5. Características. Problemas clásicos en EDPs

En las EDOs planteábamos problemas de valores iniciales, que casi siempre tenían solución única. Para resolverlos (las pocas veces que se podía) solíamos hallar primero la solución general e imponer después una o varias condiciones, dependiendo del orden de la ecuación, en un t_o dado. En este capítulo intentamos ver cuáles son los problemas análogos para las EDPs. La variedad y complicación será mucho mayor que en las ordinarias.

Comenzamos en 5.1 tratando las EDPs **lineales de primer orden** en dos variables, es decir, ecuaciones del tipo:

$$[1] \quad A(x,y)\, u_y + B(x,y)\, u_x = C(x,y)\, u + D(x,y) \ ,$$

que no tienen muchas aplicaciones físicas, pero que plantean de forma sencilla los problemas de las de segundo orden. Veremos que pueden resolverse si es posible integrar una EDO de primer orden, cuyas curvas integrales son llamadas **características** de [1]. En la solución general de [1] aparecerá una función p arbitraria (como en el sencillo ejemplo $u_x=0$, de solución $u(x,y)=p(y)$, para cualquier p). Para fijar esta p fijaremos el valor de la solución a lo largo de una curva G del plano xy (**problema de Cauchy**) y la solución quedará determinada de forma única si G no es tangente a las curvas características.

En la sección 5.2 se intentan resolver las EDPs **lineales de segundo orden** en dos variables:

$$[2] \quad A\, u_{yy} + B\, u_{xy} + C\, u_{xx} + D\, u_y + E\, u_x + F\, u = G \ ,$$

con u y los coeficientes funciones de x e y. Trataremos de escribirlas, mediante cambios de variables, en la forma más sencilla posible (**forma canónica**). Esto nos llevará a la clasificación de [2] en hiperbólicas, parabólicas y elípticas. Otras curvas características volverán a jugar un papel esencial. En unos pocos casos, a partir de la forma canónica, se podrá calcular la solución general, que dependerá de dos funciones arbitrarias.

Para aislar una única solución de [2] podría plantearse un problema de Cauchy análogo a los de [1]. Esto puede servir para la ecuación de ondas, pero carece de sentido físico y plantea problemas matemáticos para las otras ecuaciones clásicas. Las condiciones iniciales y de contorno ligadas a un problema físico real son muy diferentes para cada ecuación. Incluso a una misma ecuación aparecen asociadas condiciones de diferentes tipos. No existe una teoría general de EDPs que pueda abarcar todas las posibilidades. En cada caso habrá que comprobar que el problema esté "bien planteado", es decir, que tiene **solución única que depende continuamente de los datos** (lo que era en las EDOs de comprobación trivial). La sección 5.3 se dedica a plantear diferentes problemas asociados a las ecuaciones clásicas y a estudiar la unicidad de algunos de ellos.

5.1. EDPs lineales de primer orden

Sea [1] $\boxed{A(x,y)\,u_y + B(x,y)\,u_x = C(x,y)\,u + D(x,y)}$, $u = u(x,y)$.

Para resolverla consideramos la EDO de primer orden:

$$[2] \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{A(x,y)}{B(x,y)}} \quad \textbf{ecuación característica}$$

Suponemos A y B regulares y que no se anulan simultáneamente en una región del plano. [2] tendrá en ella unas curvas integrales:

$$[3] \quad \boxed{\xi(x,y) = K} \quad \textbf{curvas características} \text{ de [1]}$$

(se podrán hallar explícitamente si [2] es separable, lineal, exacta…)

Veamos que el cambio de variable $\begin{cases}\xi = \xi(x,y)\\ \eta = y\end{cases}$ (o bien $\eta = x$)

lleva [1] a una ecuación en las nuevas variables (ξ,η) en la que no aparece u_ξ y que es resoluble elementalmente. En efecto:

$$\begin{cases}u_y = u_\xi\,\xi_y + u_\eta\\ u_y = u_\xi\,\xi_x\end{cases} \rightarrow \quad A\,u_\eta + A\,\xi_y\,u_\xi + B\,\xi_x\,u_\xi = C\,u + D$$

Como sobre las soluciones y(x) definidas por [3] se tiene:

$$\xi(x,y(x))=k \quad \rightarrow \quad \xi_x + \xi_y\,y' = \tfrac{1}{B}\,[A\,\xi_y + B\,\xi_x] = 0$$

Por tanto [1] se convierte en:

$$[4] \quad \boxed{A(\xi,\eta)\,u_\eta = C(\xi,\eta)\,u + D(\xi,\eta)} \quad , \ u = u(\xi,\eta) \ .$$

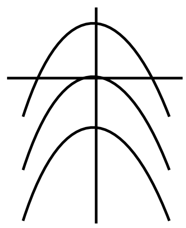
(si hubiésemos escogido $\eta = x$ habríamos llegado a $Bu_\eta = Cu + D$)

[4] es una ecuación lineal ordinaria en η si consideramos la ξ constante (es resoluble). En su solución aparecerá una constante arbitraria para cada ξ , es decir, una función arbitraria de ξ :

$$[5] \quad u(\xi,\eta) = p(\xi)R + R\int \frac{D\,d\eta}{R\,A} \ , \text{ con } \ R(\xi,\eta) = e^{\int C/A\,d\eta} \ , \quad p \text{ arbitraria}$$

deshaciendo el cambio queda resuelta [1] en función de x e y.

<u>Ejemplo 1</u>. $\boxed{2xu_y - u_x = 4xy}$ $\quad \frac{dy}{dx} = -2x \rightarrow$ $y+x^2=K$ características

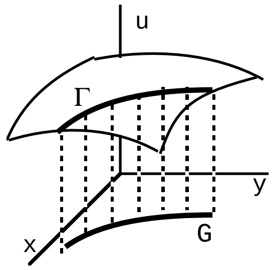


$\begin{cases}\xi = y+x^2\\ \eta = y\end{cases} \rightarrow 2xu_\eta = 4xy \ ; \ u_\eta = 2\eta \rightarrow u = p(\xi)+\eta^2 = p(y+x^2)+y^2$

$\begin{cases}\xi = y+x^2\\ \eta = x\end{cases} \rightarrow -u_\eta = 4xy = 4\xi\eta - 4\eta^3 \rightarrow \ u = p^*(\xi)+\eta^4 - 2\xi\eta^2 = p^*(y+x^2) - 2yx^2 - x^4$

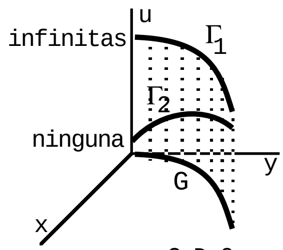
[ambas expresiones con p y p* definen la misma solución general]

¿Cómo determinar de forma única una solución de [1]? Cada solución representa una superficie en el espacio. Generalizando el problema



de valores iniciales para ordinarias definimos: el problema de Cauchy para [1] consiste en hallar la solución $u(x,y)$ que contenga una curva Γ del espacio, o lo que es lo mismo, que tome unos valores dados en los puntos de una curva G del plano xy. Si, en particular, G es una recta $y=\text{cte}$ [por ejemplo, si imponemos $u(x,0)=f(x)$], tendremos lo que se llama un problema de valores iniciales.

Un problema de Cauchy puede no tener solución única. Por ejemplo, si $C\equiv D\equiv 0$, la solución general es de la forma $u(x,y)=p(\xi(x,y))$, y por tanto cada una de sus soluciones toma un valor constante sobre cada característica. Si buscamos una solución que contenga una Γ cuya proyección G sea una de las características $\xi(x,y)=k$ debemos exigir que Γ esté en un plano horizontal $z=K$. En ese caso hay infinitas soluciones (una para cada función p con $p(k)=K$). Si Γ no tiene la z constante, no hay solución que contenga a la curva Γ.



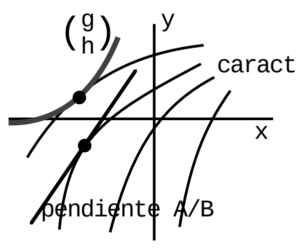
caso $C\equiv D\equiv 0$

En general, supongamos que Γ es una curva suave que viene dada paramétricamente: $\Gamma(s)=(g(s),h(s),f(s))$. Buscamos la solución de [1] con $u(g(s),h(s))=f(s)$. Sustituyendo en [5] y despejando p se tiene: $p(\xi(g(s),h(s)))=F(s)$, con F conocida. Llamemos $v=\xi(g(s),h(s))$. Si podemos expresar de forma única s en función de v : $s=s(v)$, la $p(v)=f(s(v))$ queda determinada y hay una única solución de [1] conteniendo a Γ. El teorema de la función implícita asegura que esto se puede hacer en un entorno de cada s_o para el que:

$$\frac{d}{ds}\,[\xi(g(s),h(s))]\Big|_{s=s_o} = \nabla\xi(g(s_o),h(s_o))\,.\,(g'(s_o),h'(s_o)) \neq 0$$

El $\nabla\xi$ es perpendicular a las características y (g',h') es tangente a G. Así pues, hemos deducido que si G no es tangente en ningún punto a ninguna de las características el problema de Cauchy tiene solución única, al menos local.

Se puede ver si hay esta tangencia sin resolver la EDO [2] a partir de su campo de direcciones: un vector tangente a las soluciones de [2] es $(B(g(s_o),h(s_o)),A(g(s_o),h(s_o)))$ y, por tanto, la curva G es tangente a alguna curva integral de [2] en un punto $(g(s_o),h(s_o))$ si y sólo si:



$$\Delta(s_o) \;\equiv\; g'\,A(g,h) - h'\,B(g,h)\Big|_{s=s_o} = 0$$

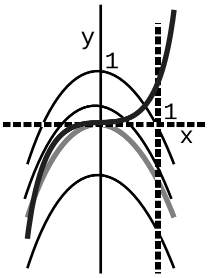
[y así, si $\Delta\neq 0\ \forall s$ el problema de Cauchy tiene solución única].

Ejemplo 1*. Imponemos diferentes datos de Cauchy a $\boxed{2xu_y - u_x = 4xy}$

$\boxed{u(1,y)=0}$ $\to p(y+1)+y^2=0 \to p(v)=-(v-1)^2 \to u=2y+2x^2-2yx^2-x^4-1$

[o bien, $p^*(y+1)-2y-1=0 \to p^*(v)=2v-1$]

[p o p* fijadas $\forall$v. x=1 no es tangente a las características]



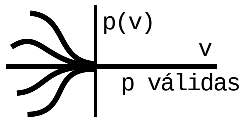
$\boxed{u(x,-x^2)=0}$ $\to p(0)+x^4=0$. Imposible, no hay solución.

$\boxed{u(x,-x^2)=x^4}$ $\to p(0)=0$. Cada $p\in C^1$ con $p(0)=0$ nos da una solución diferente: hay infinitas.

[datos sobre características dan 0 o ∞ soluciones]

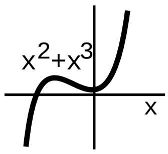
$\boxed{u(x,0)=0}$ $\to p(x^2)=0$ .Sólo queda determinada la $p(v)=0$ para $v\ge 0$ pero no tenemos ninguna condición sobre p si $v<0$.

Podemos elegir cualquier $p\in C^1$ que valga 0 para $v\ge 0$.
Existen infinitas soluciones en un entorno de (0,0):
$u(x,y)=y^2$ si $y\ge -x^2$, pero está indeterminada si $y<-x^2$.



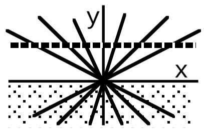
[En (0,0) es y=0 tangente a las características. Lo confirma $\Delta=1.2x-0.(-1)$].

$\boxed{u(x,x^3)=x^6}$ $\to p(x^2+x^3)=0 \to p(v)=0\ \forall v \to u=y^2$ para todo (x,y) .



[A pesar de ser la curva de datos tangente a las características en dos puntos (0,0) y (-2/3,-8/27) [pues $\Delta=1.2x-3x^2.(-1)$] hay solución única. La no tangencia es suficiente pero no es necesaria].

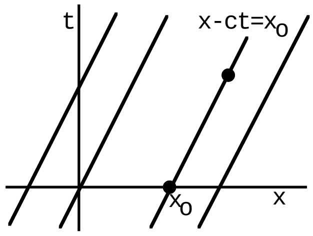
Ejemplo 2. $\boxed{\begin{matrix} yu_y+xu_x=2u \\ u(x,1)=x^3 \end{matrix}}$ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x} \to \begin{cases}\xi=y/x\\ \eta=y\end{cases} \to \eta u_\eta=2u \to$



$u=p(\xi)\eta^2=p(y/x)y^2$; $u(x,1)=p(1/x)=x^3 \to p(v)=1/v^3$; $u=\dfrac{x^3}{y}$ [sólo si y>0]

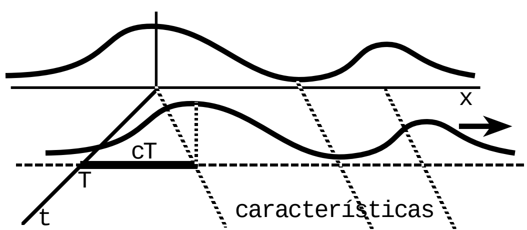
Ejemplo 3. $\boxed{\begin{matrix} u_t+cu_x=0 \\ u(x,0)=f(x) \end{matrix}}$ $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{c} \to$ características: x-ct=cte .

Solución general: $u(x,t)=p(x-ct)$; $u(x,0)=p(x)=f(x) \to u(x,t)=f(x-ct)$, solución única del problema de valores iniciales.



Observemos que el valor de u en cada (x,t) depende sólo del valor inicial de f en $x_o=x-ct$, abscisa del punto de intersección de la característica que pasa por (x,t) con el eje x. El 'dominio de dependencia' de u de los valores iniciales se limita al punto x_o . La 'influencia' de los valores iniciales en un punto x_o sobre la solución es precisamente la
recta característica que pasa por $(x_o,0)$.

Para dibujar la gráfica de u en función de x para cada t=T fijo basta trasladar la de f(x) una distancia cT. Se puede interpretar la solución como una onda que viaja (hacia la derecha si c>0) a lo largo del tiempo.



[Situación similar a la veremos en la ecuación de ondas]

5.2. EDPs lineales de segundo orden; clasificación

Consideremos [1] $\boxed{Au_{yy}+Bu_{xy}+Cu_{xx}+Du_y+Eu_x+Fu=G}$,

con u y los coeficientes funciones de (x,y) . Suponemos que los coeficientes son C^2 y que A, B y C no se anulan simultáneamente en una región Ω del plano. Como ocurría en las EDPs de primer orden podemos pensar que un cambio de variable adecuado haga desaparecer algunos términos de [1]. Hagamos el cambio genérico:

$\begin{cases}\xi=\xi(x,y)\\ \eta=\eta(x,y)\end{cases}$ con ξ y η de C^2 y con jacobiano no nulo en Ω. Entonces:

$$
\begin{aligned}
&u_y=u_\xi\,\xi_y+u_\eta\eta_y\\
&u_x=u_\xi\,\xi_x+u_\eta\eta_x\\
&u_{yy}=u_{\xi\xi}\,\xi_y{}^2+2\,u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+u_{\eta\eta}\,\eta_y{}^2+u_\xi\,\xi_{yy}+u_\eta\,\eta_{yy}\\
&u_{xy}=u_{\xi\xi}\,\xi_y\xi_x+u_{\xi\eta}\,[\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x]+u_{\eta\eta}\,\eta_y\eta_x+u_\xi\,\xi_{xy}+u_\eta\,\eta_{xy}\\
&u_{xx}=u_{\xi\xi}\,\xi_x{}^2+2\,u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+u_{\eta\eta}\,\eta_x{}^2+u_\xi\,\xi_{xx}+u_\eta\,\eta_{xx}
\end{aligned}
$$

Con lo que [1] queda en función de las nuevas variables:

$$
\begin{aligned}
&[A\xi_y{}^2+B\xi_y\xi_x+C\xi_x{}^2]u_{\xi\xi}+[2A\xi_y\eta_y+B[\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x]+2C\xi_x\eta_x]u_{\xi\eta}+\\
&\quad+[A\eta_y{}^2+B\eta_y\eta_x+C\eta_x{}^2]u_{\eta\eta}+\ldots = A^*u_{\xi\xi}+B^*u_{\xi\eta}+C^*u_{\eta\eta}+\ldots = G^*
\end{aligned}
$$

donde los puntos representan los términos en u_ξ , u_η y u , y G^* es la función G expresada en las nuevas variables.

Intentemos hacer $A^*=C^*=0$ eligiendo ξ y η adecuados. Para ello debe cumplirse la EDP de primer orden (no lineal):

[2] $A\xi_y{}^2+B\xi_y\xi_x+C\xi_x{}^2=0$ ($C^*=0$ tiene la misma forma)

Si conseguimos encontrar dos soluciones distintas de [2] podemos hacer desaparecer los términos en $u_{\xi\xi}$ y $u_{\eta\eta}$. Pero, si $B^2\text{-}4AC>0$, podemos separar [2] en dos EDPs de primer orden:

$$[3]\quad \xi_y = \frac{1}{2A}\left[-B\pm\sqrt{B^2-4AC}\,\right]\xi_x$$

[suponemos A≠0; si A=0 y C≠0 despejamos ξ_x ; A=C=0 es caso trivial]

Por otra parte, es fácil verificar que $B^{*2}-4A^*C^*=[B^2-4AC]J^2$, con $J=\xi_x\eta_y-\xi_y\eta_x$ (jacobiano del cambio) y, por tanto, el signo de $B^2\text{-}4AC$ es invariante bajo cambios de coordenadas. Esto lleva a definir:

> Si en todos los puntos (x,y) de una región del plano se cumple que la expresión $B(x,y)^2-4A(x,y)C(x,y)$ es mayor que 0, igual a 0 o menor que 0, se dice, respectivamente, que la EDP [1] es hiperbólica, parabólica o elíptica en dicha región.

Sigamos con la simplificación de [1]. Veamos cuál es el cambio adecuado a cada tipo y encontremos la forma más sencilla en que podemos escribir la ecuación (forma canónica) en cada caso.

Si [1] es hiperbólica, [3] nos proporciona dos EDPs diferentes, cuyas ecuaciones características son:

$$[4] \quad \boxed{\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2A}\left[B-\sqrt{B^2-4AC}\,\right] \,,\; \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2A}\left[B+\sqrt{B^2-4AC}\,\right]}$$

Se llaman curvas características de [1] a las curvas integrales de estas dos ecuaciones $\xi(x,y)=cte$, $\eta(x,y)=cte$ (son las características de las ecuaciones de primer orden [3]). Como sabemos, $\xi(x,y)$ y $\eta(x,y)$ son soluciones de [3] ($u=p(\xi(x,y))$ y $u=p(\eta(x,y))$ son sus soluciones generales) y, por tanto, el cambio $\xi=\xi(x,y)$, $\eta=\eta(x,y)$ transforma [1] en $B^* u_{\xi\eta}+\ldots=G^*$, y como $B^{*2}>0$ podemos escribir:

$\boxed{u_{\xi\eta}+\ldots=G^{**}}$ forma canónica de las ecuaciones hiperbólicas.

Si [1] es parabólica, [3] proporciona una única EDP:

$\xi_y + \frac{B}{2A}\xi_x = 0$ cuya ecuación característica es $\boxed{\frac{dx}{dy} = \frac{B}{2A}}$

Sus curvas integrales $\xi(x,y)=cte$ son las características de [1] (para las parabólicas sólo existe una familia de características). Escogiendo $\xi=\xi(x,y)$ tenemos que $A^*=0$ (y como $B^{*2}-4A^*C^*=0$ también es $B^*=0$). Como η podemos tomar cualquier función de x e y tal que el jacobiano no sea nulo. Se suele tomar $\eta=y$. Dividiendo por C^* se obtiene la forma canónica de las parabólicas: $\boxed{u_{\eta\eta}+\ldots=G^*}$.

Si [1] es elíptica, los segundos miembros de [4] no son reales (no hay pues características) sino funciones complejas conjugadas. No es difícil probar que las soluciones de [4] son también complejas conjugadas: $\xi(x,y)=\alpha(x,y)+i\beta(x,y)=cte$, $\eta(x,y)=\alpha(x,y)-i\beta(x,y)=cte$. También es fácil ver que el cambio $\alpha=\alpha(x,y)$, $\beta=\beta(x,y)$ lleva [1] a la forma canónica de las elípticas $\boxed{u_{\alpha\alpha}+u_{\beta\beta}+\ldots=G^*}$.

En general, [1] puede ser de diferente tipo en diferentes regiones del plano (y tendrá entonces una forma canónica distinta en cada región). Observemos también que las EDOs de primer orden que nos dan las características pueden no ser resolubles. Pero en el caso de que A, B y C sean constantes, B^2-4AC también lo es y así [1] es del mismo tipo para todo el plano. Además los cambios de variable [ahora válidos para todo (x,y)] se hallan fácilmente:

$\begin{cases} \xi=x-\frac{1}{2A}\left[B-\sqrt{B^2-4AC}\right]y \\ \eta=x-\frac{1}{2A}\left[B+\sqrt{B^2-4AC}\right]y \end{cases}$	$\begin{cases} \xi=x-\frac{B}{2A}\,y \\ \eta=y \end{cases}$	$\begin{cases} \xi=\frac{2Ax-By}{\sqrt{4AC-B^2}} \\ \eta=y \end{cases}$
si [1] hiperbólica	si [1] parabólica	si [1] elíptica

[las hiperbólicas tienen dos familias de rectas características, las parabólicas una única familia de rectas características y las elípticas no tienen; la expresión dada para la elíptica se deduce de que $\xi=\frac{2Ax-By}{2A}\pm i\frac{\sqrt{4AC-B^2}}{2A}y=cte$ equivale a $\xi=\frac{2Ax-By}{\sqrt{4AC-B^2}}\pm i\,y=cte$]

<u>Ejemplo 1</u>. $\boxed{4u_{yy}-4u_{xy}+u_{xx}=0}$ $\to$ B^2-$4AC=0$ $\to$ parabólica en todo $\mathbf{R}^2$.

A, B y C son constantes y basta copiar el cambio: $\xi=x+\frac{y}{2}$, o mejor

$$\begin{cases}\xi=2x+y\\ \eta=y\end{cases} \to \quad \begin{matrix} u_y=u_\xi+u_\eta \\ u_x=2u_\xi\end{matrix} \qquad \begin{matrix} u_{yy}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta} \\ u_{xy}=2u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta} \\ u_{xx}=4u_{\xi\xi}\end{matrix}$$

Llevandolo a la ecuación y dividiendo por 4 se tiene $u_{\eta\eta}=0$.
Esta forma canónica se resuelve fácilmente: $u_\eta=p(\xi)$ $\to$ $u=\eta p(\xi)+q(\xi)$
Por tanto, la solución general de la ecuación es:

$\boxed{u(x,y)=yp(2x+y)+q(2x+y)}$ con p y q funciones C^2 arbitrarias.

<u>Ejemplo 2</u>. $\boxed{u_{yy}-yu_{xx}=0}$ (ecuación de Tricomi) $\to$ B^2-$4AC=4y$ $\to$ hiperbólica si y>0 y elíptica si y<0 (sobre y=0 es parabólica, pero las EDPs se plantean sobre conjuntos abiertos).

<u>y>0:</u> $\frac{dx}{dy}=\pm y^{1/2}$; características $x\pm\frac{2}{3}y^{3/2}=cte$. Hacemos pues:

$$\begin{cases}\xi=x+\frac{2}{3}y^{3/2}\\ \eta=x-\frac{2}{3}y^{3/2}\end{cases} \to \quad \begin{matrix} u_y=y^{1/2}[u_\xi-u_\eta] \\ u_x=u_\xi+u_\eta\end{matrix} \qquad \begin{matrix} u_{yy}=\frac{1}{2}y^{-1/2}[u_\xi-u_\eta]+y[u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}] \\ u_{xx}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\end{matrix}$$

$$\to \frac{1}{2}y^{-1/2}[u_\xi-u_\eta]-4yu_{\xi\eta}=0 \to \boxed{u_{\xi\eta}-\frac{1}{6}\frac{u_\xi-u_\eta}{\xi-\eta}=0}$$, pues $\xi-\eta=\frac{4}{3}y^{3/2}$.

<u>y<0:</u> $\frac{dx}{dy}=\pm i[-y]^{1/2}$ $\to$ $\xi=x\pm i\frac{2}{3}[-y]^{3/2}=cte$. Hacemos ahora:

$$\begin{cases}\alpha=x\\ \beta=\frac{2}{3}[-y]^{3/2}\end{cases} \to \quad \begin{matrix} u_y=-[-y]^{1/2}u_\beta \\ u_x=u_\alpha\end{matrix} \qquad \begin{matrix} u_{yy}=\frac{1}{2}[-y]^{-1/2}u_\beta+[-y]u_{\beta\beta} \\ u_{xx}=u_{\alpha\alpha}\end{matrix}$$

$$\to \quad u_{\alpha\alpha}+u_{\beta\beta}+\frac{1}{2}[-y]^{-3/2}u_\beta=0 \quad \to \quad \boxed{u_{\alpha\alpha}+u_{\beta\beta}+\frac{1}{3\beta}u_\beta=0}\ .$$

Como ocurría en el ejemplo 1, en ocasiones será posible hallar elementalmente la <u>solución general</u> de [1] tras escribirla en forma canónica (pero en la mayoría seguirá siendo imposible; como en las dos regiones del ejemplo 2). Identifiquemos las <u>formas canónicas resolubles</u> (en los problemas veremos que otras pocas ecuaciones más pueden llevarse a ellas haciendo otros cambios de variable que hacen desaparecer alguna derivada de menor orden):

Si sólo hay derivadas respecto a una variable: $\boxed{u_{\eta\eta}+E^*u_\eta+F^*u=G^*}$

Esta ecuación lineal de segundo orden en η se integra considerando la otra variable como un parámetro. Un par de constantes para cada ξ dan lugar a dos funciones arbitrarias de ξ en la solución. La ecuación, como vemos, debe ser parabólica.

Si sólo aparece $u_{\xi\eta}$ y una de las derivadas primeras: $\boxed{u_{\xi\eta}+D^*u_\xi=G^*}$

Se resuelve haciendo $u_\xi=v$: la lineal de primer orden $v_\eta+D^*v=G^*$ es integrable viendo ξ como parámetro. La v contiene, pues, una función arbitraria de ξ. Al integrarla para hallar la u aparece otra función arbitraria (de η). Las cosas serían análogas si en vez de la u_ξ apareciese la u_η. La ecuación es hiperbólica.

[Al resolver las EDOs de segundo orden aparecían dos constantes; aquí hay, en los dos casos, dos funciones arbitrarias (evaluadas en las características como en las EDPs de primer orden)].

Ejemplo 3. $\boxed{u_{yy}+5u_{xy}+4u_{xx}+u_y+u_x=2} \to B^2\text{-}4AC=9 \to$ hiperbólica

Haciendo $\begin{cases}\xi=x-y\\ \eta=x-4y\end{cases}$ se obtiene $u_{\xi\eta}+\frac{1}{3}u_\eta=-\frac{2}{9}$. Hacemos $u_\eta=v \to$

$$v_\xi=-\frac{1}{3}v-\frac{2}{9} \to v=q^*(\eta)e^{-\xi/3}-\frac{2}{3} \to u(\xi,\eta)=q(\eta)e^{-\xi/3}-\frac{2\eta}{3}+p(\xi)$$

La solución general es, pues:

$$\boxed{u(x,y)=q(x-4y)e^{(y-x)/3}+\frac{2}{3}(4y-x)+p(x-y)}$$ q y p arbitrarias.

Ejemplo 4. $\boxed{y^2u_{yy}+2xyu_{xy}+x^2u_{xx}+y^2u_y+xyu_x=0} \to$ $B^2\text{-}4AC\equiv 0$ parabólica en $\mathbf{R}^2$

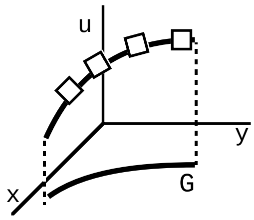
$$\frac{dx}{dy}=\frac{2xy}{2y^2}=\frac{x}{y} \to \begin{cases}\xi=y/x\\ \eta=y\end{cases}$$. Operando: $u_{\eta\eta}+u_\eta=0 \to u(\xi,\eta)=p(\xi)+q(\xi)e^{-\eta}$

Es decir, $\boxed{u(x,y)=p(y/x)+q(y/x)e^{-y}}$

5.3. Los problemas clásicos. Unicidad.

Sea [1] $Lu=G$ una EDP lineal de segundo orden en dos variables. ¿Qué datos adicionales nos proporcionan problemas bien planteados para [1]? Para una EDO de segundo orden era necesario fijar el valor de la solución y de su derivada en el instante inicial para tener solucilón única. En una EDP lineal de primer orden fijábamos los valores de la solución en toda una curva G (no tangente a las carecterísticas). Acabamos de ver que en los pocos casos en que [1] era resoluble aparecían dos funciones arbitrarias en la solución. Todo ello nos lleva a plantear el siguiente problema de Cauchy para [1]: hallar la solución que tome unos valores dados de u y u_y a lo largo de una curva dada G del plano xy.

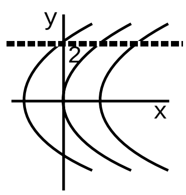
(geométricamente, encontrar una superficie solución que contenga una curva dada y tenga a lo largo de ella una familia de planos tangentes también dados. Alternativamente se podrían fijar sobre G los valores de u_x o de la derivada normal $u_{\mathbf{n}}$.



Un caso particular de este problema de Cauchy sería el obtenido al tomar como G el eje y=0: el problema de valores iniciales consiste en encontrar la solución de [1] que cumple $u(x,0)=f(x)$, $u_y(x,0)=g(x)$.

Como ocurría en las de primer orden se puede probar que si los datos son regulares y G no es tangente a las características en ningún punto entonces el problema de Cauchy tiene solución única en las proximidades de G.

Ejemplo 1. Sea $\boxed{[P]\begin{cases} yu_{yy}+2y^2u_{xy}+y^3u_{xx}-u_y=0 \\ u(x,2)=x\,,\ u_y(x,2)=0 \end{cases}}$.



$B^2-4AC\equiv 0$, la ecuación es parabólica en todo $\mathbf{R}^2$.

$\frac{dx}{dy}=y \ \rightarrow$ las características son $x-\frac{y^2}{2}=cte$.

Como y=2 nunca es tangente a ellas, el problema de Cauchy [P] tiene solución única. Es resoluble y podemos comprobarlo:

$$\begin{cases} \xi=x-\frac{y^2}{2} \\ \eta=y \end{cases} \rightarrow \eta u_{\eta\eta}-u_\eta=0 \underset{\text{Euler ó } u_\eta=v}{\longrightarrow} u=p(\xi)+q(\xi)\eta^2=p(x-\tfrac{y^2}{2})+q(x-\tfrac{y^2}{2})\,y^2$$

Imponiendo los datos de Cauchy ($u_y=-yp'-y^3q+2yq$):

$$\left.\begin{aligned} u(x,2)&=p(x-2)+4q(x-2)=x \\ u_y(x,2)&=-2p'(x-2)-8q'(x-2)+4q(x-2)=0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} p'(x-2)+4q'(x-2)&=1 \\ -p'(x-2)-4q'(x-2)+2q(x-2)&=0 \end{aligned}\right\}$$

[p' y q' representan la misma derivada ordinaria en ambas ecuaciones]

$$\rightarrow q(x-2)=\frac{1}{2} \rightarrow q(v)=\frac{1}{2}\ \forall v \rightarrow p(x-2)=x-2 \rightarrow p(v)=v\ \forall v \rightarrow u=x-\frac{y^2}{2}+\frac{y^2}{2}=x$$

Solución determinada de forma única por los cálculos anteriores. [Es fácil comprobar que se satisfacen la ecuación y los datos].

Parece en principio que el problema de Cauchy es un problema adecuado a todas las EDPs de segundo orden. Pero esto no es cierto. En el estudio de los problemas reales aparecen condiciones mucho más variadas que las de Cauchy: en unos casos habrá que imponer condiciones iniciales y de contorno al mismo tiempo, en otro sólo exigiremos condiciones de contorno … Además un dato de Cauchy puede originar problemas mal planteados para ecuaciones no hiperbólicas. Por ejemplo, el problema para la ecuación elíptica:

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 \\ u(x,0)=0 \\ u_y(x,0)=\frac{\operatorname{sen} nx}{n} \end{cases} \quad \text{tiene por solución única} \quad u(x,y) = \frac{\operatorname{sh} ny \ \operatorname{sen} nx}{n^2}$$

Pero no hay dependencia continua de los datos: $\operatorname{sen} nx/n$ tiende a 0 uniformemente, pero la solución se hace para $y\neq 0$ tan grande como se quiera (por grande que sea n) y se parece poco a la solución u=0 correspondiente a los datos $u(x,0)=u_y(x,0)=0$.

Veamos ahora los principales problemas asociados a las tres **ecuaciones clásicas** [sólo el (P_1) será un problema de Cauchy]. Para cada uno de ellos habrá que comprobar que tiene solución única dependiente continuamente de los datos:

Ondas. Un problema bien planteado para la cuerda vibrante es el problema puro de valores inciales:

$$(P_1) \begin{cases} u_{tt} - c^2u_{xx}=F(x,t),\ x,t\in \mathbf{R} \\ u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$$

que surge al considerar una cuerda infinita (tiene sentido real si nos preocupamos por valores pequeños de t antes de que las perturbaciones lleguen a los extremos). Fijamos la polición inicial de la cuerda y la distribución de velocidades verticales iniciales. Como fijamos los datos sobre una recta no característica (estas son $x\pm ct=cte$) tendrá solución única. A partir de la solución del siguiente capítulo comprobaremos la dependencia continua).

Podemos también considerar una cuerda acotada con los extremos fijos. Deberemos entonces imponer unas condiciones de contorno adicionales: $u(0,t)=u(L,t)=0$. Más en general, si los extremos se mueven verticalmente según $h_0(t)$ y $h_L(t)$ dadas se tiene:

$$(P_2) \begin{cases} u_{tt} - c^2u_{xx}=F(x,t)\,,\ x\in[0,L]\,,\ t\in \mathbf{R} \\ u(x,0)=f(x)\,,\ u_t(x,0)=g(x) \\ u(0,t)=h_0(t)\,,\ u(L,t)=h_L(t) \end{cases}$$

Demostremos su unicidad (probaremos su existencia, como en otros problemas, hallando explícitamente las soluciones [en el capítulo 6]; la dependencia continua, que se cumple, no la demostraremos [se podría deducir de la del problema (P_1)]).

Sean u_1 y u_2 soluciones cualquiera de (P_2) y sea $u=u_1-u_2$. Entonces u satisface:

$$(P_o)\left\{\begin{array}{l} u_{tt}-c^2u_{xx}=0,\ x\in[0,L],\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=u(L,t)=0 \end{array}\right.$$

Nuestro objetivo es demostrar que $u\equiv 0$. Partimos de la identidad:

$$u_t[u_{tt}-c^2u_{xx}] = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}[u_t{}^2+c^2u_x{}^2] - c^2\frac{\partial}{\partial x}[u_tu_x]$$

Integramos respecto a x entre 0 y L y respecto a t entre 0 y T cualquiera suponiendo que u es solución de (P_o):

$$\frac{1}{2}\int_0^L [u_t{}^2+c^2u_x{}^2]_{(x,0)}^{(x,T)}\,dx - c^2\int_0^T [u_tu_x]_{(0,t)}^{(L,t)}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^L [u_t(x,T)^2+c^2u_x(x,T)^2]\,dx = 0$$

pues $u_{tt}-c^2u_{xx}=u_t(x,0)=u_x(x,0)=u_t(0,t)=u_t(L,t)=0$. Como el último corchete es ≥ 0 y es función continua de x debe ser $u_t(x,T)=u_x(x,T)=0$ para $0\leq x\leq L$ y para cualquier T. Por tanto u(x,t) es constante y como u(x,0)=0 debe ser $u=u_1-u_2\equiv 0$. Hay unicidad.

Calor. Para la <u>varilla infinita</u> se prueba que está bien planteado:

$$\boxed{(P_3)\left\{\begin{array}{l} u_t-ku_{xx}=F(x,t),\ x\in\mathbf{R},\ t>0 \\ u(x,0)=f(x),\ \text{u acotada} \end{array}\right.}$$

Basta un único dato, la distribución inicial de temperaturas, para fijar las posteriores [no podemos dar arbitrariamente la $u_t(x,0)$ pues debe ser $u_t(x,0)=ku_{xx}(x,0)=kf''(x)$ si u es solución (t=0 es una característica y (P_3) no es buen problema de valores iniciales)].

Para una <u>varilla acotada</u> hay que añadir condiciones de contorno, que pueden ser de varios tipos. Si los extremos deben tener a lo largo del tiempo unas <u>temperaturas dadas</u> $h_0(t)$ y $h_L(t)$ se tiene:

$$\boxed{(P_4)\left\{\begin{array}{l} u_t-ku_{xx}=F(x,t),\ x\in(0,L),\ t>0 \\ u(x,0)=f(x) \\ u(0,t)=h_0(t),\ u(L,t)=h_L(t) \end{array}\right.}$$

Si lo que fijamos es el <u>flujo de calor</u> en los extremos obtenemos:

$$\boxed{(P_5)\left\{\begin{array}{l} u_t-ku_{xx}=F(x,t),\ x\in(0,L),\ t>0 \\ u(x,0)=f(x) \\ u_x(0,t)=h_0(t),\ u_x(L,t)=h_L(t) \end{array}\right.}$$

[En particular, si $h_0(t)=h_L(t)=0$, los extremos están <u>aislados</u>].

Un tercer tipo de condiciones de contorno combina la u y la u_x : $u_x(0,t)-au(0,t)=h_0(t)$ ó $u_x(L,t)+bu(L,t)=h_L(t)$, con a,b>0, que expresan la <u>radiación libre</u> de calor hacia un medio a temperatura dada (si el extremo x=L está más (menos) caliente que h_L/b entonces irradia (chupa) calor ya que $u_x=-b(u-h_L/b)<0$ (>0) y el flujo de calor es siempre en sentido opuesto al gradiente de las temperaturas; lo mismo sucede con el otro extremo).

Probemos que (P_4) ó (P_5) (o cualquiera de los otros 7 problemas que aparecen combinando los 3 tipos de condiciones descritos) poseen solución única. Sean u_1 y u_2 soluciones. Entonces $u=u_1-u_2$ satisface el problema con $F=f=h_0=h_L=0$. Multiplicando la ecuación por u e integrando respecto a x entre 0 y L se tiene:

$$\int_0^L uu_t dx - k\int_0^L uu_{xx}dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L u^2dx - k\big[uu_x\big]_{(0,t)}^{(L,t)} + k\int_0^L u_x{}^2dx = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\int_0^L u^2dx \le 0$$

(si u=0 o $u_x=0$ en los extremos la última implicación es clara, ya que k>0; es también fácil verlo si $u_x-au=0$, a<0 ó si $u_x+bu=0$, b<0). La última integral es una función U(t) no creciente, que satisface U(0)=0 (pues u(x,0)=0) y U(t)≥0 (integrando positivo). De las tres cosas se deduce que $U(t)\equiv 0 \Rightarrow u\equiv 0$. Unicidad.

[Para otros problemas parabólicos la demostración de unicidad será similar].

Una forma alternativa de demostrar la unicidad del algunos problemas (que además permite atacar la dependencia continua) es usando un principio del máximo que se ajuste al problema considerado. Por ejemplo, es cierto el siguiente principio que no demostramos:

Si u es continua en $[0,T]\times[0,L]$ y satisface $u_t-ku_{xx}=0$ en $(0,T)\times(0,L)$, los valores máximo y mínimo de u se alcanzan o bien en t=0 o bien en x=0 ó en x=L .

[si la temperatura inicial en la varilla no supera un valor M y la de los extremos tampoco, no se puede crear en su interior una temperatura mayor que M (si no hay fuentes externas); la prueba a partir de esto de la unicidad y la dependencia continua de (P_4) sería muy parecida a la que veremos para Laplace y por eso no la hacemos; si quisiéramos demostrar la unicidad para los otros problemas citados para la ecuación del calor, necesitaríamos otros principios del máximo ligeramente diferentes].

Laplace. Los problemas clásicos son de contorno (la ecuación describe procesos estacionarios). Los dos más importantes son:

Problema de Dirichlet: $(P_D)\begin{cases}\Delta u=F \text{ en } D\\ u=f \text{ en } \partial D\end{cases}$

Probema de Neumann: $(P_N)\begin{cases}\Delta u=F \text{ en } D\\ u_{\mathbf{n}}=f \text{ en } \partial D\end{cases}$

Donde D es un abierto conexo acotado de $\mathbf{R}^2$, ∂D es su frontera y $u_{\mathbf{n}}$ es la derivada en la dirección del vector normal unitario exterior **n**. Si vemos la ecuación describiendo una distribución estacionaria de temperaturas en una placa, en (P_D) fijamos las temperaturas en el borde y en (P_N) el flujo de calor en dirección normal al borde.

Si F, f y ∂D son suficientemente regulares, el (P_D) es un problema bien planteado. Hallaremos su solución en recintos sencillos en el capítulo 8 y en 9.1. Probemos ahora su unicidad por dos caminos.

El primero está basado en la fórmula de Green (que generaliza la integración por partes a $\mathbf{R}^2$):

$$\boxed{\text{Sea } u\in C^2(D)\cap C^1(\bar{D}).\ \text{Entonces } \iint_D u\,\Delta u\,dxdy = \oint_{\partial D} u\,u_{\mathbf{n}}\,ds - \iint_D \|\nabla u\|^2\,dxdy}$$

Basta aplicar el teorema de la divergencia a una identidad:

$$\iint_D \operatorname{div}\mathbf{f}\,dxdy = \oint_{\partial D} \mathbf{f}\,\mathbf{n}\,ds \quad , \quad u\,\Delta u = \operatorname{div}\left[u\nabla u\right] - \|\nabla u\|^2 .$$

Si u_1 y u_2 son soluciones de (P_D), $u=u_1-u_2$ verifica el problema con $F=f=0$. La fórmula de Green dice entonces que:

$$\iint_D \|\nabla u\|^2\,dxdy = 0 \Rightarrow \nabla u = 0 \Rightarrow u = \text{cte} \Rightarrow u\equiv 0 \text{ (pues } u=0 \text{ en } \partial D)$$

Utilizaremos ahora el siguiente principio del máximo para Laplace que no demostramos (intuitivamente es claro):

Si u satisface $\Delta u=0$ en un dominio acotado D y es continua en $\bar{D}$ entonces u alcanza su máximo y su mínimo en la ∂D .

[la temperatura de una placa no supera la máxima de su borde]

Demos a partir de él otra demostración de la unicidad de (P_D) y comprobemos también la dependencia continua:

Como $u=u_1-u_2$, u_1,u_2 soluciones, verifica $\begin{cases}\Delta u=0 \text{ en } D\\ u=0 \text{ en } \partial D\end{cases}$ se tiene:

$$0 = \min_{\partial D} u \le \min_{D} u \le \max_{D} u \le \max_{\partial D} u = 0 \quad\Rightarrow\quad u\equiv 0$$

Sea ahora u^* solución de (P_D) con $u=f^*$ en ∂D y sea $|f-f^*|<\varepsilon$ en ∂D.

Entonces $v=u-u^*$ satisface $\begin{cases}\Delta v=0 \text{ en } D\\ v=f-f^* \text{ en } \partial D\end{cases} \Rightarrow -\varepsilon< \min_{\partial D} v \le v \le \max_{\partial D} v <\varepsilon$

Por tanto, $|u-u^*|<\varepsilon\ \forall(x,y)\in D$. Si la diferencia entre los datos es pequeña, también es pequeña la diferencia entre soluciones.

Para el problema de Neumann (P_N) la situación es más complicada. En primer lugar, para que (P_N) pueda tener solución es necesario que F y f satisfagan la relación:

$$\iint_D F\,dxdy = \oint_{\partial D} f\,ds$$

[basta aplicar el teorema de la divergencia a ∇u para verlo].

Además, en el caso de que (P_N) tenga solución, esta contiene una constante arbitraria [lo que era esperable, ya que la ecuación y la condición de contorno sólo contienen derivadas]. También se ve que si queremos repetir la prueba de la unicidad de (P_N) a partir de la fórmula de Green, podemos dar todos los pasos excepto la última implicación. Se suele decir que (P_N) tiene unicidad salvo constante.

A la ecuación de Laplace se le pueden imponer también condiciones de contorno mixtas del tipo $u_{\mathbf{n}}+au=f$, a>0, y también tienen significado físico los problemas en que en parte de la frontera se imponen condiciones tipo Dirichlet, en otra tipo Neumann… (todos ellos son problemas bien planteados).

Por último, en ocasiones hay que estudiar problemas para Laplace en recintos D <u>no acotados</u>. Para conseguir la unicidad, además de fijar datos en ∂D hay que exigir acotación en el infinito (si el problema no es en el plano, sino en el espacio, esto no basta y hay que pedir que la solución tienda a 0 en el infinito).