

Problemas de Métodos II (grupo piloto)

Hoja 1.A: Integración elemental. Dibujo aproximado.

1. Hallar las soluciones particulares que satisfacen los siguientes problemas de valores iniciales:

$$\begin{array}{lll} 2txx' - 3x^2 + t^2 = 0 & t^2 + y^2 + t + ty y' = 0 & x' = 1 + \cos^2(x-t) \\ x(1) = 2 & y(1) = 0 & x(0) = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} y \sin t + y' \ln y = 0 & x' = \cos t - x - x^2 \frac{\sin t}{\cos^2 t} & xy' = 2y + x \\ y(0) = 1 & x(0) = -1 & y(1) = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} e^y - 2x + x e^y y' = 0 & 3y' + y = (1-2x)y^4 & t^2 y' = 2ty - y^2 \\ y(1) = 0 & y(1) = 1 & y(1) = -1 \end{array}$$

2. Probar que la ecuación lineal admite un factor integrante que sólo depende de t y utilizarlo para deducir la expresión de la solución general de una ecuación lineal.

3. Dibujar el campo de direcciones y la forma aproximada de las soluciones de

$$y' = 1 - y^2 \quad y' = t - 2y \quad y' = t^2 + y \quad y' = \frac{y}{y-t} \quad y' = \frac{y-t}{y+t}$$

4. Consideremos la familia de hipérbolas $xy = C$. Escribir la ecuación diferencial de la que son curvas integrales (eliminando C entre la ecuación dada y la ecuación obtenida derivándola). Hallar las trayectorias ortogonales a dichas hipérbolas, es decir, las líneas que las cortan en ángulo recto (recordar que si m es la pendiente de una recta, la pendiente de la recta perpendicular es $-1/m$).

Resolver el mismo problema para la familia de circunferencias $x^2 + y^2 = 2Cx$.

5. Integrar numéricamente el problema $\begin{cases} y' = \frac{t+y}{2} \\ y(0) = 2 \end{cases}$ entre 0 y 1 tomando $h=0.1$ y $h=0.2$. Resolver la ecuación y comparar los valores exactos con los obtenidos anteriormente.

6. Tenemos en el instante $t=0$ un gramo de material radiactivo A que sigue la ley de desintegración $x' = -2x$ y tal que al desintegrarse se transforma en otro material radiactivo B que sigue $y' = -ay$. Encontrar la función $y(t)$ que nos da la cantidad de material B existente en cada instante t y el valor máximo de esta función para los casos: i) $a=1$, ii) $a=2$, iii) $a=4$.

7. Supongamos ahora que tenemos un gramo de otro material radiactivo que se desintegra con una velocidad proporcional a la raíz cuadrada de la cantidad existente. Si al cabo de un año sólo queda $1/4$ gr. ¿al cabo de cuántos años tendremos 0.1 gr? Comprobar que este material se desintegra totalmente en un tiempo finito y calcular ese tiempo.

Problemas de Métodos II (grupo piloto)

Hoja 1.B: Existencia, unicidad, estabilidad, ...

1. Estudiar la existencia, unicidad y prolongabilidad de las soluciones de

$$\begin{array}{llll} y' = -\frac{2y}{t+4t} & y' = y \cos^2 \sqrt{y+t^2} & y' = \frac{1}{1+t^2+y^2} & y' = -ye^{-y^2} \\ y' = y^2 + t^2 & y' = (t^2 - y^2)^{1/2} + 1 & y' = \frac{y}{y-t} & y' = \begin{cases} -y \ln y, & y > 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases} \end{array}$$

2. Estudiar en que subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ la función $f(t,y) = t^3 |y|$ es lipschitziana respecto de la y . ¿Es lipschitziana en todo $\mathbb{R}^2$?

3. Aplicar el método de las aproximaciones sucesivas de Picard a

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y' = t^2 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

4. Resolver las siguientes ecuaciones y comprobar la dependencia continua del parámetro a de la solución con $y(0) = 0$:

$$y' = -y + e^{at} \quad y' = \cos^2 ay$$

5. Estudiar la estabilidad de la solución que satisface $y(0) = a$ según los valores de a :

$$y' = -2ty^2 \quad y' = \sin y \quad y' = \frac{2y}{(t+1)^3} + \cos^3 t \quad y' = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ y - y^2 & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

6. Estudiar para que valores de a y de b la solución de

$$y' = (\sin t + 2bt)y + e^t; \quad y(0) = a$$

existe, es única, es prolongable hasta ∞ , depende continuamente de a y de b , es estable.

7. Supongamos que el número de truchas en un estanque con alimento limitado viene regido por la ecuación $y' = by(M-y)$, $b, M > 0$. Supongamos ahora que un pescador:

i) saca truchas con una velocidad proporcional al número de truchas existentes

ii) saca truchas con velocidad uniforme.

Escribir las ecuaciones que rigen el número de truchas en presencia del pescador en ambos casos y discutir la estabilidad de las soluciones de equilibrio según los valores de las constantes que aparecen en las ecuaciones.

Problemas de Métodos II (grupo piloto)
Hoja 2.A: Sistemas y ecuaciones lineales

- Estudiar la existencia y unicidad de las soluciones de

$$\begin{aligned} x_1' &= tx_1 + \ln t & y y''' - y' y'' - 2y^2 &= \operatorname{tag} t & (1-t^2)y'' - 2ty' + y &= 0 \\ x_2' &= e^t x_1 - x_2 \end{aligned}$$
- Hallar la solución que se indica de los siguientes sistemas

$$\begin{aligned} X' &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & X' &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \end{pmatrix} & X' &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ t \cos t \end{pmatrix} \\ X(0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & X(0) &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} & X(0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
- Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} y'' + y &= t \sin 2t - 1 & y^{IV} + 2y''' + y' &= t & y'' - 2yy' &= 0 \\ t^2 y'' + 3ty' + y &= \ln t & t^2 y'' - 2y &= t^3 e^t & (t+1)y'' - y' &= (t+1)^2 \end{aligned}$$
- Hallar la solución particular que se indica

$$\begin{aligned} y'' - 2y' + 2y &= e^t \cos t & y^{IV} - 16y &= 8t^2 & y'' - y &= \frac{2}{1+e^t} \\ y(0) &= y'(0) = 0 & y(0) &= 1, y'(0) = -2 & y(0) &= y'(0) = 0 \\ y''(0) &= 3, y'''(0) = -8 & y(0) &= y'(0) = 0 \end{aligned}$$
- Hallar la solución general sabiendo que la y_1 que se indica es solución de la homogénea:

$$\begin{aligned} (1-t)y'' + ty' - y &= e^t(1-t)^2 & (t^2-1)y'' - 2y &= 0 \\ y_1(t) &= e^t & y_1(t) &= t^2 - 1 \end{aligned}$$
- Determinar si son estables las soluciones de la ecuación

$$y^{IV} + y''' + 3y'' + 2y' + 3y = 0$$
- Sea $t^3 y''' - 3t^2 y'' + 6ty' - 6y = f(t)$. Hallar tres soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea de la forma t^λ . Escribir el sistema equivalente. Hallar una matriz fundamental de ese sistema y utilizarla para encontrar una fórmula para la solución general de la ecuación no homogénea.

Problemas de Métodos II (grupo piloto)
Hoja 2.B: Soluciones periódicas. Mapas de fases. Transformada de Laplace.

- Determinar si existen soluciones 2π -periódicas y si son o no estables:

$$y' = (\cos t)y - \sin^2 t; \quad y'' + y = \cos^2 t; \quad y'' - y' + 2y = \sin t; \quad 4y'' + y = \cos t$$
- Clasificar los puntos singulares y dibujar aproximadamente el mapa de fases:

$$y'' + 4y' + 4y = 0; \quad y'' = y((y')^2 - 1); \quad y'' = y - y^3; \quad \begin{matrix} x' = 2x \\ y' = y(1-y) + x^2 \end{matrix}$$
- Estudiar la naturaleza de los puntos singulares de

$$\begin{aligned} x' &= y + x^3 + xy^2 & x' &= y - x(x^2 + y^2 - 1) \\ y' &= -x + x^2 y + y^3 & y' &= -x - y(x^2 + y^2 - 1) \end{aligned}$$

Escribir estos sistemas en coordenadas polares y dibujar aproximadamente el mapa de fases.
- Clasificar los puntos singulares de la ecuación del péndulo rotatorio $x'' = \sin(-1 + w^2 \cos x)$ según los valores de w . Dibujar el mapa de fases para $w=0$ (péndulo simple) y para $w=\sqrt{2}$ e interpretar en ambos casos el significado de las órbitas.
- El sistema $\begin{matrix} x' = x(3-x-2y) \\ y' = y(3-y-2x) \end{matrix}$ puede describir la evolución de la población de dos especies animales que siguen idénticas leyes de crecimiento y que compiten por el mismo alimento ($x(t)$ e $y(t)$ son esas poblaciones expresadas en alguna unidad adecuada). Dibujar el mapa de fases e interpretarlo.
- Resolver los problemas 2 y 4 de la Hoja 2.B mediante transformadas de Laplace.
- Se define la función paso $u_c(t) = \begin{cases} 0 & t < c \\ 1 & t \geq c \end{cases}, c \geq 0$. Calcular $L(u_c)$. Probar que si $L(f) = F$ existe para $s > a \geq 0$ entonces $L(u_c(t)f(t-c)) = e^{-cs}F(s)$. Resolver $\begin{matrix} y'' + y = u_\pi(t) \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{matrix}$ y expresar la solución obtenida prescindiendo de la función paso que aparece.

Problemas de Métodos II (grupo piloto)

Hoja 3: Soluciones por medio de series.

1. Estudiar si $t=0$ es un punto regular o singular regular de las siguientes ecuaciones, resolviéndolas por medio de series en caso afirmativo:

$$\begin{aligned} (1+t^2)y'' + 2ty' - 2y &= 0 & t^2y'' + 2y' + 4y &= 0 & y'' - e^t y &= 0 \\ ty'' + (1-t)y' + y &= 0 & 2ty'' + y' - y &= 0 & y'' + t^2y &= 0 \\ (1-t^2)y'' - ty' + 4y &= 0 & t^2y'' + 2t^2y' - 2y &= 0 & y'' + (t-2)y &= 0 \end{aligned}$$

2. Hallar una segunda solución linealmente independiente de P_0 y P_1 para la ecuación de Legendre con $n=0$ y $n=1$, sin recurrir a series. Desarrollar por Taylor estas soluciones y comprobar que coinciden con las series que nos proporciona la fórmula general de las soluciones.
3. Cualquier polinomio $Q_n(t)$ de grado n se puede escribir como combinación lineal de los n primeros polinomios de Legendre: $Q_n = c_0P_0 + \dots + c_nP_n$. Probar que $c_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 Q_n(t)P_k(t)dt$. Escribir $Q_4(t) = t^4$ como combinación lineal de P_0, P_1, P_2, P_3 y P_4 .
4. Comprobar que $t=1$ y $t=-1$ son puntos singulares regulares de la ecuación de Legendre, encontrar una solución por el método de Frobenius en torno a $t=1$ e indicar que tipo de serie se probaría para encontrar la segunda solución linealmente independiente. Comprobar que entre las soluciones que satisfacen $y(1)=1$ están P_0, P_1 y P_2 .
5. Resolver la ecuación de Hermite $y'' - 2ty' + 2py = 0$ por medio de series. Comprobar que si p es natural existe solución polinómica. Se llaman polinomios de Hermite $H_n(t)$ a aquellas soluciones polinómicas tales que los términos que contienen la potencia más alta de t son de la forma $2^n t^n$. Escribir los 4 primeros H_n y comprobar que vienen dados por la fórmula $H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2}$.
6. Comprobar: $J_{-n}(t) = (-1)^n J_n(t)$; $J_{1/2}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \sin t$; $J_{-1/2}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos t$; $J_{p-1}(t) + J_{p+1}(t) = \frac{2p}{t} J_p(t)$. Calcular $J_{5/2}(t)$.
7. Comprobar que el cambio $y = t^{-p}z$ transforma $ty'' + (2p+1)y' + ty = 0$ en $t^2z'' + tz' + (t^2 - p^2)z = 0$ y utilizarlo para: i) encontrar la solución de la ecuación de Bessel con $p=1/2$ sin utilizar series.

piloto 81-82



piloto 82-83



Había sólo Métodos y Electro en el primer cuatrimestre y Óptica y Cuántica en el otro. L y M se daba la teoría básica, proponiendo bibliografía clara (nacen mis apuntes) y se entregaban hojas de problemas (impresas en la multicopista de la facultad). El X se estudiaba. Se dividían J y V en dos los 70 alumnos (menos que los habituales) y se iban haciendo en clase los problemas en grupos, con el profesor resolviendo dudas. Había una semana de repaso de cada asignatura antes de su examen en sábado.