{t} + \frac{y^3}{t^3}$.
a) Estudiar existencia y unicidad.
b) Resolver por dos métodos diferentes para todos los posibles valores de a .
c) Dibujar el campo de direcciones y las soluciones para $a=-1$, $a=0$, $a=1/2$ y $a=1$.
d) Discutir la prolongabilidad de las soluciones verificando $y(1)=b$ para el caso $a=0$.
e) Estudiar la estabilidad de todas las rectas solución que tenga para todo a.
f) Calcular el valor aproximado en $t=2.5$ para $a=0$ de la solución con $y(2)=1$:
i) usando la segunda aproximación de Picard, ii) por Euler y Runge-Kutta con paso $h=0.1$
g) Comprobar que hay dependencia continua del parámetro a de la solución con $y(1)=1$.

40. Sea $y'= 2ty + t^2y^2$.
a) Resolverla y dibujar aproximadamente las soluciones.
b) Estimar las soluciones con $y(0)=1$ e $y(0)=-1$ por diferentes métodos numéricos con diferentes pasos, una hasta que se pueda y otra hasta valores grandes de t . Comparar estos valores con los de la segunda aproximación de Picard.
c) Estudiar la estabilidad para diferentes datos iniciales.

41. Hallar la expresión de las curvas que verifican la siguiente propiedad: para cada tangente a cada curva en un punto el segmento comprendido entre ese punto y el eje y tiene su punto medio en el eje x .

42. Consideremos la familia de hipérbolas $xy=C$. Escribir la ecuación diferencial de la que son curvas integrales (eliminando C entre la ecuación dada y la ecuación obtenida derivándola). Hallar las trayectorias ortogonales a dichas hipérbolas, es decir, las lineas que las cortan en ángulo recto. Resolver el mismo problema para las circunferencias $x^2+y^2=2Cx$, las parábolas $y^2+2Cx=C$ y las cardioides $r=C(1+\cos\theta)$.

43. Sea $y'=\frac{t-2y}{t}$. Resolverla y dibujar sus curvas integrales. Estudiar si es estable la solución que satisface $y(1)=3$. Hallar una recta que corte perpendicularmente a las soluciones de la ecuación.

44. Tenemos en el instante $t=0$ un gramo de material radiactivo A que sigue la ley de desintegración $x'=-2x$ y tal que al desintegrarse se transforma en otro material radiactivo B que sigue $y'=-ay$. Encontrar la función $y(t)$ que nos da la cantidad de material B existente en cada instante t y el valor máximo de esta función para los casos $a=1$, $a=2$ y $a=4$.

45. Supongamos ahora que tenemos un gramo de otro material radiactivo que se desintegra con una velocidad proporcional a la raiz cuadrada de la cantidad existente. Si al cabo de un año sólo queda 1/4 de gramo, ¿al cabo de cuaántos años tendremos 0.1 gramos? Comprobar que este material se desintegra totalmente en un tiempo finito y calcular ese tiempo.

46. Algunas enfermedades se difunden por medio de portadores, individuos que transmiten la enfermedad pero no la padecen. Sean x e y las densidades de portadores y personas sanas en el instante t. Se supone que los portadores se retiran de la población según la ecuación $x'=-mx$ y que la enfermedad se difunde con velocidad proporcional al producto xy: $y'=-nxy$.
a) Determinar $x(t)$ si $x(0)=x_o$ e $y(t)$ si $y(0)=y_o$. b) Encontrar la proporción de población que no enferma (es decir, el límite de $y(t)$ cuando $t\to\infty$) y determinar cómo varía esta cantidad con m y n.

47. Un cuerpo a 80^o de temperatura se coloca en el instante $t=0$ en un medio cuya temperatura se mantiene a 20^o y al cabo de 5 minutos el cuerpo se ha enfriado hasta los 50^o.Suponiendo que su enfriamiento sigue la ley de Newton (su temperatura varía proporcionalmente a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la del medio) determinar: a) la temperatura del cuerpo al cabo de 10 minutos; b) el instante en que dicha temperatura será de 30^o.

48. Un cuerpo se coloca en un medio con temperatura $T(t)=\operatorname{sen} t$ en el instante t. Comprobar que, si sigue la ley de Newton, la temperatura del cuerpo tiende a oscilar periódicamente.

49. Una reacción química se produce por la interacción de una molécula de sustancia P con otra de sustancia Q para dar una molécula nueva X : $P+Q \to X$. Sea $x(t)$ la concentración de X en el tiempo t y sean p y q las concentraciones iniciales respectivas de P y Q. Suponiendo que la reacción obedece a la ley de acción de masas, esto es, que la variación de $x(t)$ es proporcional al producto de las concentraciones de P y Q, hallar la expresión de $x(t)$ si $x(0)=0$.

50. Un cuerpo de masa m es lanzado con velocidad inicial v_o a gran altura en la atmósfera terrestre. Suponemos que cae en línea recta y que las únicas fuerzas que actúan sobre él son la de la gravedad terrestre mg (suponemos g constante) y otra fuerza $-kv$ debida a la resistencia del aire. Hallar la velocidad límite del cuerpo cuando t tiende a ∞.
Modificar el ejemplo anterior suponiendo que la resistencia del aire es proporcional a v^2.

51. Hallar la solución de la ecuación logística $y'=by(M-y)$ que satisface la condición inicial $y(t_o)=M/2$. A partir de la solución anterior encontrar una fórmula que de el valor de M en función de los valores de y en tres instantes sucesivos: $y(t_1)=y_1$, $y(t_1+h)=y_2$, $y(t_1+2h)=y_3$. Suponiendo que la población española se rige por la ecuación logìstica y sabierdo que dicha población era en 1960, 1970 y 1980 de 30.9, 34.0 y 37.4 millones, respectivamente, determinar la población hacia la que tenderá a estabilizarse el número de españoles.

52. Supongamos que la ecuación $y'=y[1-h(t)y]$, $h(t)>0$, describe la evolución de una población animal con tope logístico variable. Estudiar el comportamiento de las soluciones para grandes valores de t si i] $h(t)\to\infty$ cuando $t\to\infty$, ii] $h(t)\to cte$ cuando $t\to\infty$. Interpretar el resultado.

problemas 2

1. Estudiar la existencia y unicidad de las soluciones de

$xx''' - x'x'' - 2x^2 = \tan t$ $\quad (1-t^2)x'' - 2tx' + x = 0$ $\quad \begin{cases} x' = tx + \ln t \\ y' = x\sqrt{t} - y \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x' = x + \operatorname{sen} y \\ y' = tx^{2/3} - y \end{cases}$

2. Resolver los siguientes sistemas: i) utilizando matrices , ii) convirtiéndolos en ecuaciones de segundo orden:

$\begin{cases} x' = x - 2y + 2 \\ y' = 5x - y + 1 \\ x(0)=y(0)=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x' = 3x + y + te^{2t} \\ y' = -x + y \\ x(0)=1,\ y(0)=-1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x' = 3x + 2y \\ y' = -6x - 4y + t\cos t \\ x(0)=y(0)=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x' = x - 2y - t \\ y' = 2x - 3y - t \\ x(0)=1,\ y(0)=1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4te^{3t} \\ x(0)=y(0)=1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x' = -x - y \\ y' = 2x - y \\ x(0)=1,\ y(0)=2 \end{cases}$

3. Estudiar existencia, unicidad y prolongabilidad y hallar la solución general de:

$x'' + x = t\operatorname{sen} 2t - 1$ $\quad x'' + 2x' + 2x = te^{-t}$ $\quad x'' - x = 2(1+e^t)^{-1}$ $\quad x'' + x = \tan t$

$t^2x'' + 3tx' + x = \ln t$ $\quad t^2x'' - 2x = t^3e^t$ $\quad (t+1)x'' - x' = (t+1)^2$ $\quad (1+t^2)x'' + 2tx' = 2t^{-3}$

4. Hallar la solución general sabiendo que la x_1 que se indica es solución de la homogénea:

$(1-t)x'' + tx' - x = e^t(1-t)^2$, $x_1 = e^t$ $\quad (t^2-1)x'' - 2x = 0$, $x_1 = t^2-1$ $\quad tx'' - (t+1)x' + x = e^t t^2$, $x_1 = e^t$ $\quad t^2x'' - t(t+2)x' + (t+2)x = 0$, $x_1 = t$

5. Hallar la solución general y la que satisface x(0)=y(0)=z(0)=1:

$\begin{cases} x' = x \\ y' = x + 2y \\ z' = x - z \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x' = y + z \\ y' = x + z \\ z' = x + y \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x' = x + y + z \\ y' = 2x + y - z \\ z' = -y + z \end{cases}$

6. Hallar la solución general:

$x^{iv} + x = \operatorname{sen} t$ $\quad x^{v} + 2x''' + x' = t$ $\quad t^3x''' + t^2x'' - 2tx' + 2x = \ln t$

7. Encontrar la matriz fundamental canónica del sistema asociado a las siguientes ecuaciones:

$x'' + 2x' + x = 0$ $\quad x''' + x'' + x' + x = 0$ $\quad 2(t+1)^2 x'' + 3(t+1)x' - x = 0$

8. Calcular la solución particular que se indica y precisar si es estable o no:

$\begin{cases} x'' - 2x' + 2x = e^t \cos t \\ x(0)=x'(0)=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x''' + 2x'' + 5x' = 5t \\ x(0)=x'(0)=0,\ x''(0)=1/5 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x^{iv} - 16x = 8t^2 \\ x(0)=-1,\ x'(0)=-2,\ x''(0)=3,\ x'''(0)=-8 \end{cases}$

$\begin{cases} x'' + 2tx' = 2t \\ x(0)=x'(0)=1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} t^2x'' + 5tx' + 4x = t^{-2} \\ x(1)=x'(1)=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x''' + x' - 10x = 36te^{-t} \\ x(0)=0,\ x'(0)=-3,\ x''(0)=2 \end{cases}$

9. Estudiar la estabilidad de $x^{(n)} + x = 2\cos t$ según los valores de n (entero positivo). Para n=1994 , precisar si la homogénea y la no homogénea poseen alguna solución periódica.

10. Determinar si son estables las soluciones de la ecuación $x^{iv} + x''' + 3x'' + 2x' + 3x = 0$.

11. Hallar una solución de $x''' + x'' + x = \cos t + te^{-t}$ y determinar si dicha solución es estable.

12. Sea [e] $x'''+2x''+2x'+n^2x = t$, $n=0,1,2,...$
Hallar una solución particular de [e] para todo valor de n.
Hallar la solución general para aquellos valores de n para los que [e] sea asintóticamente estable y para aquellos en que [e] sea estable no asintóticamente.

13. Sea [e] $x^{iv}+4x'''+cx''+4x'+x = \text{sen}\, t$. Hallar la solución general para c=6. Determinar un valor de c para el que [e] sea inestable y otro para el que [e] no tenga ninguna solución periódica.

14. Sea (E) $x''' + ax'' + bx' + abx = 1$.
Para $a=-1$, $b=1$, hallar la solución de (E) que cumple $x(0)=x'(0)=0$, $x''(0)=-1$.
Discutir la estabilidad de (E) según los valores de las constantes a y b .
Determinar para qué valores de a y b ninguna solución de (E) está acotada en todo $(-\infty,\infty)$.

15. Sea $x_a(t)$ la solución de $x''' + 5x'' + 2ax' + ax = -8e^{-2t}$ con $x(0)=1$, $x'(0)=-1$, $x''(0)=9$.
Determinar si son estables $x_2(t)$, $x_0(t)$ y $x_{-2}(t)$. Hallar $x_4(t)$.

16. Hallar la solución de $\begin{array}{l} x'= 2x+y \\ y'= -4x+2z \\ z'= 4-2z \end{array}$ con $x(0)=1$, $y(0)=-2$, $z(0)=2$ y estudiar su estabilidad.

17. Determinar para qué valores de a es asintóticamente estable el sistema $\begin{array}{l} x'= y-2z \\ y'= -z \\ z'= ax-5z \end{array}$
¿Es estable para a=0? Calcular $z(t)$ para a=4 si $x(0)=y(0)=0$, $z(0)=1$.

18. Estudiar para qué valores de a es asintóticamente estable la solución de $\begin{array}{l} x'= x+y \\ y'= -5x-y-z \\ z'= ax-z \end{array}$
con $x(0)=1$, $y(0)=-2$, $z(0)=5$. Calcular esta solución si a=0 y estudiar su estabilidad.

19. Determinar un valor de a , si existe, para el que el sistema $\begin{array}{l} x'= -2x+y \\ y'= x-2y+az \\ z'= ay-z \end{array}$
sea i) asintóticamente estable, ii) estable no asintóticamente, iii) inestable.

20. Discutir, en función del parámetro real a , la estabilidad del sistema: $\begin{array}{l} x'=z \\ y'=u+1 \\ z'=-x+au+2 \\ u'=-y-az+t \end{array}$.
Para a=0 , hallar la solución que satisface $x(0)=y(0)=z(0)=u(0)=0$.

21. Sea $\begin{array}{l} x''+cx'+a^2x+y = 0 \\ y''+cy'+a^2y+x = 0 \end{array}$. Determinar para qué valores de a y c es asintóticamente estable.
Calcular para a=1 y c=0 la solución con $x(0)=y(0)=1$, $x'(0)=y'(0)=0$ **.** ¿Es estable esta solución?

22. Resolver $tx''+2x'=t$: i) como ecuación de Euler, ii) haciendo $x'=y$, iii) haciendo $x=\frac{y}{t}$.
Discutir cuántas soluciones de la ecuación satisfacen $x(t_o)=0$, $x'(t_o)=1$.

23. Sea x_a la solución de $tx'' + ax' = 1$ con $x_a(1)= x_a'(1)=0$. Calcular x_a para todo valor de a .
¿Es x_a función continua de a? Discutir la estabilidad de x_a **.**

24. Estudiar la estabilidad de las soluciones de la ecuación $e^{\cos t}x'' - tx' + x = \log\left(1+e^t\right)$.

25. Encontrar una matriz **A** tal que $\begin{pmatrix} e^{2t}-e^{-t} \\ e^{2t}-2e^{-t} \end{pmatrix}$ sea solución de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

26. Sean x_1 y x_2 soluciones de [e] $x''+a(t)x'+b(t)x=0$ y llamemos $w(t)$ al determinante wronskiano $|W(t)|$ de x_1 y x_2. Hallar $w'(t)$ y utilizando la ecuación concluir que

$$w(t)=w(0)\,e^{-\int_0^t a(s)ds} \quad \text{(fórmula de Abel).}$$

De esta fórmula y de la igualdad $(x_2/x_1)'=w(t)/x_1^2$ deducir la fórmula para la segunda solución x_2 de [e] en función de la primera x_1, encontrada en teoría mediante la reducción de orden.

27. Resolver $t^2(t+3)x'''-3t(t+2)x''+6(t+1)x'-6x=0$ sabiendo que $x_1=t^2$ es solución de la ecuación.

28. Sea $t^3x'''-3t^2x''+6tx'-6x=f(t)$. Hallar una matriz fundamental del sistema equivalente y utilizarla pra encontrar una fórmula para la solución general de la ecuación no homogénea.

29. Sean las ecuaciones no lineales $2tx'x''=(x')^2-1$ y $x''=4t\sqrt{x'}$. Estudiar existencia y unicidad, calcular su solución general, comprobar la dependecia continua de los valores iniciales y determinar la estabilidad de la solución particular que satisface $x(1)=x'(1)=1$.

30. Hallar las soluciones pedidas en los problemas 2, 5, 8 (las de coeficientes constantes), 15, 16, 17, 18 y 20, mediante transformadas de Laplace.

31. Resolver $y'=-y+\begin{cases} t\,, & t\le 2 \\ 2\,, & t>2 \end{cases}$ con $y(0)=-1$. ¿Cuántas derivadas tiene la solución en $t=2$?

32. Sea $t^2x''-6x=(a-3)t^a$, con $x(1)=0$, $x'(1)=1$.

Hallar su solución para todos los valores de la constante a y determinar su estabilidad.

Para $a=-2$, comprobar el resultado haciendo $t=e^p$ y utilizando transformadas de Laplace.

33. Resolver:

$$\begin{array}{llll} x''+x=u_\pi(t) & x''+4x=\delta(t-\pi)-\delta(t-2\pi) & x''-x=2\delta(t-1) & x''+x=u_1(t)[e^{-1}-e^{-t}] \\ x(0)=1,\ x'(0)=0 & x(0)=0,\ x'(0)=0 & x(0)=1,\ x'(0)=0 & x(0)=1 \end{array}$$

34. Resolver: $x''+x'=\begin{cases} t+1 & 0\le t<1 \\ 3-t & 1\le t \end{cases}$, $x(0)=-1$, $x'(0)=0$ $\qquad x''+x=\begin{cases} \operatorname{sen} t & 0\le t<3\pi \\ 0 & 3\pi\le t \end{cases}$, $x(0)=x'(0)=0$

35. Resolver $\begin{array}{l} x''-x'=f_n(t) \\ x(0)=x'(0)=0 \end{array}$ con $f_n(t)=\begin{cases} 0 & \text{si } 0\le t<1 \\ ne^{n-nt} & \text{si } t\ge 1 \end{cases}$ y estudiar lo que sucede cuando $n\to\infty$.

36. Resolver $x''+2cx'+x=\delta(t-1)$, $c\ge 0$, con $x(0)=x'(0)=0$, distinguiendo los casos $c<1$, $c=1$ y $c>1$. Dibujar la solución para $c=0$ y comentarla físicamente.

37. Hallar la solución de $x''+2x'+2x=f(t)$, $x(0)=x'(0)=0$, i) a partir de la fórmula de variación de las constantes, ii) utilizando transformadas de Laplace. Escribir la solución si en particular $f(t)=\delta(t-\pi)$.

38. Hallar la solución de $x'''+6x'+20x=18\,\delta(t-\pi)$ con $x(0)=x'(0)=x''(0)=0$ y escribir su valor para $t=\pi/2$ y $t=13\pi/12$. ¿Cuántas derivadas posee dicha solución en $t=\pi$?

39. Calcular la solución de $x'''-3x''+2x'=\begin{cases} 0 & ,\ t<1 \\ 2e[2t-3] & ,\ t\ge 1 \end{cases}$ que verifica $x(0)=x'(0)=x''(0)=2$.

40. Resolver los sistemas:

$$\begin{array}{llllll} x'=2x-y & x(0)=0 & x'=-x+y & x(0)=0 & x'=-y+tu_1(t) & x(0)=-e \\ y'=x+|2-t| & y(0)=-1 & y'=x-y+2\delta(t-1) & y(0)=0 & y'=x-2y & y(0)=0 \end{array}$$

$\begin{array}{l} x'=-y+f(t) \\ y'=x+f(t) \end{array}$ $f(t)=\begin{cases} 1 & 0\le t<\pi \\ 0 & t\ge\pi \end{cases}$, $\begin{array}{l} x(0)=0 \\ y(0)=0 \end{array}$ $\qquad \begin{array}{l} x'=x+f(t) \\ y'=x+y \end{array}$ $f(t)=\begin{cases} 2e^t & 0\le t<1 \\ 0 & t\ge 1 \end{cases}$, $\begin{array}{l} x(0)=-2 \\ y(0)=1 \end{array}$

41. a) Consideremos la ecuación integral de Volterra $x(t)+\int_0^t k(t-s)\,x(s)\,ds=f(t)$, con f y k dadas. Tomando transformadas de Laplace obtener una expresión para L(x) en términos de L(f) y L(k).

b) A partir de lo anterior, resolver en particular $x(t)+\int_0^t (t-s)\,x(s)\,ds=\text{sen}2t$.

Ver que este problema equivale a: $x''+x=-4\text{sen}2t$, $x(0)=0$, $x'(0)=2$. Resolverlo y comprobar.

42. Determinar si existen soluciones 2π-periódicas y si son o no estables:

$x'=x\cos t-\text{sen}^2 t$	$x'=x\cos^2 t-\text{sen}\,t$	$x''+x=\cos^3 t$	$x''-x'+2x=\text{sen}\,t$
$x''+x'=1+\cos 2t$	$4x''+x=\cos t$	$x''=\text{sen}\,t\,\lvert\cos t\rvert$	$x''+x=\text{sen}(t+1)$

43. Encontrar una fórmula para la solución general de $x'''+x'=f(t)$. Hallar dicha solución general si i] $f(t)=1$, ii] $f(t)=\cos 2t$. Estudiar en cada caso el número de soluciones 2π-periódicas existentes. En general, si f(t) es cualquier función 2π-periódica, dar criterios para determinar el número de soluciones 2π-periódicas.

44. Sea $x''+x=f_c(t)$ (c>0) donde a) $f_c(t)=\text{sen}\,ct$, b) $f_c(t)=u_{\pi/c}(t)-u_{2\pi/c}(t)+u_{3\pi/c}(t)-\ldots$

c) $f_c(t)=\delta\!\left(t-\frac{2\pi}{c}\right)+\delta\!\left(t-\frac{4\pi}{c}\right)+\ldots$

En los tres casos:
i] Hallar la solución general para todo valor de c.
ii] Estudiar la existencia de soluciones 2π-periódicas si c=1 y c=2 .
iii] Dibujar para c=1 y c=2 la solución con $x(0)=x'(0)=0$, comparando con $f_1(t)$ y $f_2(t)$.
iv] Interpretar físicamente los resultados anteriores.

45. Sea $x''+\frac{1}{4}x'+x=\text{sen}\,ct$, c>0 .

Responder para esta ecuación las cuestiones i] y ii] del problema anterior.
Determinar la solución periódica $y^*(t,c)$ a la que tienden a acercarse todas las soluciones y escribirla para cada c en la forma $y^*=A\,\text{sen}(ct+B)$. Estudiar como varía A en función de c .
¿Para qué valor de c se obtiene la amplitud máxima? Interpretarlo físicamente.

46. Sean las ecuaciones $x''+x=\lvert\text{sen}\,t\rvert$; $x''+4x=\lvert\text{sen}\,t\rvert$.
Estudiar si tienen soluciones periódicas. Hallar y dibujar la solución que satisface $x(0)=x'(0)=0$.

problemas 3

1. Estudiar si las siguientes ecuaciones tienen puntos singulares o no y clasificarlos:

$t^2x'' - 2x = 0$ $\quad$ $(2t-t^2)\, x'' + (1-3t)\, x' - x = 0$ $\quad$ $tx'' + 2x' + \ln t\, x = 0$

$t^2x'' + 2x' + 4x = 0$ $\quad$ $tx'' + e^t x' + 3\cos t\, x = 0$ $\quad$ $t\,\mathrm{sen}\,t\, x'' + 3x' + tx = 0$

2. Escribir una ecuación lineal homogénea de segundo orden tal que: i) tenga un punto singular regular en $t=0$, ii) las raíces de su polinomio indicial en ese punto sean 1/3 y –1/3, iii) tenga en $t=1$ un punto singular que no sea regular.

3. Resolver por medio de series en torno a $t=0$:

$2t^2x'' + (t^2-t)\, x' + x = 0$ $\quad$ $x'' - e^t x = 0$ $\quad$ $t^2x'' - 5tx' + 3(t+3)x = 0$ $\quad$ $2tx'' + x' - x = 0$

$(t^2-t)\, x'' - tx' + x = 0$ $\quad$ $x'' + t^2 x = 0$ $\quad$ $(1+t^2)x'' - 2tx' + 2x = 0$ $\quad$ $(t^2-1)x'' - 2x = 0$

$2t^2x'' - tx' + (t-5)x = 0$ $\quad$ $x'' + tx = 0$ $\quad$ $t^2x'' - t(t+2)x' + (t+2)x = 0$ $\quad$ $tx'' + (1-t)\, x' + x = 0$

$(t^2-1)\, x'' + 3tx' + tx = 0$ $\quad$ $x'' + tx' + x = 0$ $\quad$ $3t^2(1+t)x'' + t(5+2t)x' - x = 0$ $\quad$ $(1-\cos 3t)\, x'' - 2x = 0$

4. Dar un valor de b para el que la solución general por series de $tx'' + b\, e^{\mathrm{sen}\,t} x' = 0$ en torno a $t=0$ no contenga logaritmos y otro valor para el que sí.

5. Determinar si contiene o no logaritmos la solución general por series en torno a $t=0$:

$tx'' + 2e^t x' = 0$ $\qquad$ $tx'' + 2\cos t\; x' = 0$

6. Sabiendo que $x=t$ es solución de la ecuación $tx'' - tx' + x = 0$, determinar si es posible escribir el desarrollo en torno a $t=0$ de otra solución linealmente independiente sin que aparezcan logaritmos. Estudiar si es estable la solución con $x(1)=x'(1)=0$.

7. Probar que toda solución del sistema $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{3}{t^2}x + \dfrac{5}{2t}\cos t\, y \end{cases}$ tiende a **0** cuando $t\to 0$.

8. Sea $2\sqrt{t}\, x'' - x' = 0$. Precisar si $t=0$ es un punto singular regular de la ecuación. Calcular el desarrollo en serie en $t=1$, hasta tercer orden, de la solución con $x(1)=x'(1)=1$.

9. Demostrar que $2\ln t\, x'' + x' + 2x = 0$ tiene un punto singular regular en $t=1$. Calcular los tres primeros términos del desarrollo en serie correspondiente a la raiz mayor del polinomio indicial. Indicar donde converge, al menos, la serie obtenida.

10. Sean $(1+t^2)\, x'' - 2x = 1$ $\quad$ $t^2x'' - 2tx' + (2+t^2)\, x = t^3\cos t$ $\quad$ $t^2x'' - 2tx' + (2-t^2)\, x = 2t^3\mathrm{ch}\, t$

Hallar la solución general de la homogénea en forma de series en tono a $t=0$.
Hallar la solución general en términos de funciones elementales.

11. Hallar la solución general de $(t^3+1)x'' - 3t^2x' + 3tx = (t^3+1)^2$.

12. Sea $(1-t^2)\, x'' - tx' + x = 1-t^2$. Resolver la homogénea por medio de series y hallar la solución general de la no homogénea en términos de funciones elementales. Comprobar el resultado haciendo el cambio $t = \mathrm{sen}\, s$.

13. Sea $t^2x'' - 3tx' + 3x = t^3$. Hallar la solución general de la no homogénea. Hallar la solución general de la homogénea utilizando series de potencias centradas en i] $t=0$, ii] $t=1$.

14. Calcular la solución general por medio de series de $x'' - 2tx' = 0$. Resolverla por otros métodos y comparar. Estudiar la estabilidad de la solución $x=0$.

15. Escribir la solución de $x''-\ln|t|x'=0$ con $x(1)=0, x'(1)=1$ en términos de funciones elementales y ver si es estable. Hallar los tres primeros términos no nulos del desarrollo de dicha solución en torno a $t=1$. Determinar qué puntos de la ecuación son regulares o singulares regulares.

16. Hallar el desarrollo en torno a t=0 de la solución de $(1-t)(1-2t)x''+2tx'-2x=0$ con $x(0)=x'(0)=1$. Hallar las raíces del polinomio indicial para cada punto singular regular. Estudiar cuántas soluciones de la ecuación satisfacen $x(1)=0$, $x'(1)=1$.

17. Discutir para qué valores de a es $t=0$ un punto singular regular de $t^a x''+4tx'+2x=0$.
Si a=2, hallar el desarrollo en serie de la solución con $x(1)=1$, $x'(1)=-1$ en $t=1$ hasta tercer orden.
Hallar la solución de la ecuación $t^2 x''+4tx'+2x=e^t$, con $x(1)=x'(1)=0$. ¿Es estable?

18. Hallar la solución general de la ecuación $\operatorname{sen} t\, x''-3\cos t\, x'=2\operatorname{sen} t \cos t$.
Determinar qué puntos t son regulares o singulares regulares, y hallar los dos primeros términos no nulos del desarrollo en torno a $t=0$ de una solución de la homogénea que no sea constante.

19. Sea $tx''-x'-4t^3x=0$. Comprobar que $x=e^{t^2}$ es solución. Hallar el desarrollo en serie de potencias de una solución que se anule en $t=0$.

20. Hallar el desarrollo hasta orden 5 de una solución de $t^2x''-3t^4x'-(3t^3+2)x=0$ que esté acotada en $t=0$ [puede ser útil saber que $x=1/t$ es solución].

21. Sea $(t-1)x''+2tx'+(t+1)x=0$. a) Comprobar que tiene una solución de la forma e^{at} y escribir la solución con $x(0)=1$, $x'(0)=0$ en términos de funciones elementales. b) Hallar los tres primeros términos no nulos del desarrollo en torno a 0 de esta solución utilizando directamente el método de series. c) ¿Es estable la solución que satisface $x(\pi)=x'(\pi)=1$?

22. Hallar una solución no trivial de $tx''-(3t+1)x'+9x=0$.
¿Es cierto que todas las soluciones de la ecuación tienden a 0 cuando t tiende a 0?

23. Sean las ecuaciones $t^2x''+x'=0$ y $t^3x''+tx'-x=0$. Hallar la solución general por métodos elementales y estudiar la estabilidad. ¿Se podrían resolver por series en torno a $t=0$? Calcular hasta orden 3 el desarrollo en serie de potencias en torno a $t=1$ de la solución con $x(1)=x'(1)=1$.

24. Sea $\cos t\, x''+(2-\operatorname{sen} t)x'=0$. Hallar por diversos métodos el desarrollo hasta orden 4 en $t=0$ de la solución con $x(0)=1$, $x'(0)=-1$.

25. Sea $t^2x''+(1-e^t)x'+tx=0$. Hallar los dos primeros términos no nulos del desarrollo en serie de una solución que se anule en $t=0$.

26. Sea $t^2x''-4tx'+[t^2+6]x=f(t)$.
Si $f(t)=0$, hallar una solución por el método de Frobenius e identificar la serie obtenida.
Para $f(t)=t^4$, hallar la solución general en términos de funciones elementales.
Para $f(t)=e^{-t}$, determinar la estabilidad de la solución que verifica $x(1)=\pi$, $x'(1)=10$.

27. Sea [E] $t^3x''+[At^2+B]x'+[Ct^2+D]x=0$. Determinar para qué valores de A, B, C y D son tanto $t=0$ como $t=\infty$ puntos singulares regulares de [E]. Para estos valores, precisar cuándo existen soluciones de [E] que tienden hacia 0 cuando t tiende a ∞.

28. Sea $t[t-1]x''+2[2t-1]x'+2x=0$. Probar que existe una solución analítica en torno a $t=0$ y calcularla. Estudiar si todas las soluciones tienden hacia 0 cuando t tiende a ∞.

29. Sea $t^4x''+2t^3x'-x=1$. Determinar si $t=0$ y $t=\infty$ son puntos regulares o singulares regulares de la homogénea. Hallar la solución que satisface $x(1)=0$, $x'(1)=1$.

30. Sea $[t^4+t^2]x''+[5t^3+t]x'+[3t^2-1]x=0$.
Probar que posee soluciones no triviales que tienden a 0 cuando i) $t\to 0$, ii) $t\to\infty$.
¿Existen soluciones que tiendan a 0 tanto cuando $t\to 0$ como cuando $t\to\infty$?

31. Estudiar las soluciones en t=0 de las ecuaciones

$$tx'' + (1-t)\,x' + px = 0 \quad \text{(Laguerre)} \qquad\qquad (1-t^2)\,x'' - tx' + p^2x = 0 \quad \text{(Tchebycheff)}$$

y determinar para qué valores de p las soluciones son polinomios.

32. Resolver la ecuación de Hermite $x'' - 2tx' + 2px = 0$ por medio de series. Comprobar que si p es un número natural existe solución polinómica. Se llaman polinomios de Hermite $H_n(t)$ a aquellas soluciones polinómicas tales que los términos que contienen la potencia más alta de t son de la forma 2^nt^n. Escribir los cuatro primeros H_n y comprobar que vienen dados por la fórmula:

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2}$$

33. Hallar una solución linealmente independiente de P_1 para la ecuación de Legendre con p=1, sin recurrir a series. Desarrollar en serie de Taylor esta solución y comparar con la serie obtenida a partir de la fórmula general de las soluciones.

34. Cualquier polinomio $Q_n(t)$ de grado n se puede escribir como combinación lineal de los $n+1$ primeros polinomios de Legendre: $Q_n = c_0P_0 + ... + c_nP_n$.
Probar que $c_k = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1} Q_n(t)\,P_k(t)\,dt$. Escribir $Q_4(t) = t^4$ como combinación lineal de $P_0,...,P_4$.

35. Deducir de la fórmula de Rodrigues para los polinomios de Legendre:

$$nP_n = tP_n' - P_{n-1}' \qquad\qquad (n+1)P_{n+1} - (2n+1)\,t\,P_n + nP_{n-1} = 0$$

36. Hallar la solución general de la ecuación de Legendre con p=1 en forma de series de potencias de 1/t resolviendo la ecuación del infinito. Comparar con la solución del problema 33.

37. Sea $t(t-1)\,x'' + x' - px = 0$. Determinar para qué valores de p tiene solución polinómica. Probar que todas sus soluciones está acotadas en t=0 . Probar que para p=2 existen soluciones que tienden a 0 cuando t tiende a ∞: i] calculando la solución general en términos de funciones elementales, ii] haciendo s=1/t y analizando la ecuación resultante en s=0 .

38. La ecuación hipergeométrica de Gauss es [G] $t(1-t)x'' + [c-(a+b+1)t]\,x' - abx = 0$.

a) Hallar las raíces del polinomio indicial en cada punto singular regular de [G].

b) Probar que el punto del infinito es singular regular y hallar las raíces de su polinomio indicial.

c) Probar que cada uno de los cambios: i) $x=t^{1-c}z$, ii) $s=1-t$, iii) $x=t^aw$, convierte [G] en otra ecuación hipergeométrica.

d) Suponiendo que $1-c$, $c-a-b$ y $a-b$ no son enteros, hallar las soluciones de [G] en forma de serie en torno a t=0 , t=1 y $t=\infty$.

e) Probar que toda ecuación de la forma $(s-A)(s-B)x'' + (C+Ds)\,x' + Ex = 0$ se puede convertir en la ecuación [G] mediante un cambio de variable independiente.

39. Hallar una solución de $tx'' + 2x' + a^2tx = 0$ que esté acotada en t=0 . Hacer $x=\frac{y}{t}$ y comprobar.

40. Comprobar que la ecuación de Bessel tiene un punto singular no regular en el infinito.

41. Desarrollar hasta orden 3 en t=1 la solución de $t^2x'' + tx' + (t^2 - \frac{1}{4})x = 0$ con $x(1)=0, x'(1)=1$.

42. Calcular la solución de $t^2x'' + tx' + (t^2 - \frac{1}{4})\,x = t^{3/2}$ con $x(1)=1$, $x'(1)=-1/2$.

43. Comprobar: $J_{-n} = (-1)^n J_n$; $(t^p J_p)' = t^p J_{p-1}$; $(t^{-p}J_p)' = -t^{-p} J_{p+1}$; $J_{p-1} + J_{p+1} = \frac{2p}{t} J_p$;
$J_p' = \frac{1}{2}(J_{p-1} - J_{p+1})$; $J_{1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\,\text{sen}\, t$; $J_{-1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\cos t$. Hallar $J_{5/2}$.

44. Comprobar que el cambio $x = t^{-p}y$ transforma $tx'' + (2p+1)x' + tx = 0$ en $t^2y'' + ty' + (t^2-p^2)y = 0$.
Utilizar dicho cambio para: i] Resolver la ecuación de Bessel con $p=1/2$ sin utilizar series
ii] Resolver $tx'' + 2x' + tx = 0$.

45. Obtener la función de Bessel J_o siguiendo los pasos indicados: a) Convertir la ecuación de Bessel de orden 0 mediante transformadas de Laplace en una de primer orden para $X(s)$.
b) Resolver esta segunda ecuación y desarrollar el resultado en serie de potencias de s .
c) Calcular, término a término, la transformada inversa de $X(s)$ (suponiendo que se puede).

46. Sea $t^2 x'' + (3t-1) x' + x = 0$. Comprobar que $t=0$ es punto singular. ¿Es regular?
Hallar una solución de la forma $t^r \Sigma a_n t^n$ y discutir su validez.

47. Adaptar la teoría de este capítulo a la resolución por series de las más sencillas ecuaciones lineales de primer orden con coeficientes analíticos (o "poco" no analíticos). Identificar algunas ecuaciónes de los problemas del primer capítulo resolubles por medio de series, hallar por este camino su solución y comparar resultados.

problemas 4

1 . Dibujar el mapa de fases:

$x''=-4x'-4x$ $\quad$ $x''=x-x^3$ $\quad$ $x''=x^{-3}-x^{-2}$ $\quad$ $x''=x\left[(x')^2-1\right]$ $\quad$ $x''=(1-x^2)x'-x$

$\begin{cases} x'=xy \\ y'=x+y^2 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x'=y\,e^x \\ y'=e^x-1 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x'=y-2xy \\ y'=y^2-2x \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x'=2y+2xy \\ y'=2x-x^2-y^2 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x'=1-x+3y \\ y'=x+y-1 \end{cases}$

$\begin{cases} x'=y(x+1) \\ y'=x(1+y^3) \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x'=y-y^2 \\ y'=x-x^2 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x'=x^3y \\ y'=-y+x^2y^2 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x'=2x \\ y'=y(1-y)+x^2 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x'=x^2-2xy \\ y'=y^2-2xy \end{cases}$

2 . Sea $\begin{matrix} x'=x-x^2y \\ y'=y-x^3 \end{matrix}$. Hallar sus órbitas, localizar todas las órbitas rectas y dibujar el mapa de fases.

3 . Sea $\begin{matrix} x'=3y^2-3 \\ y'=6x+4x^3 \end{matrix}$. Hallar la ecuación de sus órbitas y dibujar su mapa de fases. Determinar para qué valores de a es periódica la solución con $x(0)=0$, $y(0)=a$.

4 . Sea el sistema: $\begin{matrix} x'=\operatorname{sen} y \\ y'=\operatorname{sen} x \end{matrix}$. Hallar la ecuación de sus órbitas y dibujar su mapa de fases. Determinar qué soluciones del sistema están definidas para todo t.

5 . Sea $x''=x^3-7x^2+10x$. Dibujar su mapa de fases y determinar para qué valores de a es periódica la solución con $x(0)=a$, $x'(0)=0$.

6 . Sea la ecuación $x''=(x-x^2)\,e^{-2x}$. Dibujar su mapa de fases. Estudiar la estabilidad de las soluciones que satisfacen i) $x(0)=x'(0)=0$, ii) $x(0)=1$, $x'(0)=e^{-1}$.

7 . Sea $\begin{matrix} x'=2xy \\ y'=1-x^2-y^2 \end{matrix}$. Dibujar su mapa de fases y estudiar la prolongabilidad de las soluciones.

8 . Sea $x''=g(x)$ y supongamos que en x_o la gráfica de la función potencial tiene un punto de inflexión con tangente horizontal. Describir el mapa de fases cerca de $(x_o,0)$.

9 . Calcular el valor de a para el que las órbitas de $x''=x^2-4x+a$ cambian radicalmente, dibujando el mapa de fases en cada caso.

10 . Sea $\begin{matrix} x'=2x-4y+ax^3+by^2 \\ y'=2x-2y \end{matrix}$. Elegir a y b (no ambos cero) para los que haya un centro en el origen y dibujar el mapa de fases. Identificar en él órbitas que correspondan a soluciones i] inestables, ii] definidas para todo t .

11 . Sea $V(x,y)=2x^2-2xy+5y^2+4x+4y+4$. Dibujar las curvas de nivel de V y el mapa de fases del sistema $\begin{matrix} x'=-V_x \\ y'=-V_y \end{matrix}$.

12 . Sea [e] $2x''-(x')^2+x(x-2)=0$ y sea [o] la ecuación diferencial de sus órbitas. Resolver [o] . Dibujar el mapa de fases de [e]. Estudiar existencia y unicidad para [e] y [o] . Explicar por qué no es contradictorio que existan dos soluciones de [o] pasando por el origen y que exista una única de [e] con $x(0)=x'(0)=0$. Estudiar la estabilidad de las soluciones de [e] que satisfacen:

i] $x(0)=x'(0)=0$ $\qquad$ ii] $x(7)=2$, $x'(7)=0$ $\qquad$ iii] $x(-1)=1$, $x'(-1)=-1$

13 . Dibujar el mapa de fases del sistema $\begin{matrix} x'=2xy \\ y'=y^2-x^2-4 \end{matrix}$

Identificar la órbita asociada a la solución con $x(0)=2$, $y(0)=0$ y describir la $x(t)$ de dicha solución.

14. Dibujar las órbitas del sistema $\begin{array}{l} x'=2xy \\ y'=1-x^2+y^2 \end{array}$ y las curvas ortogonales a dichas órbitas. Estudiar qué soluciones están definidas para todo t .

15. Hallar la ecuación de las óbitas y dibujar el mapa de fases de los sistemas

$$\begin{array}{l} x'=x+2xy \\ y'=y^2-1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x'=x(x-2) \\ y'=(x-2y)(x-1) \end{array}$$

Estudiar si están definidas para todo t las soluciones cuyas proyecciones sean semirrectas.

16. Dibujar el mapa de fases tras escribir en coordenadas polares:

$$\begin{array}{l} x'=y+x^3+xy^2 \\ y'=-x+x^2y+y^3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x'=y-x(x^2+y^2-1) \\ y'=-x-y(x^2+y^2-1) \end{array} \qquad \begin{array}{l} x'=(x-y)(1-x^2+y^2) \\ y'=(x+y)(1-x^2+y^2) \end{array}$$

17. Sea $\begin{array}{l} x'=y+x^2y \\ y'=-x+xy^2 \end{array}$. Hallar sus órbitas y dibujar su mapa de fases. Escribirlo en polares. Estudiar para qué valores de b está definida para todo t la solución con $x(\pi)=0$, $y(\pi)=b$.

18. Sea el sistema [S] $\begin{array}{l} x'=x^2-xy-2y \\ y'=xy-y^2+2x \end{array}$.

Escribir [S] en coordenadas polares, hallar la expresión de las órbitas en polares y deducir la expresión en cartesianas. Hallar y clasificar los puntos críticos de [S] , probar que hay una órbita de [S] que es una recta y dibujar el mapa de fases de [S] .

19. Dibujar el mapa de fases del siguiente sistema debido a Poincaré (el uso de polares es útil):

$$\begin{array}{l} x'=x(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-9)-y(x^2+y^2-2x-8) \\ y'=y(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-9)+x(x^2+y^2-2x-8) \end{array}$$

20. Clasificar los puntos críticos de los sistemas: $\begin{array}{l} x'=x^3-y \\ y'=x+y^3 \end{array}$ $\qquad \begin{array}{l} x'=x^2-y \\ y'=xe^y \end{array}$

21. Sea $x''=-x\left[x^2+(x')^2\right]$. Hallar la órbita de su mapa de fases que pasa por el punto (–1,0) . ¿Es periódica la solución de la ecuación que satisface $x(\pi)=-1$, $x'(\pi)=0$?

22. Estudiar los mapas de fases de los sistemas lineales autónomos que tienen algún autovalor 0.

23. Sea [S] $\begin{array}{l} x'=x^2 \\ y'=x-y+x^2 \end{array}$ Resolver la ecuación diferencial [o] de sus órbitas.

Dibujar las isoclinas y curvas integralesde [o] y el mapa de fases de [S] . Determinar si es estable el origen en el sistema [S] y si lo es la solución y(x) de [o] que satisface $y(1)=1$.

24. Sean los sistemas $[S_a]$ $\begin{array}{l} x'=ax \\ y'=2ay-y^2 \end{array}$.

i] Hallar la ecuación de sus órbitas y determinar la curva del plano xy en la que dichas órbitas poseen puntos de inflexión.
ii] Dibujar los mapas de fases de $[S_a]$ para $a>0$, $a=0$ y $a<0$.
iii] Hallar la solución de $[S_a]$ con $x(0)=y(0)=2a$. ¿Es estable? ¿Lo es la órbita y(x) que define, vista como solución de la ecuación diferencial de las órbitas?

25. Probar que son periódicas las soluciones de $\begin{array}{l} x'=y^m \\ y'=-x^n \end{array}$, m,n impares.

26. Estudiar, según los valores de a, la estabilidad de la solución x=0 de las ecuaciones:

$$x''=a\,\mathrm{sen}x\cos x \qquad x''+ax'+e^x=1 \qquad x''+x=a\,\mathrm{sen}(x') \qquad x''+ax^n=0\,,\ n\in\mathbb{N}$$

27. Sea $\begin{array}{l} x' = ay+bx^3 \\ y' = ax+by^3 \end{array}$. i) Discutir según los valores de a y b la estabilidad de la solución x=y=0 .
ii) Discutir si existen soluciones no triviales de [S] que tiendan a 0 cuando $t\to\infty$.

28. Sea la ecuación $x'' = ax-2x'+(x')^2$.
Para a=0 : Resolver la ecuación diferencial de las órbitas y dibujar el mapa de fases.
Hallar la solución de la ecuación que satisface x(0)=1 , x'(0)=2 .
Para todo a : discutir la estabilidad de la solución trivial x=0 .

29. Calsificar según los valores de a todos los puntos críticos de [E] $x'' = \text{sen}(ax+x')$, $a\geq 0$.
Para a=2, dibujar el mapa de fases.
Para a=0, hallar la solución de [E] que satisface i) $x(0)=\pi$, x'(0)=0 , ii) x(0)=0, $x'(0)=\pi$.

30. Sea el sistema [S] $\begin{array}{l} x' = a(y-x)+1 \\ y' = a(y-x)+x \end{array}$. Hallar la expresión de sus órbitas.
Para diferentes valores de a dibujar el mapa de fases y estudiar la estabilidad de las soluciones.
Para a=–1 , calcular la solución de [S] que satisface x(0)=y(0)=0 .

31. Hallar la solución general y la particular que satisface el dato inicial x(0)=x'(0)=1 :

$$3x'x'' = 1 \qquad\qquad x^2x'' = x'(xx'-2)$$

32. Comparar la órbitas y las soluciones de los sistemas $\begin{array}{l} x' = y \\ y' = -x \end{array}$ y $\begin{array}{l} x' = y(x^2+y^2) \\ y' = -x(x^2+y^2) \end{array}$.

33. Sea [e] la ecuación a) $x'' = 4x-3x'$, b) $x'' = x\left[1-(x')^2\right]$, c) $x'' = 2x^3$
Llamemos [o] a la ecuación diferencial de sus órbitas. Para los tres casos:
i] Resolver [o] y dibujar el mapa de fases de [e].
ii] Estudiar existencia y unicidad para [e] y [o].
iii] Si en t=0 es x=x'=1 , ¿en que instante es $x=10^{10}$?
iv] Estudiar la estabilidad de la solución v(x) de [o] con v(1)=1.
v] Estudiar la prolongabilidad de la solución x(t) de [e] que satisface x(0)=0, x'(0)=2 .

34. Sea el sistema $\begin{array}{l} x'=x^a \\ y'=y^a \end{array}$. Dibujar su mapa de fases basándose en la ecuación de sus órbitas.
Estudiar para qué valores de a la solución del sistema con x(0)=y(0)=1 explota en tiempo finito.

35. Sea $\begin{array}{l} x'=y-xy \\ y'=-x+x^2 \end{array}$. Dibujar su mapa de fases. Estudiar la estabilidad de la solución x=1 , y=0 .
Precisar las órbitas que corresponden a soluciones periódicas del sistema y calcular su periodo.

36. Sea la ecuación [E] $x'' + x + ax^2 + bxx' = 0$. a) Estudiar para que valores de a y b se puede garantizar que [E] posee un centro en el origen. b) Si a = b = –1 , dibujar el mapa de fases. ¿Qué sugiere este dibujo sobre la estabilidad de la solución x=0 ?

37. Estudiar las simetrías de sus órbitas y dibujar el mapa de fases de la ecuación $x'' = x - x^3 - xx'$.

38. Sea [S] $\left\{ \begin{array}{l} x' = x^2+3y^2 \\ y' = -2xy \end{array} \right.$.
a) Resolver la ecuación diferencial de sus órbitas de dos formas diferentes.
b) Dibujar isoclinas y curvas de puntos de inflexión de esta ecuación.
c) Dibujar el mapa de fases de [S] .
d) Precisar si está definida para todo t la solución de [S] con x(2)=1, y(2)=0 .
e) Determinar si es estable la solución de [S] con x(2)=y(2)=0 .

39. Sea $x'' = ax + (x')^2$. a) Resolver la ecuación diferencial de sus órbitas.
b) Discutir, según los valores de la constante a , la estabilidad de la solución x=0 .
c) Para a=–1 , dibujar el mapa de fases y hallar la solución que cumple x(2)=1/2 , x'(2)=1 .

40. Estudiar para qué valores de A , B y C las siguientes funciones son definidas positivas en un entorno del origen:

$U(x,y) = Ax^2+Bxy+Cy^2$ $\quad U(x,y) = Ax^4+Bx^2y^2+Cy^4$ $\quad U(x,y) = Ax^3+By^3$ $\quad U(x,y) = Ax^2+Cy^2+Bx^3$

41. Estudiar la estabilidad del origen con funciones de Lyapunov:

$x''+(x')^3+2x=0$ $\qquad \begin{cases} x'=-x^3+xy^2 \\ y'=-4x^2y-y^3 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x'=2y^3 \\ y'=-xy^2-y^3 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x'=y^3+x^3-x^4 \\ y'=-x+y \end{cases}$

42. Sea $x''+x'+ax^2-2x=0$. Clasificar los puntos críticos y dibujar el mapa de fases según los valores de a . Interpretar físicamente las órbitas.

43. Clasificar los puntos críticos de $x''=1-x^2-kx'$, $k\geq 0$, en función de los valores de k. Dibujar aproximadamente el mapa de fases para k=0 , k=1 y k=3 . Interpretar físicamente.

44. Clasificar los puntos críticos de la ecuación del péndulo rotatorio $x''=\text{sen}x\,(-1+w^2\cos x)$, según los valores de w. Dibujar el mapa de fases para w=0 (péndulo simple) y para $w=\sqrt{2}$.

45. Un péndulo se desplaza un ángulo $x[(0,\pi)$ de su posición de equilibrio estable y se abandona. Hallar el periodo de la oscilación en función de una integral (se supone g/l =1).

46. Considérese el péndulo rotatorio del problema 43 y supongamos ahora que hay rozamiento:

$$x''=\text{sen}x\,(-1+w^2\cos x)-ax' \ ,\ a>0$$

Estudiar la estabilidad de la solución x=0 (para w=1 hacer uso de una función de Lyapunov). Dibujar e interpretar el mapa de fases con a=1 y w=0 (péndulo simple con rozamiento).

47. Una partícula se mueve por el eje x según $x''=-x\,(x^2+9)^{-2}$. Dibujar e interpretar el mapa de fases. Si la partícula pasa por el origen con velocidad v=1/3, ¿qué velocidad tiene cuando pasa por x=4 ? ¿Cuánto tiempo tarda en llegar a x=4 ?
¿Existe alguna órbita v(x) que sea solución estable de la ecuación diferencial de las órbitas? ¿Es estable la órbita que satisface v(0)=1/3? Imponer una pareja de datos iniciales a la ecuación inicial de segundo orden de modo que la solución correspondiente sea inestable.

48. El sistema $\begin{matrix} x'=x(3-x-ay) \\ y'=y(3-y-ax) \end{matrix}$, a>0 , puede describir la evolución de las poblaciones de dos especies animales en competición (x e y son esas poblaciones expresadas en unidades adecuadas) . Clasificar los puntos críticos elementales para todo a>0 . Dibujar los mapas de fases para a=1/2 , a=1 y a=2 , e interpretarlos comparando los resultados.

49. Supongamos que el sistema $\begin{matrix} x'=x(2-x-y) \\ y'=y(3-y-2x) \end{matrix}$ describe la evolución de una población de truchas (x) y salmones (y) en un mismo estanque y que un pescador pesca sólo truchas con una velocidad proporcional al número de ellas existente. Indicar, dibujando varios mapas de fases, como influye en la evolución de ambas poblaciones su mayor o menor habilidad pescadora.

50. a) El sistema $\begin{matrix} x'=x(3-y) \\ y'=y(-1+x) \end{matrix}$ puede describir la evolución de dos poblaciones animales en relación preadadora (x moscas, y murciélagos, por ejemplo). Dibujar e interpretar el mapa de fases. Comprobar que (según este modelo) es contraproducente emplear insecticida si éste mata también una proporción fija de los murciélagos existentes.

b) Si suponemos la existencia de un tope de población para las moscas se tiene $\begin{matrix} x'=x(3-ax-y) \\ y'=y(-1+x) \end{matrix}$.
Dibujar e interpretar este mapa de fases para a=1 , a=2 y a=4 .

51. Construir una teoría para el dibujo de órbitas de ecuaciones autónomas de primer orden y'= f(y) en la "recta de fases". Estudiar el caso particular en que f es periódica, representando entonces el "mapa de fases" sobre una circunferencia.