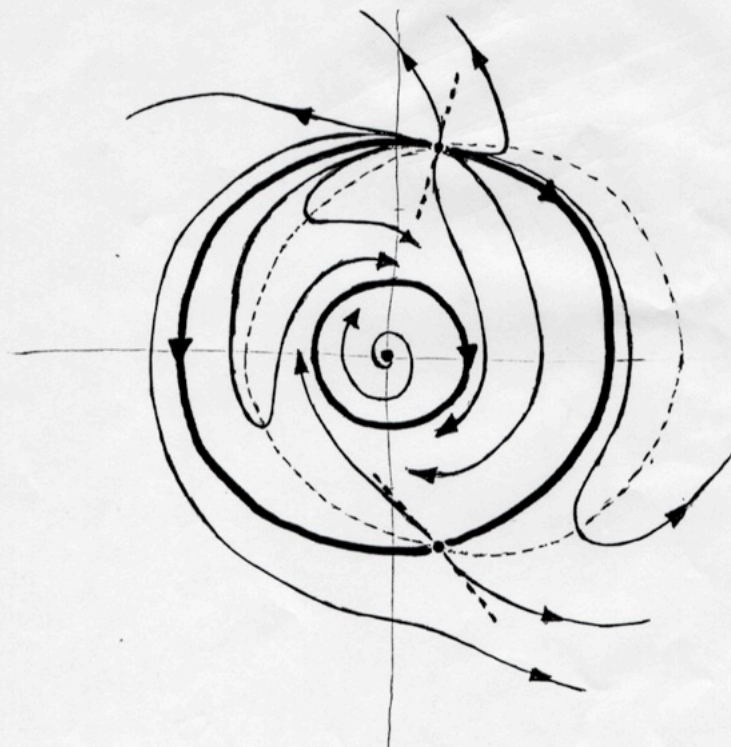


APUNTES DE ECUACIONES DIFERENCIALES



PEPE ARANDA
dto. métodos matemáticos
físicas complutense

índice

1. ECUACIONES DE PRIMER ORDEN	1
1.1 Métodos elementales de integración	3
1.2 Dibujo aproximado de soluciones. Cálculo aproximado	7
1.3 Existencia, unicidad, prolongabilidad	9
1.4 Dependencia continua, estabilidad	15
1.5 Ecuaciones autónomas	21
Problemas 1	25
2. SISTEMAS DE ECUACIONES Y ECUACIONES DE ORDEN SUPERIOR A 1	29
2.1 Propiedades generales	30
2.2 Sistemas de ecuaciones lineales	33
2.3 Ecuaciones lineales	39
2.4 Soluciones periódicas de ecuaciones lineales	44
2.5 Transformada de Laplace	47
2.6 Sistemas autónomos de segundo orden	51
Problemas 2	61
3. SOLUCIONES POR MEDIO DE SERIES	67
3.1 Puntos regulares. Ecuación de Legendre	68
3.2 Puntos singulares regulares: método de Frobenius	72
3.3 Ecuación y funciones de Bessel	76
Problemas 3	78
4. PROBLEMAS DE CONTORNO	81
4.1 Algunos ejemplos	83
4.2 Problemas de Sturm-Liouville homogéneos	85
4.3 Problemas no homogéneos. Función de Green	89
4.4 Series de Fourier	93
Problemas 4	97
5. EDP LINEALES EN DOS VARIABLES	99
5.1 EDP lineales de primer orden	101
5.2 EDP lineales de segundo orden. Clasificación	104
5.3 Los problemas clásicos. Unicidad	108
5.4 Ecuación de la cuerda vibrante	114
Problemas 5	120
6. SEPARACION DE VARIABLES	123
6.1 Separación de variables para los problemas clásicos	124
6.2 Problemas no homogéneos	131
6.3 Algunos problemas en tres variables	134
Problemas 6	140
7. OTROS PROBLEMAS EN EDP	143
7.1 Ecuación de ondas en dos y tres dimensiones	144
7.2 Funciones de Green	148
7.3 Transformadas de Fourier	152
Problemas 7	156
8. CALCULO DE VARIACIONES	159
8.1 La ecuación de Euler	160
8.2 Problemas isoperimétricos	165
Problemas 8	167

1. Ecuaciones de primer orden

Una ecuación diferencial es una ecuación en la que aparece una función incógnita y alguna de sus derivadas.

Las ecuaciones diferenciales aparecen continuamente en el estudio de problemas físicos. Por ejemplo, suponiendo que la velocidad de desintegración de un material radiactivo es proporcional a la cantidad de materia $m(t)$ existente en cada instante t se obtiene la ecuación

$$(1) \quad m'(t) = -km(t), \quad k \text{ constante} > 0.$$

El estudio de las oscilaciones de una cuerda, sometida a fuerzas exteriores conduce a

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t).$$

La primera es una ecuación diferencial ordinaria (la función incógnita es de una variable). La segunda es una ecuación en derivadas parciales.

Se llama orden de una ecuación al orden más alto de las derivadas de la función desconocida que aparecen en ella. Así, $y''(t) - \cos^3 y(t) = t^5$ es de segundo orden.

Solución de una ecuación es una función que al ser sustituida en la ecuación la convierte en una identidad. $m(t) = e^{-kt}$ es solución de la ecuación (1) pues $m'(t) = -ke^{-kt} = -km(t)$. Mas aún, cualquier función de la forma $m(t) = ce^{-kt}$ con c constante es también solución. Solución general es una expresión que recoge todas las soluciones de una ecuación diferencial. Si queremos determinar de forma única una solución particular será necesario imponer alguna condición inicial. Para saber la cantidad de materia radiactiva en cualquier instante necesitamos saber la que existía en el instante $t=0$. Si $m(0) = m_0$, entonces $m(0) = ce^0 = m_0$, así que $m(t) = m_0 e^{-kt}$. Una ecuación más unos datos iniciales constituyen un problema de valores iniciales.

Este capítulo está dedicado al estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden $y'(t) = f(t, y(t))$. Son las ecuaciones más simples, pero las técnicas utilizadas para su estudio se generalizan para ecuaciones más complicadas. (Como es costumbre en la teoría de ecuaciones diferenciales escribiremos por brevedad $y' = f(t, y)$). Utilizaremos la letra y para designar la variable dependiente y la t para la variable independiente buscando una notación intermedia entre las dos más usadas: $y(x)$ y $x(t)$.

El primer problema que uno se plantea ante una ecuación es encontrar explícitamente sus soluciones. Esto solo es posible en unos pocos casos muy particulares, incluso entre las ecuaciones de primer orden. Al estudio de estos casos está dedicada la sección 1.1.

Gran parte de la teoría de ecuaciones diferenciales está, por tanto, dedicada a la búsqueda de información sobre las soluciones de una ecuación sin resolverla. A ello están dedicadas las otras cuatro secciones.

La sección 1.2 trata del dibujo aproximado de soluciones y de un pequeño acercamiento al cálculo aproximado. Con ayuda de ordenadores es posible en muchos casos conocer numéricamente las soluciones con errores despreciables en la práctica.

Otro problema es investigar la existencia y unicidad de soluciones de un problema de valores iniciales

$$(P) \quad \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Para la ecuación (1) la condición inicial nos determinaba una única solución. Sin embargo, un problema del tipo de (P) puede no tener solución como

$$\begin{cases} y' = \sqrt{y-2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

o tener más de una como $\begin{cases} y' = y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ que tiene dos soluciones: $y(t) = 0$ e $y(t) = t^3/27$.

En la sección 1.3 se estudian los teoremas básicos que nos precisan en que condiciones (P) tiene solución única a la vista de las propiedades de la función f . También se estudia si esa solución está o no definida para todo valor de t (Prolongabilidad).

En la sección 1.4 se estudia el problema de la dependencia continua (una variación pequeña en el dato inicial y_0 ¿nos proporciona soluciones de la ecuación cercanas a la solución de (P) en un intervalo de tiempo finito?) y el de la estabilidad (la misma cuestión pero para todo valor de t).

Por último, la sección 1.5 se dedica a un tipo especial de ecuaciones (las autónomas) para las que es posible conseguir gran información sobre las soluciones sin necesidad de resolverlas. Además estas ecuaciones tienen importantes generalizaciones.

1.1. métodos elementales de integración

Ecuaciones de variables separables.

Es de variables separables una ecuación que puede escribirse en la forma

$$y' = \frac{p(t)}{q(y)} \quad (1) ; \text{ entonces } \int q(y)dy = \int p(t)dt + C.$$

En el caso de que podamos encontrar primitivas P y Q de las funciones p y q será $Q(y)=P(t)+C$. Si pudiésemos despejar y de esta última ecuación obtendríamos la solución explícitamente; en caso contrario se dirá que la solución viene dada implícitamente. Si queremos determinar la constante arbitraria C que aparece en la solución necesitamos alguna condición adicional.

Ejemplo 1.

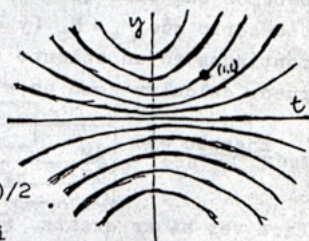
$$y' = ty ; \quad \int \frac{dy}{y} = \int t dt + C^* ; \ln y = \frac{t^2}{2} + C^* ; y = e^{t^2/2 + C^*} ; \text{ llamando } e^{C^*} = C \text{ tenemos la solución general}$$

$$y = Ce^{t^2/2} . \text{ Si buscamos}$$

entre todas estas soluciones aquella solución particular que satisface $y(1)=1$:

$$y(1)=Ce^{1/2}=1 ; C=e^{-1/2}, \text{ luego } y=e^{(t^2-1)/2}.$$

Por ahora no nos preocuparemos de ver si esta función que hemos obtenido es la única solución que satisface la ecuación y la condición inicial dadas.



Hay ecuaciones que no son del tipo (1), pero que se convierten en ecuaciones de variables separables haciendo un cambio de variable. Los dos tipos principales son:

Ecuaciones homogéneas:

$$y' = f(y/t)$$

Se convierten en ecuaciones separables mediante el cambio $z=y/t$. Entonces

$$y=zt; y'=z't+z=f(z); \quad \frac{z'}{f(z)-z} = \frac{1}{t}.$$

Ejemplo 2.

$$t^2 y' = ty + 3y^2 ; y' = y/t + 3(y/t)^2 ; z = y/t ; y' = z't + z = z + 3z^2 ; \frac{z'}{z^2} = \frac{3}{t} ; -\frac{1}{z} = 3 \ln t + C ; y = \frac{-t}{3 \ln t + C}$$

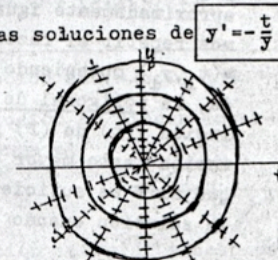
Ecuaciones del tipo: $y' = f(at+by)$, a, b constantes.

Se hace $z=at+by$; $z'=a+by'=a+bf(z)$; $\frac{z'}{a+bf(z)} = 1$.

1.2. dibujo aproximado de soluciones. calculo aproximado

Consideremos la ecuación $y'=f(t,y)$. Geométricamente, encontrar soluciones de la ecuación equivale a encontrar curvas cuyas tangentes en cada punto (t,y) tengan por pendiente la que le asigna la función f. Supongamos que tenemos dibujado el campo de direcciones de la ecuación dada: en cada punto (t,y) dibujemos un pequeño segmento de pendiente $f(t,y)$. Las soluciones serán entonces curvas del plano (t,y) tangentes en cada uno de sus puntos a los segmentos del campo de direcciones. Para construir este campo conviene considerar las isoclinas, curvas en que la pendiente asignada por f es constante: $f(t,y) = K$.

Ejemplo 1. Dibujemos aproximadamente las soluciones de $y' = -\frac{t}{y}$. Consideramos las isoclinas, $-\frac{t}{y} = K$, correspondientes a varios valores de K. $K=1$; $y=-t$; en todos sus puntos tendremos segmentos de pendiente 1. $K=0$; $t=0$; segmentos de pendiente 0. $K=-1$; $y=t$; $K=2$; $y=-t/2$ $K=-2$; $y=t/2$; $K=1/2$; $y=-2t$



Las curvas tangentes en todos sus puntos a los segmentos dibujados parecen ser circunferencias (de hecho podemos resolver la ecuación y comprobarlo:

$$yy' = -t ; y^2 = -t^2 + C ; y^2 + t^2 = C ;$$

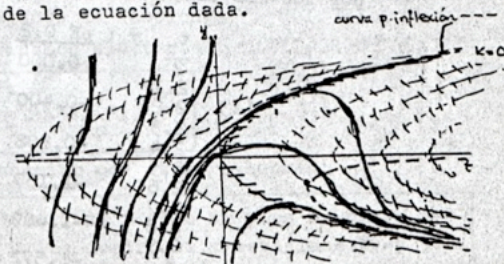
este no era un ejemplo muy práctico; buscaremos soluciones aproximadas cuando no podamos resolver la ecuación).

Observemos que estrictamente $y^2 + t^2 = C$ define de hecho dos funciones ($y = \sqrt{C-t^2}$ e $y = -\sqrt{C-t^2}$). Cada una de estas dos funciones además no es derivable en los puntos en que cortan el eje t (tienen tangente vertical). Ampliando el concepto de solución utilizaremos algunas veces el de curva integral, curva tangente en cada punto al campo de direcciones (que no siempre se podrá describir por una única función $y(t)$). Las circunferencias de nuestro dibujo son curvas integrales de la ecuación dada.

Ejemplo 2.

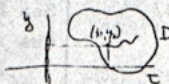
$$y' = y^2 - t$$

Dibujamos varias isoclinas $y^2 - t = K$; $t = y^2 - K$ (en este caso son parábolas). Sobre $t = y^2$ ($K=0$) las soluciones tendrán tangente horizontal (posibles máximos y mínimos). Los puntos de inflexión satisfacen $y''=0$. Así que



1.3. existencia, unicidad, prolongabilidad

Precisamos el problema de valores iniciales que consideramos y el concepto de solución:

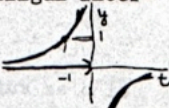


Sea la función $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, D subconjunto de $\mathbb{R}^2$, f continua en D y sea $(t_0, y_0) \in D$. Consideremos el problema de valores iniciales:

$$(P) \begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Una solución de (P) es una función $y(t)$ definida en un intervalo I que contiene a t_0 , derivable en ese intervalo, tal que $y(t_0) = y_0$ y tal que para todo $t \in I$ se cumple que $(t, y(t)) \in D$ e $y'(t) = f(t, y(t))$.

Según esta definición $y(t) = -\frac{1}{t}$ es solución en $(-\infty, 0)$ del problema $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(-1) = 1 \end{cases}$ ($D = \mathbb{R}^2$) pero no es solución en ningún intervalo que contenga el origen.



Existencia y unicidad.

Transformamos (P) primero en una ecuación integral y después en un problema de análisis funcional. Un sencillo resultado de este campo de las matemáticas traerá como aplicación sencilla nuestro teorema de existencia y unicidad:

Lema 1. $y(t)$ es solución de (P) en un intervalo I si y solo si $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$ para todo t de I

Si $y(t)$ es solución $y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^t y'(s) ds = \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$.

Si $y(t)$ satisface la ecuación integral es evidente que $y(t_0) = y_0$. Como $f(s, y(s))$ es continua, el primer teorema fundamental del cálculo infinitesimal asegura que $y(t)$ es derivable y que $y'(t) = f(t, y(t))$.

Consideremos ahora el conjunto de funciones $C(I, \mathbb{R}) = \{y: I \rightarrow \mathbb{R} \text{ y continua}\}$ y definamos el operador $T: C(I, \mathbb{R}) \rightarrow C(I, \mathbb{R})$ mediante

$$Ty(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \quad (1)$$

El lema 1 lo podemos ahora enunciar con otras palabras:

Lema 1. y es solución de (P) en I si y solo si y es un punto fijo para el operador T (es decir, si y satisface $Ty = y$).

1.4. dependencia continua, estabilidad

Dependencia continua

El estudio de un sistema físico nos puede conducir a un problema $(P_a) \begin{cases} y' = f(t, y, a) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ donde la f depende de t , y y un parámetro a . En la determinación del valor del parámetro existirán errores de medición. No nos sería útil nuestra ecuación para describir el sistema real si a valores del parámetro parecidos no correspondiesen soluciones semejantes.

De la misma forma podemos considerar un problema $(P^*) \begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0^* \end{cases}$ cuando realmente es $(P) \begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ quien describe nuestro sistema. Si $|y_0 - y_0^*|$ es pequeño ¿serán las soluciones de (P^*) cercanas a las de (P) ?

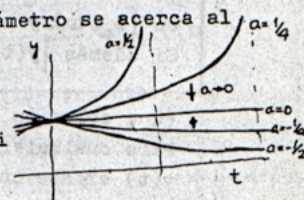
Si la f es suficientemente regular podremos asegurar en ambos casos que existe la dependencia continua (admitimos aquí también los resultados sin demostración):

Consideremos en primer lugar la familia (P_a) de problemas dependientes del parámetro a . Supongamos f y $\partial f / \partial y$ continuas en las tres variables y que la solución única de cada (P_a) , que llamaremos $y(t, a)$, está definida para valores de a próximos a un a_0 en $[t_0, t_0 + d]$. Entonces:

Teor 1. $y(t, a)$ es continua en a_0 (es decir $\lim_{a \rightarrow a_0} y(t, a) = y(t, a_0)$) para todo $t \in [t_0, t_0 + d]$

(las soluciones se acercan a la real si el parámetro se acerca al real). Un ejemplo para comprobar el teorema:

Ejemplo 1. $\begin{cases} y' = ay^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ su solución $y(t, a) = \frac{1}{1 - at}$ está definida en $[0, 1/a]$ si $a > 0$ y en $[0, \infty)$ si $a \leq 0$. Está claro que $y(t, a)$ es una función continua de a . Gráficamente, el dibujo nos muestra que, por ejemplo, las soluciones con a cercano a 0 son próximas en un intervalo a la solución correspondiente a $a = 0$ ($y = 1$).



Sean ahora (P) y (P^*) y supongamos f y $\partial f / \partial y$ continuas de tal forma que las soluciones $y(t)$ e $y^*(t)$ estén definidas en $[t_0, t_0 + d]$. En esas condiciones se cumple:

Teor 2. Dado un $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $|y_0 - y_0^*| < \delta$ entonces $|y(t) - y^*(t)| < \varepsilon$ para todo $t \in [t_0, t_0 + d]$

1.5. ecuaciones autónomas

Son ecuaciones en las que la variable independiente no aparece explícitamente:

$$y' = f(y) \quad (1)$$

(1) es de variables separables. Sin embargo las características importantes de las soluciones se deducen del estudio de la propia f .

Suponemos f' continua en $\mathbb{R}$ con lo que habrá solución única para cualquier condición inicial.

El campo de direcciones es independiente de t . Por lo tanto si trasladamos una curva solución paralelamente al eje t obtenemos otra solución:

Teor 1. Sea y solución de (1) y sea $C \in \mathbb{R}$. La función $z(t) = y(t+C)$ es también solución.

$$z'(t) = y'(t+C) = f(y(t+C)) = f(z(t))$$

Teor 2. Si $a \in \mathbb{R}$ es tal que $f(a) = 0$, entonces $y(t) = a$ es solución de (1)

$$y'(t) = 0 = f(a) = f(y(t))$$

A estas soluciones constantes se les llama también soluciones de equilibrio.

Teor 3. Toda solución de (1) es constante, o estrictamente creciente, o estrictamente decreciente.

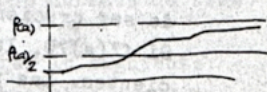
Sea y solución y exista t_0 para el que $y'(t_0) = 0$; probemos que y es constante: $f(y(t_0)) = 0$, $y(t) = y(t_0)$ es solución y es la única. Ninguna solución puede tener máximos o mínimos salvo que sea constante.

Teor 4. Sea y solución tal que $|y(t)| \leq K$ para $t \geq t_0$. Entonces $y(t)$ tiende hacia una solución constante cuando $t \rightarrow \infty$.

Si y es constante, ya está. Sea y creciente o decreciente. y está definida en $[t_0, \infty)$ por los teoremas de prolongabilidad. Como y está acotada debe tender a un límite a . Probemos que $f(a) = 0$. Como f es continua $\lim_{t \rightarrow \infty} f(y(t)) = f(a) = \lim_{t \rightarrow \infty} y'(t)$. Si $f(a) > 0$

para $t \geq T$, $y'(t) > f(a)/2$; $\int_T^t y'(t) dt = y(t) - y(T) > \frac{f(a)}{2}(t-T)$; $y(t) > y(T) + \frac{f(a)}{2}(t-T)$

que tiende a ∞ cuando t tiende a ∞ e $y(t)$ no estaría acotada. Igual se vería si $f(a) < 0$.



2. Sistemas de ecuaciones y ecuaciones de orden superior a 1

Este capítulo está dedicado principalmente al estudio de los sistemas lineales (las ecuaciones de cualquier orden se pueden considerar como un tipo particular de sistemas). En las secciones 1 y 6 obtendremos también algunos resultados para sistemas no lineales.

En la sección 2.1 enunciaremos, generalizando lo visto para las ecuaciones de primer orden, las propiedades básicas de los sistemas de n ecuaciones, precisando la forma particular que adoptan para las ecuaciones de orden n .

La sección 2.2 se centra ya en los sistemas lineales. En general no será posible resolverlos, pero se puede caracterizar con precisión la estructura de sus soluciones. Obtendremos una fórmula que nos da las soluciones si conocemos una "matriz fundamental" del sistema. Si los coeficientes son constantes es posible (utilizando resultados de teoría de matrices) encontrar esa matriz fundamental y, por tanto, resolver el sistema.

En la sección 2.3 estudiaremos las ecuaciones lineales a partir de los resultados de la sección anterior. Si los coeficientes son constantes el cálculo de sus soluciones será especialmente sencillo, y si no lo son veremos algunos casos en que la ecuación es aún resoluble.

La sección 2.4 muestra como obtener información acerca de las soluciones periódicas de ecuaciones lineales de primer y segundo orden sin necesidad de resolverlas.

La sección 2.5 introduce una técnica totalmente diferente para la resolución de sistemas lineales: la transformada de Laplace. Esta técnica es especialmente interesante cuando los segundos miembros son discontinuos.

En la última sección, la 2.6, estudiamos los sistemas autónomos de segundo orden. Aunque las ecuaciones que aparezcan en ellos sean no lineales y no podamos resolverlos, no es difícil hallar las propiedades esenciales de sus soluciones a través de consideraciones geométricas. Dibujaremos las "órbitas" del sistema (proyecciones de las soluciones sobre el plano $t=0$), primero las de los sistemas lineales. De ellas sacaremos conclusiones para los no lineales. Haremos un estudio particular de las ecuaciones y de los sistemas "exactos".

2.1. propiedades generales

Comencemos con un sistema de n ecuaciones de primer orden:

Sean $f_1, \dots, f_n: D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continuas y sea $(S) \begin{cases} x'_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x'_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$

Una solución de (S) es un conjunto de n funciones $x_1(t), \dots, x_n(t)$ definidas y derivables en un intervalo común I tales que para todo $t \in I$ se tiene $(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \in D$ y $x'_i = f_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t))$, $i=1, \dots, n$.

Si imponemos a (S) n condiciones iniciales $x_1(t_0) = x_{01}, \dots, x_n(t_0) = x_{0n}$ con $(t_0, x_{01}, \dots, x_{0n}) \in D$, tenemos un problema de valores iniciales.

En muchos casos utilizaremos notación vectorial. Designando los vectores (columnas) con mayúsculas

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}: D \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad X_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

el problema de valores iniciales adopta la forma:

$$\begin{cases} X' = F(t, X) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

La solución será entonces una función vectorial de I en $\mathbb{R}^n$:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

Consideramos en $\mathbb{R}^n$ la norma euclídea $\|X\| = \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$

Dados $A \in \mathbb{R}^n$ y $r \in \mathbb{R}$ denotaremos $B(A, r) = \{X \in \mathbb{R}^n: \|X - A\| < r\}$.

Los teoremas básicos para sistemas se pueden trasladar casi idénticamente desde las ecuaciones de primer orden. Incluso las demostraciones son en bastantes casos las mismas, sustituyendo valores absolutos por normas.

Teor 1. (de existencia y unicidad)

Sean f_i y $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i, j=1, \dots, n$ continuas en $[t_0, t_0+h] \times B(X_0, r)$. Entonces (P) tiene solución única local a la derecha de t_0 .

(por tanto si f_i y $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ son continuas en un conjunto D por cada punto interior de D pasa una única solución).

2.2. sistemas de ecuaciones lineales

Son sistemas de la forma

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}(t)x_1 + \dots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \vdots \\ x'_n = a_{n1}(t)x_1 + \dots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{cases}$$

o en forma vectorial

$$(1) X' = A(t)X + F(t) \quad \text{donde} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Consideremos

$$(P) \begin{cases} X' = A(t)X + F(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

y supongamos $a_{ij}, f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuas en $[t_0, \infty)$. Entonces el teorema 1 de la sección anterior nos asegura que existe solución única de (P). A semejanza de lo que ocurriría en las lineales de primer orden se puede probar que esta solución única está definida en todo $[t_0, \infty)$.

Consideremos primero el sistema homogéneo (2) $X' = A(t)X$. El siguiente teorema nos precisa la estructura de sus soluciones (si bien no nos dice cómo encontrarlas):

Teor 1. i. El conjunto V de todas las soluciones de (2) es un espacio vectorial de dimensión n .

ii. Consideremos n soluciones de (2): $X_1(t), \dots, X_n(t)$. Entonces el conjunto $\{X_1(t), \dots, X_n(t)\}$ constituye una base de V si y solo si la matriz $W(t)$ de columnas $X_1(t), \dots, X_n(t)$ es no singular para algún $t \in [t_0, \infty)$. En ese caso $W(t)$ es no singular para todo $t \in [t_0, \infty)$ y se le denomina matriz fundamental del sistema.

i. Probamos que cualquier combinación lineal de soluciones de (2) es también solución: Sean $X_1, \dots, X_n$ soluciones y $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}$.

Entonces $(C_1 X_1 + \dots + C_n X_n)' = C_1 A(t)X_1 + \dots + C_n A(t)X_n = A(t)(C_1 X_1 + \dots + C_n X_n)$.

Sean $e_1, \dots, e_n$ los elementos de la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y sea $X_j(t)$ la solución única de $\begin{cases} X' = A(t)X \\ X(t_0) = e_j \end{cases}$, $j=1, \dots, n$.

Los $X_j(t)$ así definidos constituyen una base de V :

$$\sum_{j=1}^n b_j X_j(t) = 0; \quad \text{si } t=t_0 \text{ se tiene } \sum_{j=1}^n b_j e_j = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow b_j = 0 \quad \forall j.$$

Son linealmente independientes. Además generan todo el espacio: si $X(t)$ es solución de (P) también lo es $Z(t) = \sum_{j=1}^n X_{0j} X_j(t)$. Por la unicidad $X(t) = Z(t)$ y cualquier $X(t)$ se puede pues escribir como combinación lineal de los $X_j(t)$.

2.3. ecuaciones lineales

Consideremos (1) $y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = f(t)$ y llamemos (2) a la ecuación homogénea asociada. Haciendo $y = x_1, \dots, y^{(n-1)} = x_n$ la ecuación (1) se convierte en

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

Si a_i y f son continuas en $[t_0, \infty)$ sabemos que hay solución única definida en $[t_0, \infty)$. El sistema equivalente estará resuelto si encontramos n soluciones linealmente independientes del sistema homogéneo. Como las componentes $x_2(t), \dots, x_n(t)$ de una solución son en este caso las derivadas de $x_1(t) = y(t)$ tenemos que

Teor 1. Sean $y_1(t), \dots, y_n(t)$ soluciones de (2). Entonces

$W(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$ es una matriz fundamental del sistema equivalente si y solo si $|W(s)| \neq 0$ para algún s (entonces $|W(t)| \neq 0 \forall t \in [t_0, \infty)$).

A $|W(t)|$ se le llama wronskiano de $y_1, \dots, y_n$. La solución general de (1) es entonces $y = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n + y_p$ donde y_p es cualquier solución particular de (1). Una solución particular de (1) es el primer elemento de

$$X_p = W(t) \int W^{-1}(s) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(s) \end{pmatrix} ds$$

Nos centraremos en el caso $n=2$ (al final de la sección daremos algún resultado generalizado).

Sea (3) $y'' + a(t)y' + b(t)y = f(t)$

Necesitamos dos soluciones linealmente independientes de la homogénea (se podrán calcular si los coeficientes son constantes y en muy pocos casos más). Si las hemos encontrado la solución particular dada por el teorema 1 adopta una forma sencilla:

Teor 2. Si $y_1(t)$ y $y_2(t)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea entonces

$$y_p(t) = -y_1(t) \int \frac{y_2(t)f(t)}{|W(t)|} dt + y_2(t) \int \frac{y_1(t)f(t)}{|W(t)|} dt$$

es una solución particular de (3).

2.4. soluciones periódicas de ecuaciones lineales

Comenzamos investigando si las ecuaciones lineales de primer orden (1) $y' = a(t)y$ y (2) $y' = a(t)y + f(t)$ con a y f continuas de período T tienen o no soluciones de ese mismo período. Llamaremos $P_T = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ continuas y } T\text{-periódicas}\}$.

Lema 1. Sea $y(t)$ solución de (2). Entonces $y(t)$ es T -periódica si y sólo si $y(0) = y(T)$.

El "sólo si" es trivial. Sea $y(t)$ solución y supongamos que $y(0) = y(T)$. $z(t) = y(t+T)$ es también solución de (2) ($y'(t+T) = a(t+T)y(t+T) + f(t+T) = a(t)y(t+T) + f(t)$) y satisface $z(0) = y(T) = y(0)$. Por la unicidad $z(t) = y(t+T) = y(t)$ para todo t .

Teor 1. i. (1) tiene la única solución T -periódica $y=0$ si y sólo si $\int_0^T a \neq 0$. Entonces (2) tiene una única solución T -periódica
ii. (1) tiene todas sus soluciones T -periódicas si y solo si $\int_0^T a = 0$. Entonces (2) tiene:
a. todas sus soluciones T -periódicas si $\int_0^T f(s) e^{-\int_0^s a(u)du} ds = 0$
b. ninguna solución T -periódica si la integral anterior es distinta de cero.

Para ver si una solución de (2) está en P_T habrá que ver si $y(0)$ coincide con $y(T) = y(0) e^{\int_0^T a} + e^{\int_0^T a} \int_0^T e^{-\int_0^s a} f$, es decir, si

$$(3) \quad y(0) [1 - e^{\int_0^T a}] = e^{\int_0^T a} \int_0^T e^{-\int_0^s a} f$$

i. Si $\int_0^T a \neq 0$ podemos despejar $y(0)$: existe un único valor inicial que satisface (3) ($y(0)=0$ si $f \equiv 0$) y por tanto sólo tenemos una solución periódica (para ese valor determinado de $y(0)$).
ii. Si $\int_0^T a = 0$ cualquier solución de (1) satisface (3). Si $f \neq 0$, (3) se puede satisfacer si y sólo si $\int_0^T e^{-\int_0^s a} f = 0$ (y en ese caso para cualquier $y(0)$ tenemos solución T -periódica de (2)).

Ejemplo 1. $y' = e^{\cos t} y + \sin^3 t + 7$ Como $\int_0^{2\pi} e^{\cos s} ds \neq 0$ ($e^{\cos t} > 0$) la ecuación homogénea tiene sólo la solución periódica trivial y la no homogénea tiene una única solución 2π -periódica.

Ejemplo 2. Coeficientes constantes: $y' = ay + f(t)$, $f \in P_T$.

Si $a \neq 0$, la homogénea no tiene soluciones periódicas no triviales y la no homogénea tiene una única solución T -periódica. Si $a=0$, las soluciones de $y'=0$ son todas periódicas (constantes). $y'=f(t)$ tiene todas sus soluciones en P_T si $\int_0^T f=0$ y ninguna en caso contrario.

2.5. transformada de laplace

(enunciamos solo los resultados esenciales sin demasiadas precisiones)

Sea f continua a trozos en $[0, \infty)$ (en cada intervalo finito $[0, b]$ es continua salvo en un número finito de puntos).

Llamamos transformada de Laplace de f a la función $Lf=F$ definida por

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

para todos los valores de s para los que la integral impropia converge.

El operador $L: f \rightarrow F$ es claramente lineal.

Dada una F puede que no exista una f tal que $L(f)=F$, pero si existe se puede probar que existe una única que sea continua. Podemos pues definir $L^{-1}: F \rightarrow f$; a $L^{-1}(F)=f$ le llamaremos transformada inversa de Laplace de F . Está claro que L^{-1} también es lineal.

Las siguientes propiedades (de demostración sencilla) nos permiten calcular un buen número de transformadas:

Teor 1. $L(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$, $s > 0$; $L(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$, $s > a$;
 $L(\sin at) = \frac{a}{s^2 + a^2}$, $s > 0$; $L(\cos at) = \frac{s}{s^2 + a^2}$, $s > 0$.
 Si $L(f)=F$ entonces $L(e^{at}f(t))=F(s-a)$; $L(t^n f(t))=(-1)^n F^{(n)}(s)$

Para resolver ecuaciones necesitamos también:

Teor 2. Sea f una función C^{n-1} en $[0, \infty)$ y sea $f^{(n)}$ continua a trozos en ese mismo intervalo. Si $L(f)=F$ entonces
 $L(f^{(n)}(t)) = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$

En ocasiones nos puede ser útil en el cálculo de transformadas inversas:

Teor 3. Se llama convolución de f y g a la función $f * g$ definida
 $(f * g)(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)du$
 Se tiene que $f * g = g * f$ y $L(f * g) = L(f)L(g)$

Con estos resultados es ya posible resolver un gran número de ecuaciones y sistemas lineales con coeficientes constantes. Aplicando el operador L convertiremos el problema diferencial en otro algebraico. Resuelto éste solo se tratará de calcular alguna transformada inversa.

2.6. sistemas autónomos de segundo orden

Estudiamos sistemas de la forma

$$(1) \begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} \text{ o bien } X' = F(X) \text{ con } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

que incluyen en particular las ecuaciones de segundo orden

$$x'' = g(x, x'), \text{ es decir, } \begin{cases} x' = y \\ y' = g(x, y) \end{cases}.$$

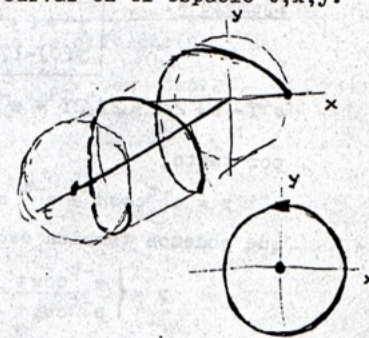
Suponemos que f y g son continuas y con derivadas continuas en todo $\mathbb{R}^2$. Los siguientes resultados, semejantes a los vistos para ecuaciones autónomas de primer orden, se prueban fácilmente:

Teor 1. Dados $(t_0, \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix})$ existe una única solución $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ de (1) tal que $X(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.
 Si $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ es tal que $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$ entonces $X(t) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ es solución de (1) (solución constante o de equilibrio).
 Sea $X(t)$ solución de (1) y sea $C \in \mathbb{R}$; entonces $Z(t) = X(t+C)$ es también solución de (1)

Nuestra intención es encontrar información sobre las soluciones de (1) (no lineal en general y por tanto no resoluble). Esta información la obtendremos a partir de su representación aproximada.

Las soluciones de (1) representan curvas en el espacio t, x, y . Por ejemplo las soluciones de $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$

que satisfacen $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ($X(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$) y $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ($X(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$) están representadas en el dibujo. Sin embargo para los sistemas autónomos es preferible dibujar solo la proyección sobre el plano xy (plano de fases). La proyección de una curva solución sobre el plano de fases se llama órbita de esa solución (la órbita de las soluciones anteriores son el punto y la circunferencia del dibujo inferior). Si $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ es solución está claro que $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ son ecuaciones paramétricas de la órbita correspondiente y que $\begin{cases} x = x(t+C) \\ y = y(t+C) \end{cases}$ son otras ecuaciones paramétricas de la misma órbita. Si imaginamos una órbita como la trayectoria de un punto P cuya posición en el instante t está dada por $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ la



3. Soluciones por medio de series

En el capítulo anterior estudiamos las escasas formas de resolver elementalmente la ecuación (1) $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ con coeficientes variables. Este capítulo trata un método general para atacarla: suponer la solución desarrollada en serie de potencias e introducir esta serie en la ecuación para determinar sus coeficientes. Si a y b son analíticas siempre se podrá encontrar una serie solución por este camino (sección 3.1). Y si son no analíticas, pero "poco", también se pueden utilizar series para resolver (1) de una forma sólo algo más complicada (es el método de Frobenius de la sección 3.2).

Además de los cálculos formales con los coeficientes (que son simples pero pesados) el método de este capítulo exigirá la justificación de la convergencia de las series que van apareciendo. Nosotros aceptaremos sin demostración dos teoremas generales que aseguran la corrección de los pasos que daremos en cada ejemplo particular.

El problema esencial de la utilización de series para la resolución de ecuaciones es la dificultad de obtener información sobre las soluciones obtenidas (ni siquiera, en ocasiones, podremos hallar la expresión de su término general). Sin embargo las ecuaciones del tipo de (1) surgen a menudo en problemas físicos y las series son el único instrumento para resolverlas. Por eso, para algunas de estas ecuaciones (las de Legendre, Bessel, Hermite, Laguerre, Tchebycheff,...) se han desarrollado amplios y detallados estudios sobre las propiedades de sus series solución. Una mínima muestra son las propiedades de las ecuaciones de Legendre y Bessel que se tratan en las secciones 3.1 y 3.3 (respectivamente).

3.1. puntos regulares; ecuación de Legendre

Sea (1) $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$.

Supongamos que a y b son analíticas en un entorno de $t=0$, es decir, que admiten desarrollos en serie de Taylor $a(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{(k)}(0)}{k!} t^k$, $b(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^{(k)}(0)}{k!} t^k$ convergentes en dicho entorno (se dice que $t=0$ es un punto regular de (1); en caso contrario se diría que $t=0$ es un punto singular).

Se puede esperar que cualquier solución $y(t)$ de (1) sea también analítica en algún entorno de $t=0$. De hecho se tiene el siguiente teorema (que no demostramos):

Teor 1. Supongamos que a y b son analíticas en $t=0$ y sea R el menor de los radios de convergencia de las series de Taylor de a y b . Entonces (1) tiene dos soluciones linealmente independientes $y_1(t)$ e $y_2(t)$ que admiten desarrollos en serie convergentes al menos en el intervalo $(-R, R)$. Además los coeficientes de dichos desarrollos se pueden determinar probando la solución

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k \quad \text{en la ecuación (1).}$$

Para determinar los coeficientes operaremos de la siguiente forma: según el teorema cualquier solución $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ es analítica en $(-R, R)$. Como las series de potencias se pueden derivar término a término dentro del intervalo de convergencia, se tiene $y'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k t^{k-1}$, $y''(t) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k t^{k-2}$, si $|t| < R$. Sustituimos estas series en la ecuación, donde a y b estarán desarrolladas en serie, e imponemos que los coeficientes de cada potencia de t deben ser iguales a cero. Obtenemos así un sistema numerable de ecuaciones a partir de las cuales deducimos los c_k de la serie solución en función de c_0 y c_1 que permanecen arbitrarios.

Consideremos, por ejemplo, la ecuación de Legendre

$$(2) \quad (1-t^2)y'' - 2ty' + p(p+1)y = 0, \quad \text{con } p \text{ real.}$$

En este caso $a(t) = -\frac{2t}{1-t^2}$, $b(t) = \frac{p(p+1)}{1-t^2}$ son analíticas en $|t| < 1$.

La ecuación (2) tiene pues soluciones analíticas al menos en ese intervalo (conviene recordar que si P y Q son dos polinomios y $Q(0) \neq 0$, entonces P/Q (simplificados los factores comunes) tiene un desarrollo en serie cuyo radio de convergencia es precisa-

3.2. puntos singulares regulares; método de Frobenius

Supondremos en esta sección que $t=t_0$ es un punto singular de (1) $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$, es decir, que o a o b o las dos no son analíticas en $t=t_0$. En este caso no es aplicable el método de la sección anterior. Sin embargo en muchas ocasiones nos interesará conocer el comportamiento de las soluciones de (1) precisamente en las proximidades de sus puntos singulares. En general se podrá decir poco sobre este comportamiento, salvo para un tipo particular de puntos sólo débilmente singulares: los singulares regulares.

t_0 es punto singular regular de (1) si $(t-t_0)a(t)$ y $(t-t_0)^2b(t)$ son analíticas en t_0 .

(la singularidad de a no es más fuerte que $(t-t_0)^{-1}$ y la de b no es más fuerte que $(t-t_0)^{-2}$).

Ejemplo 1. $t^2y'' + ty' - 4y = 0$; es decir $y'' + \frac{1}{t}y' - \frac{4}{t^2}y = 0$.

$t=0$ es punto singular regular ya que $t \cdot \frac{1}{t} = 1$ y $t^2(-\frac{4}{t^2}) = -4$ son analíticas en $t=0$ (lo son en todo $\mathbb{R}$).

En este caso es fácil ver como se comportan las soluciones cerca del punto singular ya que conocemos la solución general $C_1t^2 + C_2t^{-2}$.

Ejemplo 2. $(t-1)^2ty'' - ty' + (t-1)y = 0$; $y'' - \frac{1}{(t-1)^2}y' + \frac{1}{t(t-1)}y = 0$

$t=0$ y $t=1$ son puntos singulares de la ecuación. Como además $-t/(t-1)^2$ y $1/(t-1)$ son analíticas en 0, $t=0$ es punto singular regular; como $-1/(t-1)$ no es analítica en 1 (aunque $1/t$ sí lo sea), $t=1$ es singular no regular.

Supondremos a partir de ahora que el punto singular regular de (1) que estudiamos es $t=0$. Sabemos que no supone ninguna pérdida de generalidad ya que en el caso de que queramos estudiar las soluciones cerca de un $t_0 \neq 0$ el cambio $t-t_0=s$ nos traslada el problema al estudio de las soluciones cerca de 0 de la ecuación en s .

Multipliquemos (1) por t^2 y llamemos $a^*(t)=ta(t)$ y $b^*(t)=t^2b(t)$. Obtenemos (2) $t^2y'' + ta^*(t)y' + b^*(t)y = 0$.

Se trata por tanto de resolver (2) en un entorno de $t=0$, suponiendo que $a^*(t)$ y $b^*(t)$ son analíticas en dicho punto. El método utilizado para su resolución es lo que se llama el método de Frobenius.

3.3. ecuación y funciones de Bessel

La ecuación de Bessel es (1) $t^2y'' + ty' + (t^2 - p^2)y = 0$, $p \geq 0$

$t=0$ es un punto singular regular de (1). El polinomio indicial es $q(r) = r^2 - p^2$, luego $r_1 = p$, $r_2 = -p$. Sabemos que hay una solución de la forma $y(t) = t^p \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$, $t > 0$ (y que la serie converge en todo $\mathbb{R}$). Llevándola a la ecuación se obtiene

$$c_1 q(p+1) t^{p+1} + \sum_{k=0}^{\infty} (q(p+k) c_k + c_{k-2}) t^{p+k} = 0$$

Por tanto,

$$c_1 = 0; \quad c_k = -\frac{c_{k-2}}{q(p+k)} = -\frac{c_{k-2}}{k(2p+k)}, \quad k=2,3,\dots$$

Así que

$$c_1 = c_3 = \dots = 0, \quad c_2 = -\frac{c_0}{2^2(p+1)}, \quad c_4 = -\frac{c_2}{2^4(p+1)(p+2)}, \dots$$

Luego

$$y_1(t) = c_0 t^p \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m t^{2m}}{2^{2m} m! (p+1) \dots (p+m)} \right] \quad (2)$$

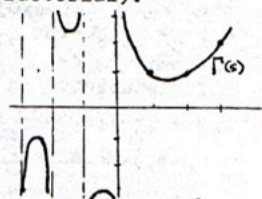
Podemos dar una expresión más reducida de esta y_1 haciendo uso de la función gamma: $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$, $s > 0$.

Recordamos brevemente sus principales propiedades: integrando por partes se tiene $\Gamma(s+1) = s \Gamma(s)$. Entonces $\Gamma(s+n) = (s+n-1) \dots (s+1) s \Gamma(s)$, $n \in \mathbb{N}$. Como $\Gamma(1) = 1$, en particular se tiene $\Gamma(n+1) = n!$ (Γ es una generalización del factorial).

Se define $\Gamma(s)$ para s negativos mediante

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+n)}{(s+n-1) \dots (s+1)s} \quad \text{si } -n < s < -n+1$$

(en los enteros negativos Γ no está definida, pero aceptaremos $1/\Gamma(-n) = 0$ para $n = 0, -1, -2, \dots$)



Volviendo a la expresión (2), escogiendo $c_0 = 1/2^p \Gamma(p+1)$ obtenemos la solución de (1)

$$(3) \quad J_p(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(p+m+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m}$$

llamada función de Bessel de primera especie y orden p (como se ve todas las J_p están acotadas en $t=0$ a pesar de la singularidad).

Si p es un número natural n

$$J_n(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! (m+n)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m}$$

y en particular

$$J_0(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m}; \quad J_1(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! (m+1)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m+1}$$

funciones que están tabuladas en muchos libros y cuya gráfica es

