

Primer parcial (1981-82)

A (3). Sea (A) $y' = \frac{y-y^2}{t}$.

- Utilizar el teorema de existencia y unicidad para estudiar para qué instantes iniciales t_0 existe solución única local de (A) satisfaciendo $y(t_0)=2$.
- Hallar la solución general de (A).
- Estudiar la estabilidad de las soluciones que cumplen $y(1)=0$ e $y(1)=1$.

B (3). Sea (B) $y'' = (2-y')y$.

- Dibujar el mapa de fases de la ecuación (B).
- Sea $y(t)$ la solución de (B) que satisface $y(-2)=0, y'(-2)=1$. A la vista del mapa de fases anterior: ¿Están acotadas $y(t)$ o $y'(t)$ para $t \rightarrow \infty$?
- Escribir la ecuación de las órbitas.

C (4). Sea (D) $(1+t^2)y'' - 2y = 1$.

- Hallar la solución general de la homogénea mediante series en torno a $t=0$. Observar que una de las soluciones obtenidas es una función elemental sencilla.
- Hallar la solución general de (D) en términos de funciones elementales y la solución particular de (D) que satisface $y(0)=y'(0)=0$.

Primer parcial de junio (1982)

A (5). Sea $y' = t - |y|$. Hacer un dibujo aproximado de las soluciones.

Sean: $(P_1) \begin{cases} y' = t - |y| \\ y(0) = -1 \end{cases}$; $(P_2) \begin{cases} y' = t - |y| \\ y(2) = 0 \end{cases}$.

Para cada uno de estos dos problemas: ¿existe solución única?, ¿es prolongable hasta infinito?, ¿es estable? Calcular el valor aproximado de la solución de (P_2) en $t = 2.2$, con 2 cifras decimales, a partir de la segunda aproximación sucesiva de Picard y por el método de Euler con $h=0,1$.

B (2.5). Calcular la solución de:

$$t^2 y'' + t y' + \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)y = t^{3/2}; \quad y(1)=1, \quad y'(1)=-\frac{1}{2}.$$

C (2.5). Hallar la solución de: $\begin{cases} x' = x - 2y - t \\ y' = 2x - 3y - t \end{cases}$; $x(0)=1, \quad y(0)=1$.

¿Es estable esta solución?

Primer parcial de septiembre de Métodos II (grupo piloto) (1982)

1) Sea $y^2 y'' = y'(yy' - 2)$. Hallar su solución general.

Considerar los problemas $(P_b) \begin{cases} y^2 y'' = y'(yy' - 2) \\ y(0)=1, y'(0)=b, b \in [0,1] \end{cases}$.

Determinar los valores de b para los que (P_b) tiene solución única.

Hallar la solución y_b en esos casos y el $\lim_{t \rightarrow \infty} y_b(t)$. ¿Es estable y_1 ?

2) Sea la ecuación (E) $y'' = 1 - y^2 - k y'$, donde k es una constante real.

- Hallar y clasificar los puntos singulares en función de los valores de k .
- Dibujar aproximadamente el mapa de fases para $k=0$ y $k=3$.
- Suponiendo que la ecuación (E) describe el movimiento de un punto sobre una recta sometido a una fuerza $g(y)=1-y^2$ con rozamiento proporcional a su velocidad (si $k>0$), describir cualitativamente el comportamiento de un punto situado inicialmente en el origen para $k=0$ y $k=3$.

3) Sea $t^2 y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 0$ (C).

Hallar una primera solución de (C) por medio de series en torno a $t=0$.

Calcular la solución general de (C).

$$y' = \frac{y-y^2}{t} \quad -\frac{y'}{y} = -\frac{1}{t} + \frac{1}{t}; \quad u' = -\frac{1}{t} + \frac{1}{t};$$

$$u = \frac{1}{t} + \frac{1}{t} \int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{t} + \frac{1}{t} + 1; \quad y = \frac{t}{t+c}$$

$$y(1)=a \rightarrow y = \frac{t}{t+1/a-1}$$

Asintota en $t = 1 - \frac{1}{a}$.

Si $0 < a < 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{a} < 0$

Si $a > 1 \Rightarrow 0 < 1 - \frac{1}{a} < 1$

Si $a < 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{a} > 1$ hay asintota en $(0, \infty)$.

$y=0$. Inestables. Si $a < 0$ no son perturbables.

$y=1$. Si a cercano a 1 $a > 0$.

$$\left| \frac{t}{t+1/a-1} - 1 \right| = \left| \frac{1-a}{1+a(t-1)} \right| \leq |1-a| < \varepsilon \text{ si } |1-a| < \varepsilon$$

$$(1+t^2)y'' - 2y = 1 \quad k(k-1)c_k + (k-2)(k-3)c_{k-2} - 2kc_{k-2} = 0; \quad c_k = -\frac{k-4}{k} c_{k-1}$$

$$c_2 = c_0; \quad c_4 = 0 = c_6 = c_8 = \dots$$

$$c_3 = -\frac{(-1)}{3} c_1 = \frac{c_1}{3}; \quad c_5 = \frac{-1}{5} c_3 = \frac{-1}{5 \cdot 3} c_1; \quad c_7 = -\frac{3}{7} c_5 = \frac{3 \cdot 1}{7 \cdot 5 \cdot 3} c_1$$

$$c_{2k+1} = \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)(2k+1)} \quad \gamma_1 = 1+t^2$$

$$\gamma_2 = t \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} t^{2k+1}$$

$$y = (1+t^2) \sum u; \quad y' = 2t \sum u + (1+t^2) u'; \quad y'' = 2 \sum u + 4t u' + (1+t^2) u''$$

$$4t(1+t^2)u + (1+t^2)^2 u' = 0; \quad u' = \frac{-4t}{1+t^2} u; \quad \ln u = -2 \ln(1+t^2) + C; \quad u = \frac{C}{(1+t^2)^2}$$

$$y = g(1+t^2) \left[\frac{dt}{(1+t^2)^2} + c_2(1+t^2) - \frac{1}{2} \right] = g \left[(1+t^2) \ln(1+t^2) + t + c_2(1+t^2) - \frac{1}{2} \right]$$

$$y' = g[2t \ln(1+t^2) + 2] + g 2t$$

$$\gamma(\omega) = c_1 - \frac{1}{2} = 0; \quad c_1 = \frac{1}{2}$$

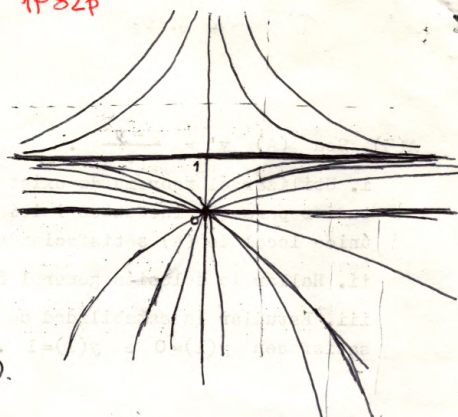
$$\gamma(\omega) = 2c_2 = 0; \quad c_2 = 0$$

$$y = \frac{t^2}{2}$$

$$\left(\int \frac{du}{(1+u^2)^2} = \frac{1}{2} \left(\arctan u + \frac{u}{1+u^2} \right) \right)$$

$$\text{Comparación: } (1+t^2) \left(t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \dots \right) = \frac{1}{2} \left(t + (1-\frac{1}{3})t^3 + (-\frac{1}{5} + \frac{1}{3})t^5 + \dots \right) = t + \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{35} + \dots$$

1482p



$$y'' = (y'-2)y; \quad \frac{v'v}{v-2} = y; \quad y^2 = 2v + 4 \ln|v-2| + C$$

$$\begin{cases} y' = v \\ v' = (v-2)y \end{cases} \quad (0) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{centro foso}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v \\ (v-2)y \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(0,v) = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}(y,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2y \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(1,v) = \begin{pmatrix} v \\ v-2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(-1,v) = \begin{pmatrix} v \\ 2-v \end{pmatrix}$$

$$y'' = (2-y')y \quad \frac{v'v}{v-2} = -y; \quad y^2 = C - 2v - 4 \ln|v-2|$$

$$\begin{cases} y' = v \\ v' = (2-v)y \end{cases} \quad (0) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad C$$

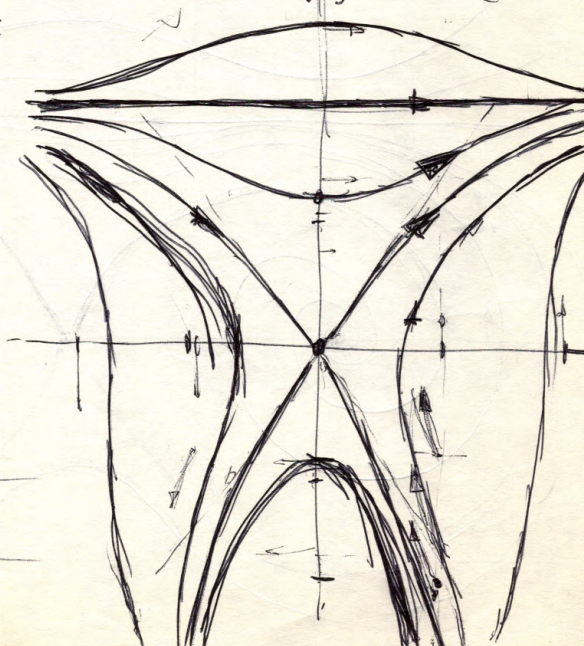
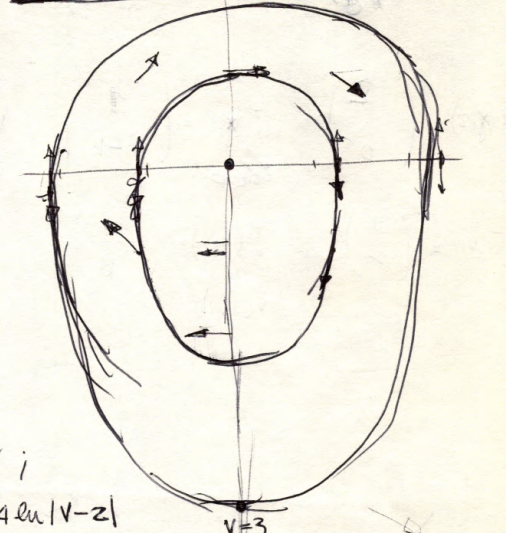
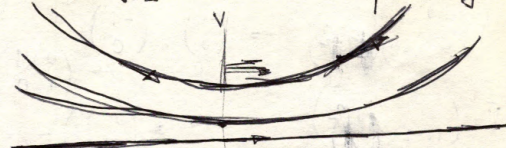
$$\pm \sqrt{2} \text{ pella } \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ inestable} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ estable}$$

$$\vec{v}(\omega,v) = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}(y,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2y \end{pmatrix}$$

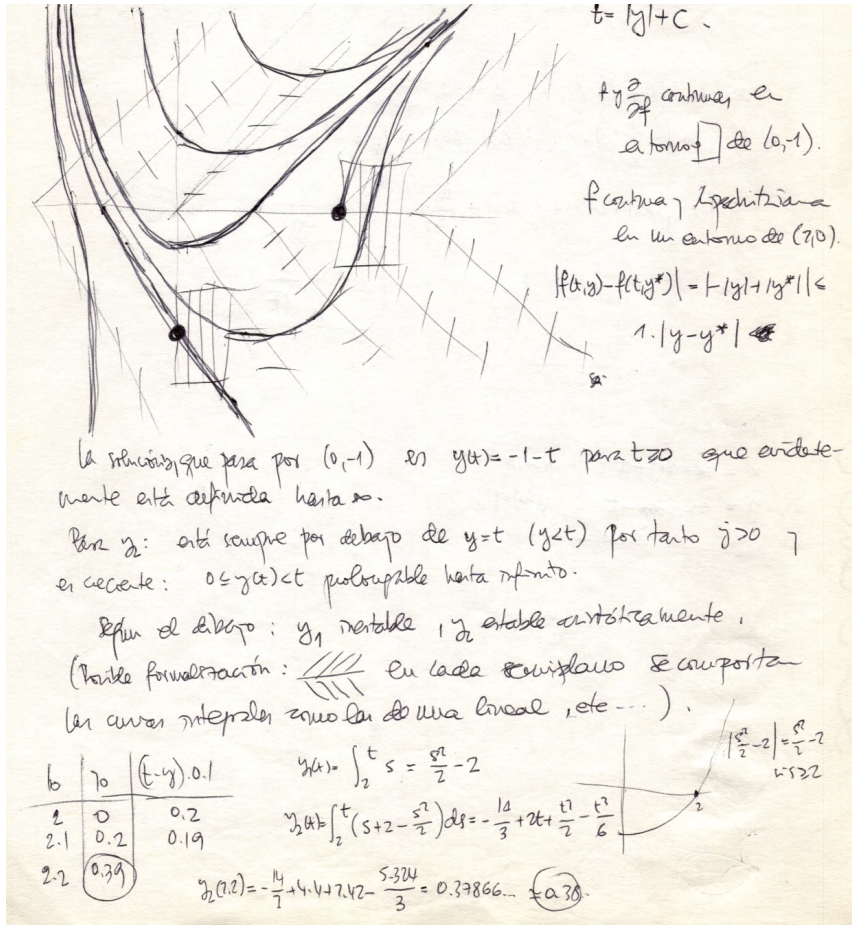
$$\vec{v}(1,v) = \begin{pmatrix} v \\ 2-v \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(1,-1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$y^2 = 2v + 4 \ln|v-2| + C \quad \text{órbitas simétricas respecto a } y=0$$



A



B

$g_1 \frac{1}{t} \sin t + g_2 \frac{1}{t} \cos t + y_p$
 $\frac{1}{t} \sin t$ $\frac{1}{t} \cos t$
 $-\frac{1}{2t^3} \sin t + \frac{1}{t} \cos$ $-\frac{1}{2t^3} \cos t - \frac{1}{t} \sin t = -\frac{1}{t}$
 $y_p = \frac{1}{t} \cos t \int (-t \frac{1}{t} \sin t) dt - \frac{1}{t} \sin t \int (-t \frac{1}{t} \cos t) dt = \frac{1}{t}$
 $y' = \frac{1}{2} t^{-3/2}$; $y'' = \frac{3}{4} t^{-5/2}$ $\frac{3}{4} t^{-1/2} - \frac{1}{2} t^{-1/2} + t^{3/2} - \frac{1}{4} t^{-1/2} = t^{3/2}$
 $g_1 \sin t + g_2 \cos t + 1 = 1$ $g_1 = -g_2 \frac{\sin t}{\cos t}$
 $g_1 (-\frac{1}{2} \sin t + \cos t) + g_2 (-\frac{1}{2} \cos t - \sin t) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$
 $g_1 (-\frac{1}{2} \sin t + \cos t + \frac{1}{2} \sin t + \frac{\sin^2 t}{\cos t}) = g_1 \frac{1}{\cos t} = 0$ $g_1 = 0$ $g_2 = 0$ $y(t) = \frac{1}{t}$

J82

C

$x' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}; x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0, \lambda = 1$ doble, $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $2v_1 - 2v_2 = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $x = P e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + P e^{-t} \int_0^t e^s \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t-s & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix} ds =$ ¿estable esta solución?
 $= P e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + P e^{-t} \int_0^t e^s \begin{pmatrix} 0 \\ -s \end{pmatrix} ds = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-t} P \begin{pmatrix} 0 \\ e^t + 1 \end{pmatrix} =$
 $= \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} t e^t + 1 \\ t e^t + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} + t + e^{-t} \\ e^{-t} + t + e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ 1+t \end{pmatrix}$ $\text{comprobación } -1 = -1 - t - 2 + 2t - t = -1$
 $-1 = 2 - 2t - 3 + t = -1$
 Laplace:
 $sX - 1 = X - 2Y + \frac{1}{s^2}$; $Y = X \frac{(1-s)}{2} + \frac{1-s}{2} = \frac{1-s}{2s} + \frac{s+1}{2s} = \frac{2}{2s} = \frac{1}{s}$ $y=1$
 $sY - 1 = 2X - 3Y + \frac{1}{s^2}$; $(s+3) \left[X \frac{(1-s)}{2} + \frac{1-s}{2} \right] = 1 + \frac{1}{s^2} + 2X$
 $X(1-s)(s+3) + (s+3)(1 - \frac{1}{s^2}) = 4X + 2 + \frac{2}{s^2}$
 $X(-s^2 - 2s - 3) = 2 + \frac{2}{s^2} - s - \frac{3}{s} + \frac{1}{s^2} - 1 - 5 \frac{1}{s} = \frac{-s^2 + 2s + 1}{s^2}$
 $X = \frac{(s+1)^2 (s-1)}{s^2 (s+1)^2} = \frac{1-s}{s^2}$ $X = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$ $x = -t + 1$
 $s \cdot x(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $P e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = P e^{-t} \begin{pmatrix} -2 \\ -t+1 \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} -1-t+1 \\ -t+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t e^{-t} \\ -t e^{-t} + e^{-t} \end{pmatrix}$
 $\text{se } \begin{pmatrix} -t e^{-t} + 1 - e^{-t} \\ -t e^{-t} + 1 - e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - e^{-t} - t e^{-t} \\ 1 - t e^{-t} \end{pmatrix}$

1. $y^2 y' = y'(y^2 - 2)$ $v' = \frac{v}{y} - \frac{2}{y^2}$; $v = cy + \frac{1}{y}$ $\int \frac{y dy}{y^2 + 1} = t + c$; $\ln(y^2 + 1) = 2t + c$

$y^2 = \frac{e^{2t+c_1} - 1}{c_1}$; $y = \pm \left[\frac{ke^{2t} - 1}{c_1} \right]^{1/2}$ si $c_1 \neq 0$ $y' = cy + \frac{1}{y}$ $e^{2t} = k^2 = k$ si $c_1 = 0$; $y = \sqrt{2t + c_2}$

$y(0) = \left[\frac{c_1 - 1}{c_1} \right]^{1/2} = a$; $\frac{ba - 1}{c_1} = a^2$; $c_1 = \frac{ba - 1}{a^2}$ Existe un t_0 ($t = \exp$)

$y'(0) = \left[\frac{c_1 - 1}{c_1} \right]^{-1/2} k = b$; $\frac{k}{a} = b$ $k = ba$

$a=1$, $b \in [0, 1)$; $y = \left[\frac{1 - b e^{2(b-1)t}}{1-b} \right]^{1/2} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1-b}}$

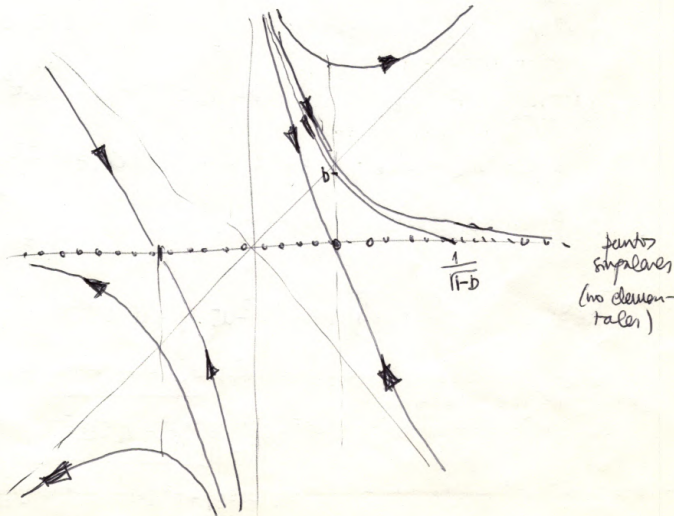
$b=1$; $c_1=0$; $y = \sqrt{2t + c_2}$; $y(0)=1 \rightarrow c_2=1$ $y = \sqrt{2t+1}$ $\xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$

(Comprobación $y' = \frac{1}{\sqrt{2t+1}}$; $y'' = -\frac{1}{\sqrt{2t+1}}$; $y'' y^2 = -\frac{1}{\sqrt{2t+1}} = \frac{1}{\sqrt{2t+1}} (1-2) = y'(y^2 - 2)$)

No puede ser estable pues $(y_2(t) - y_1(t)) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$ por muy cercano que esté b de 1.

se podría pasar el mapa de fases

de la y' : $v = cy + \frac{1}{y}$



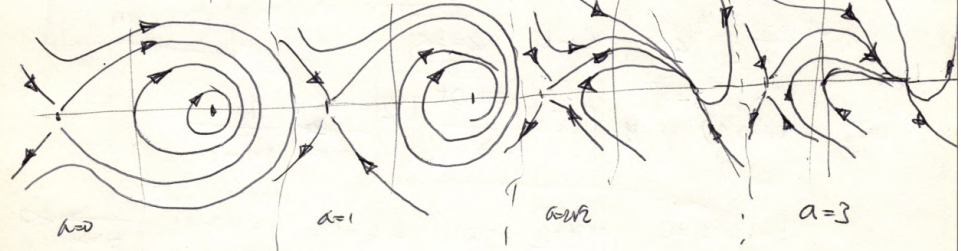
puntos singulares (no demostrados)

2. $y'' = 1 - y^2 - ay'$, $a \geq 0$ $y' = v$ $v' = 1 - v^2 - av$ $(1,0) \xrightarrow{y=1} u' = v$ $v' = -2u - u^2 - av$ $(0,1) \xrightarrow{v=1} u' = v$ $v' = 2u - u^2 - av$ $(0,1) \xrightarrow{v=1} u' = v$ $v' = 2u - u^2 - av$ $(0,1) \xrightarrow{v=1} u' = v$ $v' = 2u - u^2 - av$

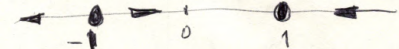
$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 8}}{2}$

$a > 0$ centro lineal $\rightarrow$ centro no lineal
 $a = 2/\sqrt{2}$ modo de una temperatura estable
 $0 < a < 2/\sqrt{2}$ foco estable
 $2/\sqrt{2} < a$ modo de dos temperaturas estable

$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 8}}{2}$ punto silla bazo



$(a=3) \begin{cases} -1 \rightarrow (1, -1) \\ -2 \rightarrow (1, -2) \\ 0.5 \rightarrow (1, 0.5) \\ -3.5 \rightarrow (1, -3.5) \end{cases}$



3. $t^2 y' - t(t+2)y' + (t+2)y = 0$ $v(v-1) - 2v + 2 = 0$, $v = \frac{y}{t}$

$y = t \sum c_k t^{k+2} \rightarrow \sum k(k+1)c_k t^{k+2} - (k+1)c_k t^{k+3} = 0$

$k(k+1)c_k = (k+1)c_{k+1}$ $k=1, 2, \dots$ $c_k = \frac{c_0}{k+1}$ $k=1, \dots$

$c_0 = \frac{c_0}{2}$; $c_2 = \frac{c_0}{3} = \frac{c_0}{2 \cdot 3}$; $\dots$ $c_k = \frac{c_0}{(k+1)!}$ $y_1 = t \sum \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} = te^t - t$

$y = (te^t)u$; $y' = (t+1)e^t u + te^t u'$; $y'' = (t+2)e^t u + 2(t+1)e^t u' + te^t u''$

$(2e^t u + 2(t+1)e^t u' - t(t+2)e^t u) = 0$; $tu' + (u+2-t)u = 0$; $u' + u = 0$

$u = \frac{te^t}{1-e^t}$; $u = (1-e^t)^{-1} e^t$; $u = Ge^{-t}$; $y = te^t [Ge^{-t} + c_2] = Ge^t + c_2 te^t$; $y = t(e^t - 1) \left[\frac{c_1}{1-e^t} + c_2 \right] = \frac{c_1 t + c_2 t(e^t - 1)}{1-e^t}$

Por ser: $y_2 = \sum b_k t^{k+1} + a \ln t$; $-at_1 - 3at_2 + 2at_3 y' + t^2 \sum k(k+1)b_k t^{k-1} - t(t+2) \sum b_k t^k + (t+2) \sum b_k t^{k+1} = 0$

Primer parcial (1982-83)

A (4). Sean las ecuaciones: (1) $y' = y^2 - (\cos t)y$.

$$(2) \quad y' = -y^3 + (\cos^2 t)y^2 - (\cos^2 t)y.$$

Para la ecuación (1):

- i. Resolverla.
- ii. Dibujar las zonas del plano (t, y) en las que sus soluciones crecen o decrecen.
- iii. Basándose en i) y ii) hacer un esquema de las soluciones de (1).

Para las dos ecuaciones (1) y (2):

- i. Precisar para qué valores de a la solución con $y(0)=a$ se prolonga hasta ∞ .
- ii. Estudiar la estabilidad de las soluciones con $y(0)=0$ e $y(0)=-1$.

Para la ecuación (2):

- i. Dibujar la poligonal de Euler entre 0 y 2 con $h=1$ si $y(0)=-1$.

B (4). i. Resolver $y'' + y' = \begin{cases} t+1, & t < 1 \\ 3-t, & 1 \leq t \end{cases}$ con $y(0)=-1, y'(0)=0$.

- ii. Hallar la matriz fundamental canónica del sistema homogéneo equivalente (es decir, la $W(t)$ con $W(0)=I$).

- iii. Hallar la solución general de $y'' + y' = t+1$ exclusivamente por medio de series (probar series directamente en la ecuación no homogénea). Hallar a partir de esta solución en forma de series la solución particular que satisface $y(0)=-1, y'(0)=0$.

C (2). Construir una teoría para el dibujo de órbitas de ecuaciones autónomas de primer orden en la "recta de fases" (definición y tipos de órbitas, clasificación de puntos singulares en ecuaciones lineales y no lineales, algunos ejemplos,...).

Primer parcial de junio, grupo piloto (1983)

A (6). Sea la ecuación (A) $x'' - \frac{1}{2}(x')^2 + \frac{1}{2}x(x-2) = 0$.

Clasificar los puntos singulares de su mapa de fases. Hallar la ecuación de sus órbitas y dibujar el mapa de fases de (A).

Sea (E) la ecuación diferencial $v' = f(x, v)$ que se ha debido resolver para hallar la ecuación de las órbitas. Estudiar existencia y unicidad de soluciones de (A) y de (E).

Comprobar que existen dos soluciones de (E) que pasan por el origen y que existe una única solución de (A) con $x(0)=0, x'(0)=0$. Explicar por qué no es contradictorio.

Precisar a la vista del mapa de fases la estabilidad de la solución de (A) que satisface:

- i) $x(0)=0, x'(0)=0$; ii) $x(7)=2, x'(7)=0$; iii) $x(-1)=1, x'(-1)=-1$.

B (4). Sea la ecuación (B) $t^2 y'' - 2ty' + (2-t^2)y = 2t^3 \cosh t$.

Hallar una solución de la homogénea por medio de series, identificándola como una función elemental.

Hallar la solución general de (B) en términos de funciones elementales y la solución particular de (B) que satisface $y(1)=0, y'(1)=\sinh 1$.

$$\text{Dato} \quad \sinh t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Primer parcial de septiembre (1983)

A (5). Sea $y' = \frac{2y-2t+1}{y-t+1}$.

- i. Dibujar aproximadamente las soluciones.

- ii. Estudiar existencia y unicidad.

- iii. ¿Es prolongable la solución que satisface $y(0)=2$?
¿Es prolongable la que satisface $y(0)=-2$?

- iv. Estudiar la estabilidad de la solución con $y(0)=0$.

- v. Resolver la ecuación.

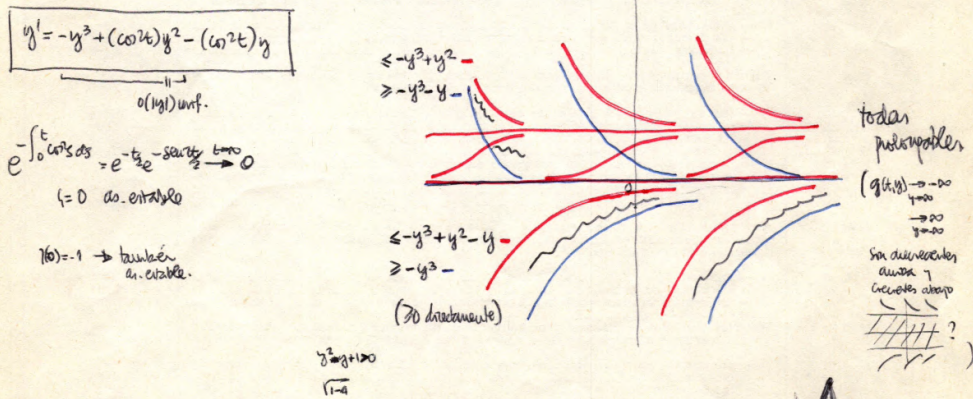
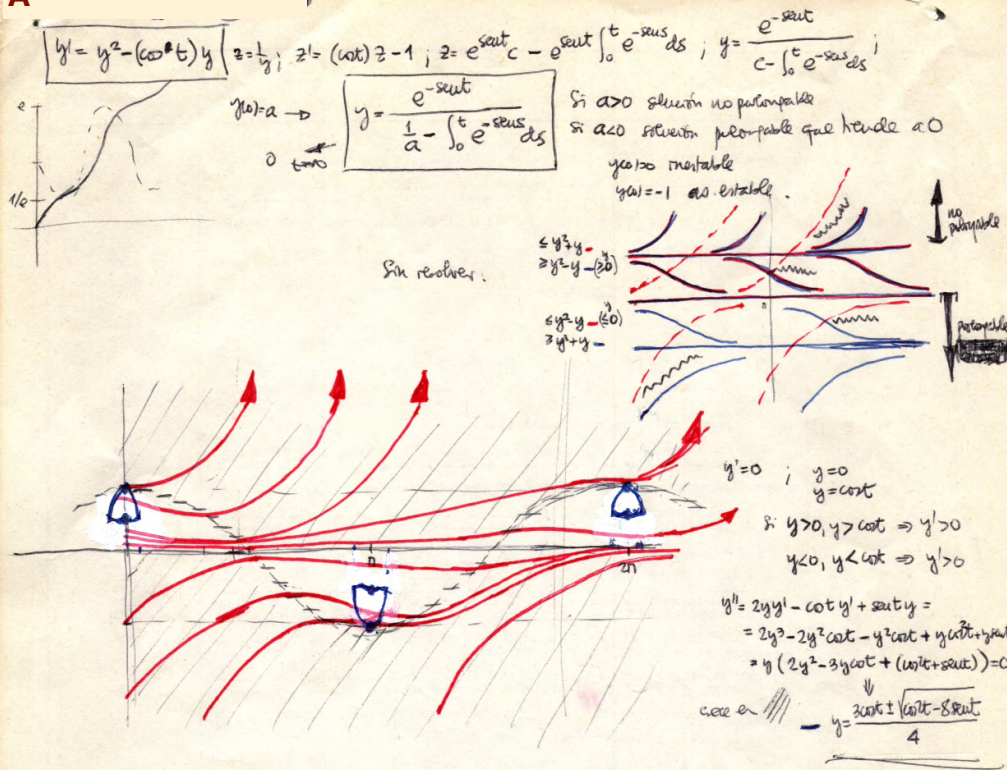
B (5). i. Resolver el problema $\begin{cases} y'' + 2cy' + y = \delta(t-1), & c > 0 \text{ constante} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$,

distinguiendo los casos $c < 1, c = 1$ y $c > 1$.

- ii. Escribir el resultado para $c=0$ prescindiendo de funciones paso, dibujar la solución y comentarla físicamente.

- iii. Hallar la matriz fundamental canónica del sistema equivalente a la ecuación homogénea.

A



El segundo punto (t_1, y_1) de la polinomial de Taylor con $h=1$ e $y(0) = -1$
 $(t_1, y_1) = (1, -1 + 1(1 + 1 + 1)) = (1, 2)$; $(t_2, y_2) = (2, 2 - 8 + (4 - 2)\cos^2 2) = (2, 2\cos^2 2 - 6)$
(no se espera que 1 aproxime algo con estos h !)

B

$y'' + y' = \begin{cases} t+1 & t \in [0,1) \\ 3-t & t \in [1,\infty) \end{cases} = t+1 + u_1(-2(t-1))$ $y(0) = -1$; $y'(0) = 0$

$(s+1)Y + s+1 = \frac{s+1}{s^2} - 2e^{-s} \frac{1}{s^2}$; $Y = \frac{1}{s^3} - \frac{1}{s} - 2e^{-s} \frac{1}{s^2(s+1)}$
 $[\frac{1}{s^3} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}]$

$y = \begin{cases} \frac{t^2}{2} - 1 - 2u_1(t) \left[1 - (t-1) + \frac{(t-1)^2}{2} - e^{-(t-1)} \right] & t \in [0,1) \\ -\frac{t^2}{2} + 4t - 6 + 2e^{1-t} & t \in [1,\infty) \end{cases}$

Directa

Re: $u + ue^t + \frac{t^2}{2} \Rightarrow \frac{t^2}{2}$ del p.A: $y(1) = \frac{1}{2}$; $y'(1) = 1$

$y'' + y' = 3 - t$; $At^2 + Bt$; $2At + B$; $2A$
 $2A + 2At + B = 3 - t$
 $A = -\frac{1}{2}$; $B = 3 + 1 = 4$

$z = u + ue^t - \frac{t^2}{2} + 4t \Rightarrow -u + 2e^{1-t} - \frac{t^2}{2} + 4t$

$y(1) = u + ue^1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} - 4$

$y'(1) = -ue^1 + \beta = y' - 2$

$u = -6$

$ue^1 = -2$

$e^1 = 2e$

$V' + V = \begin{cases} t+1 & t \in [0,1) \\ 3-t & t \in [1,\infty) \end{cases}$ $V(0) = 0$

$(s+1)V = \frac{s+1}{s^2} - 2e^{-s} \frac{1}{s^2}$
 $V = \frac{1}{s^2} - 2e^{-s} \frac{1}{s^2(s+1)} + \frac{1}{s} + 2e^{-s} [\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s+1}]$
 $[\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s+1}]$

$v = t + 2u_1[1 - (t-1) - e^{-(t-1)}] = \begin{cases} t & t \in [0,1) \\ -t+4 - 2e^{1-t} & t \in [1,\infty) \end{cases}$

$V' + V = t+1 \rightarrow V = e^t \int_0^t e^{-s} (s+1) ds = t \rightarrow V(1) = 1$
 $V' + V = 3-t \rightarrow V = ce^{-t} - t + 4 \rightarrow 1 = ce^{-1} + 3; c = 2e$
 $V = 2e^{1-t} - t + 4$

$y' = \begin{cases} t & t \in [0,1) \\ -t+4 - 2e^{1-t} & t \in [1,\infty) \end{cases}$ $y'' = \begin{cases} 1 & t \in [0,1) \\ -1 + 2e^{1-t} & t \in [1,\infty) \end{cases}$



$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\lambda = 0$ $\lambda = -1$ $\lambda = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $e^{At} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1-e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$
 $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
 $PJP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A$
 $W(t) \cdot W^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1-e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Hallar la m f ⁽¹⁾ sistema equivalente que
 satisface $W(0) = I$.

Realizar por medio de series en $[0, 1)$ (probar series directamente en la m compuesta,
 solución general, como si no se conociese la función e^x se supiere haber encontrado con
 coeficientes constantes).

$y'' + y' = t + 1$; 0 regular $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$
 $\sum_{k=0}^{\infty} k a_k t^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} k a_k t^{k-1} = t + 1$

t^0 $a_1 + 2a_2 = 1$ $a_2 = \frac{1}{2} - \frac{a_1}{2}$
 t^1 $2a_2 + 2 \cdot 3a_3 = 1$ $a_3 = \frac{1}{6} - \frac{1}{3}a_2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{a_1}{6} = \frac{a_1}{6}$

t^k $(k+1)a_{k+1} + (k+2)(k+1)a_{k+2} = 0$; $a_{k+2} = -\frac{a_{k+1}}{k+2}$ $k=2, 3, \dots$

$a_4 = -\frac{a_3}{4} = -\frac{a_1}{4 \cdot 6} = -\frac{a_1}{24}$

$a_k = (-1)^{k-1} \frac{a_1}{k!}$ $k=3, 4, \dots$ $(1-e^{-t})$

Solución general: $y = a_0 + a_1 \left[t - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} - \dots + (-1)^{k+1} \frac{t^k}{k!} \right] + \frac{t^2}{2}$

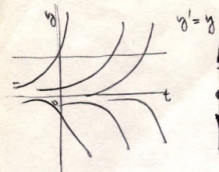
$y(0) = a_0 = -1$

$y'(0) = a_1 = 0$

$\Rightarrow y = \frac{t^2}{2} - 1$

C MAPAS DE FASES DE ECUACIONES AUTÓNOMAS DE PRIMER ORDEN

Sea $y' = f(y)$ con $f \in C(\mathbb{R})$; si $a \in \mathbb{R}$ es tal que $f(a) = 0$ entonces $y = a$ es solución de (1).
 Si $y(t)$ es solución $\Rightarrow y(t+c)$ es solución.



las soluciones son curvas en $\mathbb{R}^2$. Para ecuaciones autónomas es posible
 dibujar solo la proyección sobre la recta $t=0$. la proyección de una
 curva solución sobre la recta de fases se llama órbita.
 La órbita de $y(t)$ coincide con la órbita de $y(t+c)$.

Si imaginamos una órbita como la trayectoria de un punto P cuya posición
 en el instante t está dada por $y(t)$ la segunda parametrización corresponde a otro punto cuyo movimiento
 es igual al de P pero que alcanza la misma posición en tiempos distintos.
 las órbitas tienen sentido.

Teor: Por cada punto de la recta de fases para una única órbita que puede ser un punto o
 un segmento (finito o infinito) (que corresponde a una relación constante o a una solución constante
 o decreciente).

Queremos dibujar el mapa de fases. Sea $\bar{V}(x) = \text{signo } f$ en x . Conociendo $\bar{V}(x)$ está conocido el
 mapa de fases. Pero también se puede encontrar información a partir de los puntos singulares de
 la recta de fases (proyecciones de soluciones de equilibrio).

Supongamos que 0 es punto singular (si no, el cambio $y = y_0 + v$ traslada y_0 a 0)

Podemos escribir $y' = f(y) = \frac{P(y)}{Q(y)}$ con $\frac{P(0)}{Q(0)} \neq 0$

Supongamos que 0 es aislado y punto singular elemental. Sea (2) $y' = f(y)y$.

o de suponer que las órbitas de (1) tienen el mismo sentido que las de (2) cerca de 0.
 Clasifiquemos los puntos singulares de (2)

Si $f'(0) < 0$ decimos que 0 es un pozo
 $f'(0) > 0$ 0 es una fuerza
 $f'(0) = 0$ 0 es un collar

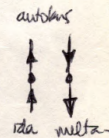


Teor: Si 0 es un pozo o una fuerza del lineal $\Rightarrow$ 0 es pozo o fuerza del no lineal
 Si 0 es un collar, 0 puede ser un pozo, un collar o un autoluz (de ida o de vuelta).

Inestabilidad: $\begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \end{matrix}$ 0 es inestable ~~si $f'(0) > 0$~~
 Si $f'(0) = 0$ en $\bar{V}(y)$ $\bar{V}(y)$ apunta hacia 0.

Si $f'(0) < 0 \Rightarrow$ 0 es estable
 Si $f'(0) > 0 \Rightarrow$ 0 es inestable

Toda órbita acotada ~~para $t \geq 0$~~ se acerca a un punto singular cuando $t \rightarrow \infty$.
 (para $t \leq 0$)

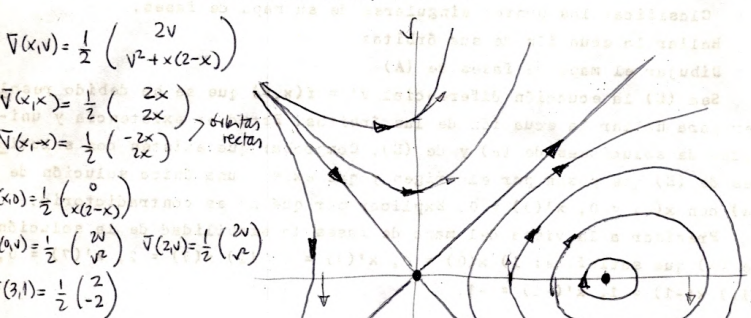


A $x'' - \frac{1}{2}(x')^2 + \frac{1}{2}x(x-2) = 0$

$\dot{x} = v$
 $\dot{v} = \frac{1}{2}(v^2 + x(2-x))$ $\begin{cases} v=0 \\ x(2-x)=0, x=0, x=2 \end{cases}$ $(0,0), (2,0)$

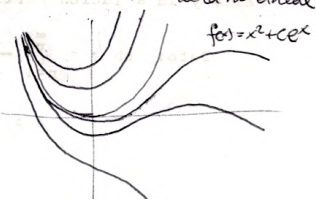
$(0,0) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda^2 - 1 = 0; \lambda = \pm 1$ punto silla
 $\lambda = -1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ estable
 $\lambda = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ inestable

$h = x-2; x = u+2$
 $\dot{x} = v$
 $\dot{v} = \frac{1}{2}(v^2 + (u+2)(-u))$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\lambda^2 + 1 = 0$ centro de la lineal



$2v'v = x(2-x) + v^2$

$v^2 = t; z' = 2vv'; z' = z + x(2-x); x^2$ se particular, $z = x^2 + ce^x; v^2 = x^2 + ce^x$
 $v_0 = v_0 \rightarrow v^2 = x^2 + v_0^2 e^x$ Órbitas simétricas respecto a $v=0$ → el centro es centro de la no lineal
 $v_0 = 0 \rightarrow v = \pm x$, dan órbitas que son rectas.



J83

$y = t \sinh t \int u; y' = s \int u + t \int u + t s u; y'' = 2c \int u + t s \int u + z s u + z t c u + t s u'$
 $t y'' = 2t^2 c \int u + t^2 s \int u + t^2 c \int u + 2t^2 s u + t^3 s u'$
 $- t y' = -2t s \int u - t^2 c \int u - t^2 s u$
 $+ (2-t)y = +2t s \int u - t^3 s \int u = 2t^3 c \int u + t^3 s \int u' = 2t^3 c \int u + t^3 s u' = 2t^3 c \int u + t^3 s u'$

$u' = -\frac{2c \int u}{s u} u + \frac{2c \int u}{s u} u$
 $e^{-2 \int \frac{c \int u}{s u} dt} = \frac{1}{s u^2}$

$u = \frac{c}{s u^2} + \frac{1}{s u} \int s u \cdot \frac{2c \int u}{s u} dt = \frac{c}{s u} + \frac{1}{s u}$

$y = t \sinh t \left[c \int \frac{1}{s u} dt + \frac{1}{s u} + k \right] = k t \sinh t - c t e^{-t} + \frac{t^2}{2} \sinh t$

$\int \frac{1}{s u} dt = \int \frac{4 dt}{(e^t - e^{-t})^2} = \int \frac{4 dv}{v(v-\frac{1}{2})^2} = \int \frac{4 dv}{(v-\frac{1}{2})^2} = -\frac{2}{v-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{e^t - 1} = -\frac{e^{-t}}{\sinh t}$
 $e^t = v, dt = \frac{dv}{v}$

$y' = k \sinh t + k t \cosh t - c e^{-t} + c t e^{-t} + 2t \sinh t + t^2 \cosh t$

$y(1) = k \sinh 1 - c e^{-1} + \frac{1}{2} \sinh 1 = 0$

$y'(1) = k \cosh 1 + k \sinh 1 - c e^{-1} + c e^{-1} + 2 \sinh 1 + \frac{1}{2} \cosh 1 = \frac{\sinh 1}{2}$

$c = \frac{\sinh 1 + \cosh 1}{\sinh 1 + \cosh 1} = -1 \rightarrow c = 0$

$y = (t^2 - t) \sinh t$

B $t^2 y'' - 2t y' + (2-t^2)y = 2t^3 \cosh t$ $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0; \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = 2, 1$ $y = \sum C_n t^{n+2}$

$\sum (n+2)(n+1) C_n t^{n+2} - \sum 2(n+2) C_n t^{n+2} - \sum C_n t^{n+4} + \sum 2 C_n t^{n+2} = 0$

$t^2 \rightarrow 2 \cdot 1 \cdot C_0 - 2 \cdot 2 C_0 + 2 C_0 = 0$

$t^3 \rightarrow 3 \cdot 2 C_1 - 2 \cdot 3 C_1 + 2 C_1 = 0 \rightarrow C_1 = 0$

$t^{n+2} \rightarrow [(n+2)(n+1) - 2(n+2) + 2] C_n - C_{n-2} = 0 \rightarrow (n^2 + n) C_n = C_{n-2}; C_n = \frac{C_{n-2}}{n(n+1)}$

$C_2 = C_0 \frac{1}{3 \cdot 2}; C_4 = C_2 \frac{1}{5 \cdot 4} = \frac{C_0}{5!}; \dots; C_n = \frac{C_0}{(n+1)!}$

$y = t^2 \left[1 + \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} + \dots \right] = t \left[t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \dots \right] = t \sinh t$

$2t^2 x' + t^3 x'' - 2t x - t^3 x' + t x - t^3 x = t^3 x'' - (t^3 x' - t x) = 0$
 $x'' - x = 0; x = a e^t + b e^{-t}$
 $y = t a e^t + t b e^{-t}$

A $y' = \frac{2y-2t+1}{y-t+1} = 1 + \frac{y-t}{y-t+1} = 2 - \frac{1}{y-t+1}$

S83

$z = y - t$; $y' - 1 = z'$; $z' = \frac{z}{z+1}$; $\int \frac{z+1}{z} dz = t + C$

$z + \ln|z| = t + C$; $y - t + \ln|y - t| = t + C$; $y + \ln|y - t| = 2t + C$

Deficiencia de puntos

$(y-t)e^y = ce^{2t}$ siempre

$te^y - te^y = ce^{2t}$

$y=t$ es estable si y solo si $z=0$ lo es

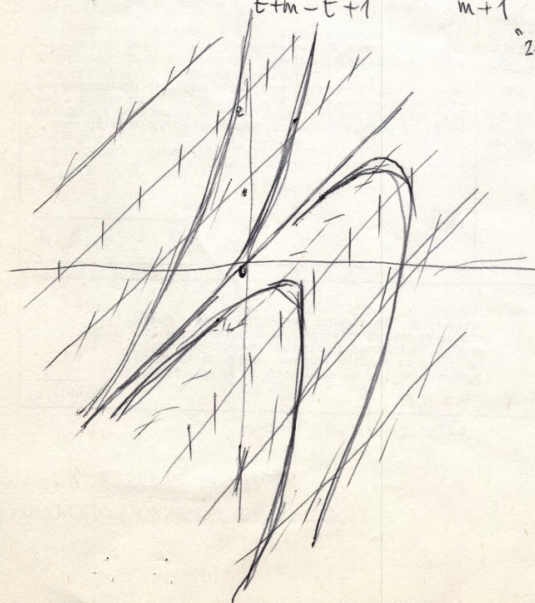
las soluciones $\frac{2y-2t+1}{y-t+1} = C$; $2y-2t+1 - Cy + Ct - C = 0$

$(2-C)y = (2-C)t + C - 1$

$y = t + \frac{C-1}{2-C}$ son rectas de pendiente 1

¿Existe alguna que sea solución?

$C = f(t, t+m) = \frac{2t+2m-2t+1}{t+m-t+1} = \frac{2m+1}{m+1} = 1 \rightarrow 2m+1 = m+1 \rightarrow m=0$



m	C
0	1
1	3/2
2	5/3
3	7/4
↓	↓
2	3

si $y > t$
↓
 $y' < 2$

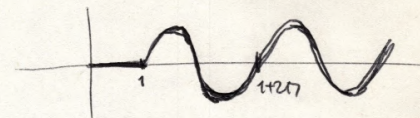
B $s^2 + 2cs + 1 = e^{-s}$; $Y = \frac{e^{-s}}{s^2 + 2cs + 1}$; $s^2 + 2cs + 1 = 0 \Rightarrow s = -c \pm \sqrt{c^2 - 1}$

$0 \leq c < 1$ $Y = \frac{e^{-s}}{(s+c)^2 + (1-c^2)} \rightarrow y = u_1(t) e^{-c(t-1)} \operatorname{sen}[(1-c^2)(t-1)]$

$c = 1$ $Y = \frac{e^{-s}}{(s+1)^2} \rightarrow y = u_1(t) e^{-(t-1)} (t-1)$

$c > 1$ $Y = \frac{e^{-s}}{(s+c-\sqrt{c^2-1})(s+c+\sqrt{c^2-1})} = \frac{e^{-s}}{2\sqrt{c^2-1}} \left[\frac{1}{s+c-\sqrt{c^2-1}} - \frac{1}{s+c+\sqrt{c^2-1}} \right]$
 $\rightarrow y = u_1(t) \frac{1}{2\sqrt{c^2-1}} \left[e^{(-c+\sqrt{c^2-1})(t-1)} + e^{(-c-\sqrt{c^2-1})(t-1)} \right]$

$c=0$ $y = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 1 \\ \operatorname{sen}(t-1) & t \geq 1 \end{cases}$



$y_1' = v$ $y_2' = -y_1 - 2y_2$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$; $\lambda = -1$ doble ; $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$(A+S)W = V \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $w_1 + w_2 = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ por ejemplo.

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $P^{-1} = -1$; $P^{-1} = -\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$P e^{tA} P^{-1} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1+t & 1 \\ -t & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix}$

Otra forma $W(t)W^{-1}(0)$ es mfc si $W(t)$ es mfc:

$W(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ -e^{-t} & (1-t)e^{-t} \end{pmatrix}$ para e^t y te^t son sol. de la ecuación. $W(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $W^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$W(t)W^{-1}(0) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix}$