

problemas 1

1. Hallar las soluciones particulares que satisfacen los siguientes problemas de valores iniciales:

$$\begin{array}{lll} 2tyy' - 3y^2 + t^2 = 0 & t^2 + y^2 + t + ty' = 0 & y' = 1 + \cos^2(y-t) \\ y(1)=2 & y(1)=0 & y(0)=0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} y \operatorname{sen} t + y' \ln y = 0 & y' = \cos t - y - y^2 \frac{\operatorname{sen} t}{\cos^2 t} & ty' = 2y + t \\ y(0)=2 & y(0)=-1 & y(1)=2 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} e^y - 2t + te^y y' = 0 & 3y' + y = (1-2t)y^4 & t^2 y' = 2ty - y^2 \\ y(1)=0 & y(1)=1 & y(1)=-1 \end{array}$$

2. Probar que la ecuación lineal admite un factor integrante que sólo depende de t y utilizarlo para deducir la expresión de la solución general de una ecuación lineal.

3. Calcular la solución general de $y' = \frac{x+2y+2}{y-2x+6}$ convirtiéndola en una ecuación homogénea mediante un adecuado cambio de variables.

4. Dibujar el campo de direcciones y la forma aproximada de las soluciones de

$$y' = 1 - y^2 \quad y' = t - 2y \quad y' = t^2 + y \quad y' = \frac{y}{y-t} \quad y' = \frac{y-t}{y+t} \quad y' = (t^2 + y^2)^{-1}$$

5. Consideremos la familia de hipérbolas $xy = C$. Escribir la ecuación diferencial de la que son curvas integrales (eliminando C entre la ecuación dada y la ecuación obtenida derivándola). Hallar las trayectorias ortogonales a dichas hipérbolas, es decir, las líneas que las cortan en ángulo recto.

Resolver el mismo problema para las circunferencias $x^2 + y^2 = 2Cx$, las parábolas $y^2 + 2Cx = C^2$ y las cardioides $r = C(1 + \cos \theta)$.

6. Integrar numéricamente los problemas $\begin{cases} y' = t + y \\ y(0) = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} y' = t - y \\ y(0) = 2 \end{cases}$ entre 0 y 1 por Euler y Euler modificado para $h = 0.2$, $h = 0.1$ y $h = 0.05$. Resolver las ecuaciones y comparar con los valores exactos.

7. Calcular la ecuación de las curvas que verifican la siguiente propiedad: para cada tangente a la curva en un punto, el segmento comprendido entre ese punto y el eje y tiene su punto medio en el eje x .

8. Tenemos en el instante $t=0$ un gramo de material radiactivo A que sigue la ley de desintegración $x' = -2x$ y tal que al desintegrarse se transforma en otro material radiactivo B que sigue $y' = -ay$. Encontrar la función $y(t)$ que nos da la cantidad de material B existente en cada instante t y el valor máximo de esta función para los casos $a=1$, $a=2$ y $a=4$.

9. Supongamos ahora que tenemos un gramo de otro material radiactivo que se desintegra con una velocidad proporcional a la raíz cuadrada de la cantidad existente. Si al cabo de un año sólo queda $1/4$ de gramo ¿al cabo de cuántos años tendremos 0.1 gr.? Comprobar que este material se desintegra totalmente en un tiempo finito y calcular ese tiempo.

10. Una reacción química se produce por la interacción de una molécula de sustancia P con otra de sustancia Q para dar una molécula nueva X, $P + Q \rightarrow X$. Sea $x(t)$ la concentración de X en el tiempo t y sean p, q las concentraciones iniciales de P y Q respectivamente. Suponiendo que la reacción obedece a la ley de acción de masas, esto es, la variación de $x(t)$ es proporcional al producto de concentraciones de P y Q, hallar la expresión de $x(t)$ si $x(0)=0$.

11. Algunas enfermedades se difunden por medio de portadores, individuos que transmiten la enfermedad pero no la padecen. Sean x e y las densidades de portadores y de personas sanas en el instante t . Se supone que los portadores se retiran de la población de acuerdo con la siguiente ecuación: $x' = -mx$ y que la enfermedad se difunde con velocidad proporcional al producto xy : $y' = -nxy$. a) Determinar $x(t)$ si $x(0)=x_0$ e $y(t)$ si $y(0)=y_0$. b) Encontrar la proporción de población que no enferma (es decir el $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$). Determinar como varía esta cantidad con m y n .

12. Estudiar en qué subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ son lipschitzianas respecto de la y las funciones

$$f(t, y) = t^3 |y|, \quad g(t, y) = \begin{cases} t-y, & y > 0 \\ t, & y \leq 0 \end{cases}$$

13. Calcular el valor aproximado en $t=0.2$ de la solución de

$$\begin{array}{lll} y' = y^2 & y' = t^2 + y^2 & y' = t - |y| \\ y(0)=1 & y(0)=0 & y(0)=0 \end{array}$$

a partir de la segunda aproximación sucesiva de Picard y comparar con el valor obtenido por el método de Euler con $h=0.1$.

14. Estudiar existencia, unicidad y prolongabilidad, según los valores iniciales, de las soluciones de

$$\begin{array}{llll} y' = -\frac{2y}{t} + 4t & y' = y \cos^2 \sqrt{y} + t^2 & y' = y^2 + t^2 & y' = (t^2 + y^2)^{-1} \\ y' = ay^b & y' = 4y + \cos^2 y & y' = -ye^{-y^2} & y' = 1 - y^{-2} \\ y' = \frac{y}{y-t} & y' = \frac{y^3}{1+y^2} & y' = -\frac{y^3}{t^3} & y' = \begin{cases} -y \ln y, & y > 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases} \end{array}$$

15. Comprobar que $y' = t^{n-1} f(y + at^n)$ se convierte en una ecuación de variables separadas haciendo $z = y + at^n$. Resolver $y' = 2t(y+t)^{1/2}$. Resolverla después considerándola como ecuación de Riccati. ¿Está definida hasta ∞ la solución que satisface $y(1)=2$?

16. Resolver las siguientes ecuaciones y comprobar la dependencia continua de la solución con $y(0)=0$ respecto del parámetro a :

$$y' = -y + e^{at} \quad y' = \cos^2 ay$$

17. Probar que para que una solución $y(t)$ sea asintóticamente estable a la derecha de t_0 basta que las soluciones $y^*(t)$ que parten suficientemente cerca de ella estén definidas en $[t_0, \infty)$ y satisficieran $[y^*(t) - y(t)] \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ (este resultado no es cierto para ecuaciones de mayor orden).

18. Estudiar la estabilidad de la solución que satisface $y(1)=a$, según los valores de a :

$$y' = \operatorname{sen} y \quad y' = \frac{y-y^2}{t} \quad y' = 2yt^{-3} + \cos^3 t \quad y' = \begin{cases} y-y^2 & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y \leq 0 \end{cases}$$

19. Estudiar para qué valores de a y de b existe, es única, es prolongable hasta ∞ , depende continuamente de a y b , es estable la solución de

$$y' = (\sin t + 2bt)y + e^t, \quad y(0) = a.$$

20. Determinar la estabilidad de las soluciones con $y(1)=0$ e $y(1)=-3$

$$y' = -y^3 - (\cos^2 t)y \quad y' = -e^{\cos t}y + y^2 \quad y' = -\frac{y}{t} + y^2 \quad y' = 1 - \cos y.$$

21. Dibujar aproximadamente las soluciones de las siguientes ecuaciones y estudiar la prolongabilidad y estabilidad de la solución particular que satisface la condición inicial que se indica:

$$\begin{array}{llll} y' = t - |y| & y' = t^2 - y^2 + 1 & y' = y^3 - y^2 & y' = y - (2 + 2\cos t)y^2 \\ y(0) = -1 & y(0) = 1 & y(0) = -1 & y(0) = 1/3. \end{array} \quad y' = \frac{2y-t}{t-2} \quad y(\pi) = 0$$

22. Sea la ecuación $y' = y^2 - (\cos t)y$.

- Resolverla.
- Dibujar a grandes rasgos sus soluciones.
- Determinar para qué valores de a la solución con $y(0)=a$ es prolongable hasta ∞ .
- Estudiar la estabilidad de las soluciones con $y(0)=0$ e $y(0)=-1$.

23. Sea $y' = y^2 - ay^3$, $a > 0$. Estudiar existencia y unicidad. Dibujar aproximadamente las soluciones. Integrar explícitamente. Estudiar la prolongabilidad de las soluciones. Comprobar la dependencia continua del parámetro a cuando éste tiende a cero.

24. Dada la ecuación $(E_a) \quad y' = 1 - \frac{a}{t+y}$, $a > 0$.

- Estudiar existencia y unicidad.
- Integrar explícitamente.
- Dibujar aproximadamente las soluciones.
- Sea $y_a(t)$ la solución de (E_a) tal que $y_a(0)=1$. Estudiar el comportamiento de $y_a(t)$ cuando $a \rightarrow 0$.
- Estudiar la prolongabilidad de las soluciones y la estabilidad de la que verifica $y(0) = a/2$.

25. Sea $y' = \frac{t^2 - y}{t + y^2}$. Estudiar existencia y unicidad. Hallar la solución general. Dibujar aproximadamente las curvas integrales. Estudiar la estabilidad de la solución con $y(1)=0$.

26. Sea la ecuación $(E_a) \quad y' = a\frac{y}{t} + \frac{y^3}{t^3}$.

- Estudiar existencia y unicidad.
- Resolver por dos métodos diferentes para todos los posibles valores de a .
- Dibujar el campo de direcciones y hacer un dibujo aproximado de las soluciones en los casos $a=-1$, $a=0$, $a=1/2$ y $a=1$.
- Discutir la prolongabilidad de las soluciones verificando $y(1)=b$ para el caso $a=0$.
- Estudiar la estabilidad de todas las rectas solución que tenga (E_a) en los cuatro casos de c). Más en general, estudiarla para cualquier valor de a .
- Calcular el valor aproximado en $t=2.5$ para $a=0$ de la solución con $y(2)=1$ i) a partir de la segunda aproximación sucesiva, ii) por Euler con pasos $h=0.1$ y $h=0.05$. Comparar con el valor exacto.
- Comprobar que hay dependencia continua del parámetro a de la solución que satisface $y(1)=1$.

27. Sea $\frac{dy}{dt} = \frac{2ty}{y^2 - t}$. Hallar la solución general para todo a . Para $a=3$, dibujar isoclinas y soluciones. Precisar para todo a el número de curvas integrales que pasan por cada punto del plano.

28. Supongamos que el número de truchas en un estanque con alimento limitado viene regido por la ecuación logística $y' = by(M-y)$, $b, M > 0$. Supongamos ahora que un pescador

- saca truchas con una velocidad proporcional al número de truchas existentes

- saca truchas con velocidad uniforme.

Escribir las ecuaciones que rigen el número de truchas en presencia del pescador en ambos casos y discutir la estabilidad de las soluciones de equilibrio según los valores de las constantes que aparecen en las ecuaciones.

29. La ecuación $y' = y - e^{\sin t}y^2$ puede describir, en unidades adecuadas, la población de truchas en un estanque con un tope logístico que depende periódicamente del tiempo.

- Hallar la solución y_b que satisface $y(0)=b$. Comprobar que y_b es una función no constante de período 2π para algún valor de b . Estudiar, en función de b , la prolongabilidad y estabilidad. Dibujar las soluciones y describir la evolución de la población.
- Estudiar si las truchas se extinguen en presencia de cada uno de los dos tipos de pescadores del problema anterior, dependiendo de la población inicial y de la habilidad pescadora.

30. Hallar la solución de la ecuación logística $y' = by(M-y)$, $b, M > 0$ que satisface la condición inicial $y(t_0) = M/2$. A partir de la solución anterior encontrar una fórmula que de el valor de M en función de los valores de y en tres instantes sucesivos: $y_1 = y(t_1)$, $y_2 = y(t_1+h)$, $y_3 = y(t_1+2h)$. Suponiendo que la población española se rige por la ecuación logística y sabiendo que dicha población era en 1960, 1970 y 1980 de 30.9, 34.0 y 37.4 millones respectivamente, determinar la población hacia la que tenderá a estabilizarse el número de españoles.

31. Un cuerpo de masa m es lanzado con velocidad inicial v_0 a gran altura en la atmósfera terrestre. Suponemos que cae en línea recta y que las únicas fuerzas que actúan sobre él son la de la gravedad terrestre mg (suponemos g constante) y otra fuerza $-kv$ debida a la resistencia del aire. Hallar la velocidad límite del cuerpo cuando t tiende a ∞ .

Modificar el ejemplo anterior suponiendo que la resistencia del aire es proporcional a v^2 .

problemas 2

1. Estudiar la existencia y unicidad de las soluciones de

$$\begin{aligned} x' &= tx + \ln t & yy''' - y'y'' - 2y^2 &= \operatorname{tag} t & (1-t^2)y'' - 2ty'y' &= 0 \\ y' &= e^t x - y \end{aligned}$$

2. Sea
- $y^2 y'' = y'(yy' - 2)$
- . Hallar su solución general.

Considerar los problemas:

$$(P_b) \begin{cases} y^2 y'' = y'(yy' - 2) \\ y(0) = 1, y'(0) = b, b > 0. \end{cases}$$

Determinar los valores de b para los que (P_b) tiene solución única. Hallar la solución y_b de (P_b) en esos casos y el $\lim_{t \rightarrow \infty} y_b(t)$. ¿Es estable y_1 ?

3. Estudiar existencia y unicidad, resolver, comprobar la dependencia continua de valores iniciales y estudiar la estabilidad de la solución particular que se indica para las ecuaciones:

$$\begin{aligned} (1+t^2)y'' + 2ty' &= 2t^{-3} & 2ty'y'' &= (y')^2 - 1 \\ y(1) &= 1, y'(1) &= -1 & y(1) &= y'(1) = 1 \end{aligned}$$

4. Resolver:

$$\begin{array}{lll} \begin{aligned} x' &= x - 2y + 2 \\ y' &= 5x - y + 1 \\ x(0) &= y(0) = 0 \end{aligned} & \begin{aligned} x' &= 3x + y + te^{2t} \\ y' &= -x + y \\ x(0) &= 1, y(0) = -1 \end{aligned} & \begin{aligned} x' &= 3x + 2y \\ y' &= -6x - 4y + t \cos t \\ x(0) &= y(0) = 0 \end{aligned} \\ \begin{aligned} x' &= x - 2y - t \\ y' &= 2x - 3y - t \\ x(0) &= 1, y(0) = 1 \end{aligned} & \begin{aligned} x' &= 2x + y \\ y' &= 3x + 4te^{3t} \\ x(0) &= y(0) = 1 \end{aligned} & \begin{aligned} x' &= -x - y \\ y' &= 2x - y \\ x(0) &= 1, y(0) = 2 \end{aligned} \end{array}$$

5. Hallar la solución general de

$$\begin{array}{lll} \begin{aligned} x' &= x \\ y' &= x + 2y \\ z' &= x - z \end{aligned} & \begin{aligned} x' &= y + z \\ y' &= x + z \\ z' &= x + y \end{aligned} & \begin{aligned} x' &= x + y + z \\ y' &= 2x + y - z \\ z' &= -y + z \end{aligned} \end{array}$$

6. Hallar la solución general:

$$\begin{array}{lll} \begin{aligned} y'' + y &= t \operatorname{sen} 2t - 1 \\ t^2 y'' + 3ty' + y &= \ln t \\ 3y' &= 1 \end{aligned} & \begin{aligned} y'' + 2y'' + y' &= t \\ t^2 y'' - 2y' &= t^3 e^t \\ y'' - y &= 2(1 + e^t)^{-1} \end{aligned} & \begin{aligned} y'' + 2y' + 2y &= te^{-t} \\ t^3 y'' + t^2 y' - 2ty' + 2y &= 2t^4 \\ (t+1)y'' - y' &= (t+1)^2 \end{aligned} \end{array}$$

7. Hallar la solución particular que se indica y precisar si es estable o no:

$$\begin{array}{lll} \begin{aligned} \{y'' - 2y' + 2y &= e^t \cos t \\ y(0) &= y'(0) = 0 \end{aligned} & \begin{aligned} \{y'''' - 16y &= 8t^2 \\ y(0) &= 1, y'(0) = -2 \\ y''(0) &= 3, y'''(0) = -8 \end{aligned} & \begin{aligned} \{y'''' + 2y'' + 5y' &= 5t \\ y(0) &= y'(0) = 0, y''(0) = 1/5 \end{aligned} \\ \begin{aligned} \{y'''' + y' - 10y &= 36te^{-t} \\ y(0) &= 0, y'(0) = -3, y''(0) = 2 \end{aligned} & \begin{aligned} \{y'' + 2ty' &= 2t \\ y(0) &= y'(0) = 1 \end{aligned} & \begin{aligned} \{t^2 y'' + 5ty' + 4y &= t^{-2} \\ y(1) &= y'(1) = 0 \end{aligned} \end{array}$$

8. Resolver los sistemas del problema 4 convirtiendo cada uno en una ecuación de 2º orden tras eliminar alguna de las dos variables entre las dos ecuaciones.

9. Determinar si son estables las soluciones de la ecuación

$$y'''' + y''' + 3y'' + 2y' + 3y = 0$$

10. Sea
- $x_a(t)$
- la solución de
- $x'''' + 5x'' + 2ax' + ax = -8e^{-2t}$
- con
- $x(0)=1, x'(0)=-1, x''(0)=9$
- . Determinar si son estables
- $x_2(t), x_0(t)$
- y
- $x_{-2}(t)$
- . Hallar
- $x_4(t)$
- .

11. Sea
- $x' = y - 2x$
- Determinar para qué valores de
- a
- es asintóticamente estable. ¿Es estable para
- $a=0$
- ?
-
- $y' = -z$
- Calcular
- $z(t)$
- para
- $a=4$
- si
- $x(0)=y(0)=0, z(0)=1$
- .
-
- $z' = ax - 5z$

12. Sea
- $x'' + cx' + a^2x + y = 0$
- Determinar para qué valores de
- a
- y
- c
- el sistema es asintóticamente estable.
-
- $y'' + cy' + a^2y + x = 0$
- . Calcular para
- $a=1$
- y
- $c=0$
- la solución con
- $x(0)=y(0)=1, x'(0)=y'(0)=0$
- . ¿Es estable esta solución?

13. Sea
- y_a
- la solución de
- $ty'' + ay' = 1$
- con
- $y_a(1)=y'_a(1)=0$
- . Calcular
- y_a
- para todo valor de
- a
- . ¿Es
- y_a
- función continua de
- a
- ? Discutir la estabilidad de
- y_a
- .

14. Hallar la solución general sabiendo que la
- y_1
- que se indica es solución de la homogénea:

$$\begin{aligned} (1-t)y'' + ty' - y &= e^t(1-t)^2 & (t^2-1)y'' - 2y &= 0 & ty'' - (t+1)y' + y &= t^2 e^t \\ y_1 &= e^t & y_1 &= t^2 - 1 & y_1 &= e^t \end{aligned}$$

15. Calcular la matriz fundamental canónica del sistema asociado a cada una de las siguientes ecuaciones:

$$y'' + 2y' + y = 0 \quad y''' + y'' + y' + y = 0 \quad 2(t+1)^2 y'' + 3(t+1)y' - y = 0$$

16. Encontrar una matriz
- A
- tal que
- $\begin{pmatrix} e^{it} & -e^{-t} \\ e^{it} & -2e^{-t} \end{pmatrix}$
- sea solución de
- $X' = AX$
- .

17. Sean
- y_1, y_2
- soluciones de
- $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$
- y llamemos
- $w(t) = |W(y_1, y_2)(t)|$
- .

Calcular $w'(t)$ y eliminar de la fórmula para w' los términos con derivadas segundas utilizando la ecuación. Concluir que

$$w(t) = w(0)e^{-\int_0^t a(s)ds} \quad (\text{fórmula de Abel})$$

18. Supongamos que
- y_1
- es una solución de
- $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$
- con
- $y_1(t) \neq 0$
- para todo
- t
- . Encontrar
- y_2
- solución linealmente independiente usando la fórmula de Abel y la relación
- $(y_2/y_1)' = w(t)/y_1^2$
- . Aplicar lo anterior a
- $t^2 y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 0$
- sabiendo que
- $y=t$
- es una solución.

19. Resolver
- $t^2(t+3)y'' - 3t(t+2)y' + 6(1+t)y' - 6y = 0$
- sabiendo que
- $y_1 = t^2$
- es solución de la ecuación.

20. Sea
- $t^3 y'''' - 3t^2 y'' + 6ty' - 6y = f(t)$
- . Hallar una matriz fundamental del sistema equivalente y utilizarla para encontrar una fórmula para la solución general de la ecuación no homogénea.

21. Encontrar una fórmula para la solución general de
- $y'''' + y' = f(t)$
- . Hallar dicha solución general si i)
- $f(t)=1$
- , ii)
- $f(t)=\cos 2t$
- . Estudiar en cada caso el número de soluciones
- 2π
- periódicas existentes. En general, para cualquier
- $f(t)$
- 2π
- periódica dar criterios para determinar el número de soluciones
- 2π
- periódicas.

22. Determinar si existen soluciones
- 2π
- periódicas y si son o no estables:

$$y' = y \cos^2 t \quad y'' + y = \cos^3 t \quad y'' - y' + 2y = \operatorname{sen} t \quad 4y'' + y = \cos t$$

23. Resolver los sistemas del problema 4 y las ecuaciones de coeficientes constantes del 7 utilizando transformadas de Laplace.

24. Resolver:

$$\begin{aligned} y'' + y &= u_{\pi}(t) & y'' + 4y &= d(t-\pi) - d(t-2\pi) & y'' - y &= 2d(t-1) & y' + y &= u_1(t) \left(\frac{1}{e} - e^{-t} \right) \\ y(0) &= 1, y'(0) = 0 & y(0) &= 0, y'(0) = 0 & y(0) &= 1, y'(0) = 0 & y(0) &= 1 \end{aligned}$$

25. Resolver $y'' + y' = \begin{cases} t+1 & 0 \leq t < 1 \\ 3-t & 1 \leq t \end{cases}$ con $y(0) = -1, y'(0) = 0$
 $y'' + y = \begin{cases} \text{sent} & 0 \leq t < 3\pi \\ 0 & 3\pi \leq t \end{cases}$ con $y(0) = y'(0) = 0$

26. Sea $y''' + y'' = \begin{cases} 6t & 0 \leq t < 1 \\ 0 & 1 \leq t \end{cases}$ con $y(0) = -1, y'(0) = 3, y''(0) = -6$
 Hallar su solución y determinar si es o no estable.

27. Sea $y'' - y' = f_n(t)$ con $f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ ne^{n-t} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$
 Resolver y estudiar lo que sucede cuando $n \rightarrow \infty$.

28. Resolver: $\begin{aligned} x' &= -y + 1 - u_{\pi}(t) & x' &= -x + y & x' &= -y + tu_1(t) \\ y' &= x + 1 - u_{\pi}(t) & y' &= x - y + 2d(t-1) & y' &= x - 2y \\ x(0) &= y(0) = 0 & x(0) &= y(0) = 0 & x(0) &= -e, y(0) = 0 \end{aligned}$
 Dibujar aproximadamente $x(t)$ e $y(t)$ para $t \geq 0$.

29. Resolver $\begin{cases} x' = z + e^t - 1 \\ y' = x + y + e^t u_1(t) \\ z' = z - 1 \end{cases}$ con $x(0) = y(0) = z(0) = 0$

30. Resolver $y'' + 2cy' + y = d(t-1)$, $c > 0$, con $y(0) = y'(0) = 0$ distinguiendo los casos $c < 1$, $c = 1$ y $c > 1$. Escribir el resultado para $c = 0$ prescindiendo de funciones paso, dibujar la solución y comentarla físicamente.

31. a) Resolver $y'' + 2y' + 2y = d(t-\pi)$ $y(0) = y'(0) = 0$ mediante transformadas de Laplace.

b) Probar, sin utilizar transformada de Laplace, que la solución de $y'' + 2y' + 2y = f(t)$, $y(0) = y'(0) = 0$ es $y(t) = \int_0^t e^{-(t-s)} f(s) \sin(t-s) ds$

y comprobar, haciendo $f(t) = d(t-\pi)$, que se obtiene la solución calculada en a).

32. a) Consideremos la ecuación integral de Volterra

$$y(t) + \int_0^t k(t-s)y(s)ds = f(t)$$

donde f y k son conocidas y hay que determinar y . Tomando transformadas de Laplace obtener una expresión para $L(y)$ en términos de $L(f)$ y $L(k)$.

b) Consideremos $y(t) + \int_0^t (t-s)y(s)ds = \sin 2t$.

i) Resolverla utilizando transformadas de Laplace

ii) Comprobar que es equivalente al problema $y'' + y = -4\sin 2t$

$y(0) = 0, y'(0) = 2$. Resolver este problema y verificar que las soluciones coinciden.

33. Sea $y'' + y = f(t, c)$, $c > 0$ donde a) $f(t, c) = \text{sent } t$,

b) $f(t, c) = u_{\pi/c}(t) - u_{2\pi/c}(t) + u_{3\pi/c}(t) - \dots$,

c) $f(t, c) = d(t-2\pi/c) + d(t-4\pi/c) + \dots$.

En los tres casos:

i) Hallar la solución general para todo valor de c .

ii) Estudiar la existencia de soluciones 2π -periódicas si $c=1$ y $c=2$.

iii) Dibujar para $c=1$ y $c=2$ la solución con $y(0) = y'(0) = 0$ comparando con $f(t, 1)$ y $f(t, 2)$.

iv) Interpretar físicamente los resultados anteriores.

34. Sea $y'' + \frac{1}{4}y' + y = \text{sent } t$, $c > 0$.

Responder para esta ecuación a las cuestiones i) y ii) del problema anterior.

Determinar la solución periódica $y^*(t, c)$ a la que tienden a acercarse todas las soluciones y escribirla para cada valor de c en la forma $y^* = A \sin(ct + \theta)$. Estudiar como varía A en función de c . ¿Para qué valor de c se obtiene la amplitud máxima? Interpretarlo físicamente.

35. Sean las ecuaciones $y'' + y = |\text{sent } t|$; $y'' + 4y = |\text{sent } t|$.

Estudiar la existencia de soluciones periódicas.

Hallar y dibujar la solución que satisface $y(0) = y'(0) = 0$.

36. Dibujar el mapa de fases:

$$\begin{array}{llll} x''+4x'+4x=0 & x''=x-x^3 & x'=2x & x'=x^2-2xy \\ y'=y(1-y)+x^2 & & y'=y(1-y)+x^2 & y'=y^2-2xy \\ x''=x[(x')^2-1] & x''=(1-x^2)x'-x & x''+x^2-x^3=0 & x''+x'+\operatorname{sen}x=0 \\ x'=y-2xy & x'=x^3y & x'=y(x+1) & x'=y-y^2 \\ y'=-2x+y^2 & y'=-y-x^2y^2 & y'=x(1+y^3) & y'=x-x^2 \\ x'=2y+2xy & x'=8x-y^2 & x'=ye^x & x'=xy \\ y'=2x-x^2y^2 & y'=-6y+6x^2 & y'=e^{x-1} & y'=x+y^2 \end{array}$$

37. Dibujar tras escribir en coordenadas polares:

$$\begin{array}{lll} x'=y+x^3+xy^2 & x'=y-x(x^2+y^2-1) & x'=(x-y)(1-x^2-y^2) \\ y'=-x+x^2y+y^3 & y'=-x-y(x^2+y^2-1) & y'=(x+y)(1-x^2-y^2) \end{array}$$

38. Dibujar el mapa de fases (el uso de polares es útil):

$$\begin{array}{l} x' = x(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-9) - y(x^2+y^2-2x-8) \\ y' = y(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-9) + x(x^2+y^2-2x-8) \end{array}$$

39. Dibujar los mapas de fases de A) $x'=y$ B) $x'=(x^2+y^2)y$
 $y'=-x$ $y'=-x(x^2+y^2)$
 ¿Qué relación existe entre las soluciones de A) y B)? Resolverlos.

40. Sea $V(x,y) = 2x^2 - 2xy + 5y^2 + 4x + 4y + 4$. Dibujar las curvas de nivel de V y el mapa de fases de $x'=-V_x$; $y'=-V_y$.

41. Estudiar los sistemas autónomos lineales exactos sólo con las técnicas de los sistemas exactos.

42. Estudiar los mapas de fases de los sistemas lineales autónomos de segundo orden que tienen algún autovalor cero.

43. Dibujar el mapa de fases de $x'=x^2$
 $y'=x-y+x^2$ basándose en la ecuación de las órbitas y en el dibujo de las curvas integrales de la ecuación asociada $(E) \frac{dy}{dx} = (x-y+x^2)x^{-2}$.

Determinar la estabilidad del origen en el sistema original y la de la solución que satisface $y(1)=1$ en (E) .

44. Sea (A) $2x''-(x')^2+x(x-2)=0$. Hallar la ecuación de sus órbitas. Dibujar el mapa de fases. Sea (E) la ecuación $v'=f(x,v)$ que se ha debido resolver para hallar las órbitas. Estudiar existencia y unicidad para (A) y (E). Comprobar que existen dos soluciones de (E) que pasan por el origen y que existe una única de (A) con $x(0)=x'(0)=0$. ¿Es contradictorio? Estudiar la estabilidad de la solución de (A) con: i) $x(0)=x'(0)=0$, ii) $x(7)=2, x'(7)=0$, iii) $x(-1)=1, x'(-1)=-1$.

45. Probar que si el origen es centro para la aproximación lineal y
 o bien $f(x,y) = -f(x,y)$, $g(x,y) = g(x,y)$
 o bien $f(-x,y) = f(x,y)$, $g(-x,y) = -g(x,y)$
 entonces el origen es centro también para la no lineal.

46. Sea $x''=g(x)$ y supongamos que en x_0 la gráfica de la función potencial tiene un punto de inflexión con tangente horizontal. Describir el mapa de fases cerca de $(x_0, 0)$.

47. Calcular el valor de a para el que las órbitas de $x''=x^2-4x+a$ cambian radicalmente, dibujando el mapa de fases en cada caso.

48. Probar que son periódicas las soluciones de $x'=y^m$
 $y'=-x^n$, m, n impares.

49. Dibujar el mapa de fases de $x'=2xy$
 $y'=1-x^2+y^2$.
 Estudiar qué soluciones están definidas para todo t de $\mathbb{R}$. Hallar las curvas ortogonales a las órbitas del sistema.

50. Sea g con $g(0)=0$, $xg(x)>0$ si $x \neq 0$ y $(h) \int_0^x g(s)ds \rightarrow \infty$ si $x \rightarrow \pm\infty$. ¿Cuántas soluciones periódicas tiene $x''+g(x)=0$? ¿Qué pasa si se suprime la hipótesis (h)?

51. Clasificar los puntos singulares de $(E) x''=1-x^2-kx'$, $k \geq 0$, en función de los valores de k . Dibujar aproximadamente el mapa de fases para $k=0$, $k=1$ y $k=3$. Interpretar físicamente las órbitas.

52. Sea $x''+x'-2x+ax^2=0$. Clasificar los puntos singulares y dibujar el mapa de fases según los valores de a . Interpretar físicamente.

53. Clasificar, según los valores de w , los puntos singulares de la ecuación del péndulo rotatorio $x''=\operatorname{sen}x(-1+w^2\cos x)$. Dibujar el mapa de fases para $w=0$ (péndulo simple) y para $w=\sqrt{2}$.

54. Los sistemas $x'=x(3-x-2y)$ $x'=x(3-2x-y)$
 $y'=y(3-y-2x)$ $y'=y(3-2y-x)$
 pueden describir la evolución de la población de dos especies animales en competición (x y y son esas poblaciones expresadas en alguna unidad adecuada). Dibujar en ambos casos el mapa de fases e interpretarlos comparando los resultados.

55. Describa el sistema $x'=x(2-x-y)$
 $y'=y(3-2x-y)$ la evolución de una población de truchas (x) y salmones (y) en un mismo estanque. Dibujar el mapa de fases e interpretarlo. Si un pescador pesca sólo truchas con una velocidad proporcional al número existente, indicar como influye en la evolución de ambas poblaciones su mayor o menor habilidad.

56. $x'=x(1-y)$ describe la evolución de dos poblaciones animales en
 $y'=y(1+x)$ relación predadora (x moscas, y murciélagos, por ejemplo). Dibujar e interpretar el mapa de fases. Comprobar que (según este modelo) es contraproducente emplear insecticida si mata también una proporción fija de los murciélagos existentes.

57. Un punto se mueve en el eje x siguiendo la ecuación $x''=-x^{-2}$. Dibujar el mapa de fases e interpretarlo. Si el punto se encuentra inicialmente en reposo a la derecha y a una distancia x_0 del origen, calcular el tiempo que tarda en llegar al origen.

58. Un péndulo se desplaza un ángulo $\alpha \in (0, \pi)$ de su posición de equilibrio estable y se abandona. Hallar el periodo de la oscilación en función de una integral (suponer $g/l=1$).

59. Una partícula se mueve por el eje x según $x''=-x(x^2+9)^{-2}$.
 a) Dibujar e interpretar el mapa de fases. Si la partícula pasa por el origen con velocidad $v=1/3$, ¿qué velocidad tiene cuando pasa por $x=4$? ¿cuánto tiempo tarda en llegar a $x=4$?
 b) Sea $\frac{dv}{dx} = -x(x^2+9)^{-2}$. ¿Alguna de sus soluciones $v(x)$ es asintóticamente estable? ¿es estable la que satisface $v(0)=1/3$?

60. Sean $(E) x''=g(x, x')$ y $(O) v \frac{dv}{dx} = g(x, v)$ para las tres funciones
 a) $g(x, v)=4x-3v$; b) $g(x, v)=x(1-v^2)$; c) $g(x, v)=2x^3$.
 i) Resolver O y dibujar el mapa de fases de (E) .
 ii) Estudiar existencia y unicidad para (E) y (O) .
 iii) Si en $t=0$ es $x=x'=1$, ¿en qué instante es $x=10$?
 iv) Estudiar la estabilidad de la solución de (O) con $v(1)=1$.
 v) Estudiar la prolongabilidad de la solución $x(t)$ de (E) que satisface $x(0)=0$, $x'(0)=2$.

61. Sea $\frac{dy}{dx} = x^{1/2}y^{-1}$; dibujar algunas isoclinas, hallar su solución general y dibujar sus curvas integrales. ¿Es estable la solución que satisface $y(1/9)=2/9$?

Sea $\frac{dx}{dt} = x^{1/2}$; hallar la solución con $x(2)=1/9$, $x'(2)=2/9$. ¿Existe más de una solución satisfaciendo $x(0)=x'(0)=0$? Sea $\bar{x}(t)$ la solución con $\bar{x}(0)=2$, $\bar{x}'(0)=-1$, ¿existe algún $T > 0$ tal que $\bar{x}(T)=2$? Dibujar aproximadamente $\bar{x}(t)$.

62. Sea (E) $y''=2y'y$. Hallar la solución y_b de (E) que satisface $y(0)=0$, $y'(0)=b$. Dibujar el mapa de fases de (E). ¿Para qué valores de b está definida y_b en todo $[0, \infty)$? ¿Es estable y_0 ?

63. Estudiar la estabilidad de la solución $x=0$ de i) $x''+ax'+e^x=1$, ii) $x''=a \sin x \cos x$, iii) $x''+ax^n=0$, $n \in \mathbb{N}$, según los valores de a .

64. Sea $x'=ax-2y+x^3$
 $y'=2x+ay+2x^2y+y^3$. Escribir en polares y clasificar el origen según los valores de a . Dibujar el mapa de fases para $a=-1$ e identificar las órbitas asociadas a soluciones definidas para todo t .

65. Sea $x'=2x-4y+ax^3+by^2$ Elegir a y b (no ambos cero) para $y'=2x-2y$ que haya un centro en el origen y dibujar el mapa de fases. Identificar en él órbitas correspondientes a soluciones i) definidas para todo t , ii) inestables.

66. Sean los sistemas (S_a) $x' = ax$
 $y' = 2ay - y^2$.

i) Hallar la ecuación de sus órbitas y determinar la curva del plano xy en la que dichas órbitas poseen puntos de inflexión.
ii) Dibujar los mapas de fases de (S_a) para $a > 0$, $a = 0$ y $a < 0$.
iii) Hallar la solución de (S_a) con $x(0)=y(0)=2a$. ¿Es estable? ¿Lo es la órbita $y(x)$ que define, vista como solución de la ecuación diferencial de las órbitas?

67. Sea $x'=y^a$
 $y'=-x^a$ $a > 0$. Hallar la ecuación de las órbitas y dibujarlas aproximadamente. ¿Para qué valores de a la solución del sistema con $x(0)=y(0)=1$ tiende a infinito en tiempo finito?

68. a) Sea la ecuación: $\frac{dy}{dx} = \frac{4y^2 - 4x^2}{3xy}$.

Resolverla y dibujar las isoclinas y curvas integrales.

b) Sea el sistema: $x' = 3xy$
 $y' = 4y^2 - 4x^2$.

Estudiar la prolongabilidad de las soluciones con i) $x(0)=1, y(0)=2$
ii) $x(0)=1, y(0)=0$

69. Sea $x''=x^3-7x^2+10x$. Dibujar su mapa de fases y determinar para qué valores de a es periódica la solución con $x(0)=a$, $x'(0)=0$.

70. Sea $x'=y$
 $y'=-x(x^2+y^2)$. Hallar la órbita que pasa por $(-1, 0)$. ¿Es periódica la solución del sistema que satisface $x(\pi)=-1, y(\pi)=0$?

71. Clasificar los puntos singulares de los sistemas:

$$\begin{array}{ll} x' = x^3 - y & x' = x^2 - y \\ y' = x + y^3 & y' = xe^y \end{array}$$

72. Estudiar para qué valores de A , B y C las siguientes funciones son definidas positivas en un entorno del origen:

$$U = Ax^2 + Bxy + Cy^2 \quad U = Ax^4 + Bx^2y^2 + Cy^2 \quad U = Ax^3 + By^3 \quad U = Ax^2 + Cy^2 + Bx^3$$

73. Estudiar la estabilidad del origen con funciones de Lyapunov:

$$\begin{array}{llll} x' = 2y^3 & x' = -x^3 + xy^2 & x' = y^3 + x^3 - x^4 & x'' + (x')^3 + 2x = 0 \\ y' = -xy^2 - y^3 & y' = -4x^2y - y^3 & y' = -x + y & \end{array}$$

74. Considérese el péndulo rotatorio del problema 47 y supongamos ahora que hay rozamiento: $x'' = \sin x(-1 + w^2 \cos x) - av$, $a > 0$.

Estudiar la estabilidad de la solución $x=0$ (para $w=1$ hacer uso de una función de Lyapunov para probar que (al menos) es estable).

75. Construir una teoría para el dibujo de órbitas de ecuaciones autónomas de primer orden $y'=f(y)$ en la "recta de fases". Estudiar el caso particular en que f es 2π -periódica, representando entonces el "mapa de fases" en la circunferencia unidad.

problemas 3

1. Decir si las siguientes ecuaciones tienen puntos singulares o no y clasificarlos:

$$\begin{array}{lll} t^2 y'' - 2y = 0 & (2t-t^2)y'' + (1-3t)y' - y = 0 & ty'' + 2y' + 4y = 0 \\ (t \operatorname{sen} t)y'' + 3y' + ty = 0 & ty'' + e^t y' + (3 \cos t)y = 0 & t^2 y'' + 2y' + 4y = 0 \end{array}$$

2. Resolver por medio de series en torno a $t=0$:

$$\begin{array}{lll} (1+t^2)y'' + 2ty' - 2y = 0 & 2t^2 y'' + (t^2 - t)y' + y = 0 & y'' - e^t y = 0 \\ ty'' + (1-t)y' + y = 0 & 2ty'' + y' - y = 0 & y'' + t^2 y = 0 \\ (1-t^2)y'' - ty' + 4y = 0 & t^2 y'' + 2t^2 y' - 2y = 0 & y'' + (t-2)y = 0 \\ t^2 y'' - 5ty' + 3(t+3)y = 0 & (t^2 - 1)y'' + 3ty' + ty = 0 & y'' + ty' + y = 0 \\ t^2 y'' - ty' - (t^2 + \frac{5}{4})y = 0 & 2t^2 y'' - ty' + (t-5)y = 0 & y'' + t y = 0 \end{array}$$

3. Estudiar las soluciones en $t=0$ de las ecuaciones

$$ty'' + (1-t)y' + py = 0 \text{ (Laguerre)} \quad (1-t^2)y'' - ty' + p^2 y = 0 \text{ (Tchebycheff)}$$

y calcular para qué valores de p las soluciones son polinomios.

4. Resolver la ecuación de Hermite $y'' - 2ty' + 2py = 0$ por medio de series. Comprobar que si p es natural existe solución polinómica. Se llamen polinomios de Hermite $H_n(t)$ a aquellas soluciones polinómicas tales que los términos que contienen la potencia más alta de t son de la forma $2^n t^n$. Escribir los 4 primeros H_n y comprobar que vienen dados por la fórmula

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2}.$$

5. Demostrar que $(\ln t)y'' + \frac{1}{2}y' + y = 0$ tiene un punto singular regular en $x=1$. Calcular los tres primeros términos del desarrollo en serie correspondiente a la raíz mayor del polinomio indicial. Indicar donde converge la serie obtenida.

6. Sea $t^2 y'' + 2t^2 y' + (t^2 + \frac{1}{4})y = 0$. Resolver por series en torno a $t=0$. Sumar las series. Conjeturar un cambio de variable que conduzca a una ecuación de Euler y utilizarlo para comprobar la solución.

$$\begin{array}{ll} 7. \text{ Sean } (1+t^2)y'' - 2y = 1 & t^2 y'' - 2ty' + (2t^2)y = t^3 \cos t \\ & t^2 y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 0 \quad t^2 y'' - 2ty' + (2-t^2)y = 2t^3 \operatorname{cht} \end{array}$$

Hallar la solución general de la homogénea en forma de series en torno a $t=0$. Hallar la solución general en términos de funciones elementales.

8. Calcular la solución general en forma de series de $y'' - 2ty' = 0$. Resolverla por otros métodos y comparar. Estudiar la estabilidad de la solución $y=0$.

9. Hallar una solución linealmente independiente de P_0 y P_1 para la ecuación de Legendre con $n=0$ y $n=1$, sin recurrir a series. Desarrollar por Taylor estas soluciones y comprobar que coinciden con las series que nos proporciona la fórmula general de las soluciones.

10. Comprobar que $t=1$ y $t=-1$ son puntos singulares regulares de la ecuación de Legendre, encontrar una solución por el método de Frobenius en torno a $t=1$ e indicar que tipo de serie se probaría para encontrar la segunda solución linealmente independiente. Comprobar que entre las soluciones que satisfacen $y(1)=1$ están P_0 , P_1 y P_2 .

11. Cualquier polinomio $Q_n(t)$ de grado n se puede escribir como combinación lineal de los $n+1$ primeros polinomios de Legendre:

$$Q_n = c_0 P_0 + \dots + c_n P_n; \text{ probar que } c_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 Q_n(t) P_k(t) dt.$$

Escribir $Q_4(t) = t^4$ como combinación lineal de $P_0, \dots, P_4$.

12. Deducir de la fórmula de Rodrigues para los polinomios de Legendre: $n P_n = t P_n' - P_{n-1}'$; $(n+1) P_{n+1} - (2n+1) t P_n + n P_{n-1} = 0$.

13. Comprobar: $J_{-n} = (-1)^n J_n$; $(t^p J_p)' = t^p J_{p-1}$; $(t^{-p} J_p)' = -t^{-p} J_{p+1}$

$$J_{p-1} + J_{p+1} = \frac{2p}{t} J_p; \quad J_p' = \frac{1}{2} (J_{p-1} - J_{p+1}); \quad J_{1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \operatorname{sent};$$

$$J_{-1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos t. \text{ Calcular } J_{5/2}.$$

14. Obtener la función de Bessel J_0 siguiendo los pasos indicados:
a) Convertir la ecuación de Bessel de orden 0 mediante transformadas de Laplace en una ecuación de primer orden para $Y(s)$.
b) Resolver esta segunda ecuación y desarrollar el resultado en serie de potencias de s .
c) Calcular, término a término, la transformada inversa de $Y(s)$ (suponiendo que se puede).

15. Comprobar que el cambio $y = t^{-p} z$ transforma $ty'' + (2p+1)y' + ty = 0$ en $t^2 z'' + tz' + (t^2 - p^2)z = 0$. Utilizar dicho cambio para:

i. encontrar la solución de la ecuación de Bessel con $p=1/2$ sin utilizar series,
ii. resolver $ty'' + 2y' + ty = 0$.

$$16. \text{ Calcular la solución de } t^2 y'' + ty' + (t^2 - \frac{1}{4})y = t^{3/2} \\ y(1)=1, y'(1)=-1/2$$

$$17. \text{ Sea } t^2 y'' + (3t-1)y' + y = 0.$$

Comprobar que $t=0$ es punto singular. ¿Es regular?

Hallar una solución en forma de serie de potencias $t^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ y discutir su significado.

18. Resolver por medio de series las ecuaciones del problema 10 de p2 y comprobar luego con el resultado obtenido por métodos elementales.

$$19. \text{ Sea } (1-t^2)y'' - ty' + y = 1-t^2.$$

Hallar la solución general de la homogénea por medio de series y la solución general de la no homogénea en términos de funciones elementales. Comprobar el resultado haciendo el cambio $t = \operatorname{sens} s$.

20. Sea $t^2 y'' - 3ty' + 3y = t^3$. Hallar la solución general de la no homogénea. Hallar la solución general de la homogénea utilizando series de potencias centradas en i) $t=0$, ii) $t=1$.

$$21. \text{ Sea } t(t-1)y'' + y' - \lambda y = 0.$$

a) Determinar para qué valores de λ tiene solución polinómica.

Probar que todas las soluciones están acotadas en $t=0$.

b) Probar que para $\lambda=2$ existen soluciones que tienden a 0 cuando t tiende a ∞ i) calculando la solución general, ii) haciendo $x = t^{-1}$ y analizando la ecuación resultante en $x=0$.