

## 6. La ecuación de ondas

Las técnicas de la sección 5.2 sólo permiten hallar la solución general de una de las tres ecuaciones clásicas: la ecuación de ondas unidimensional. En 6.1 obtendremos primero la solución del problema puro de valores iniciales para una **cuerda infinita (fórmula de D'Alembert)**. Veremos que la solución  $u(x,t)$  resulta ser la suma de dos ondas que se mueven en sentido opuesto. Observaremos que la información contenida en los datos iniciales "viaja por las características" y definiremos los conceptos de dominio de dependencia y dominio de influencia. Daremos también una fórmula para las soluciones en el caso de que la ecuación sea no homogénea (que existan **fuerzas externas**).

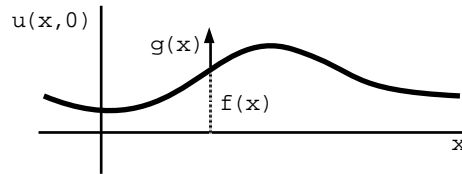
Pasaremos después a resolver el problema más real de la **cuerda acotada** y fija en sus extremos. Lo reduciremos al problema de la cuerda infinita extendiendo de forma adecuada los datos iniciales a todo  $\mathbf{R}$ . Al estar manejando funciones con expresiones diferentes en diferentes intervalos, será complicado escribir explícitamente la solución. Nos conformaremos por eso en muchos casos con hallar su expresión para valores de  $t$  o de  $x$  fijos o con hacer dibujos de las soluciones. Acabaremos la sección indicando como tratar el problema con **condiciones de contorno no homogéneas**.

En la sección 6.2 comenzaremos dando sin demostración la solución del problema puro de valores iniciales para la ecuación de ondas homogénea en el **espacio** (fórmula de Poisson-Kirchoff). De ella deduciremos la fórmula para el caso **bidimensional**. Estudiaremos las diferencias entre la propagación de las ondas en una, dos y tres dimensiones espaciales. Comprobaremos que las ondas en el espacio "pasan" (como ocurre con el sonido), mientras que en el plano la influencia de los datos iniciales se deja sentir, aunque amortiguándose, a lo largo del tiempo (en la recta depende de si la perturbación inicial se da en la posición o en la velocidad). Estudiaremos también las ondas que se propagan en el espacio con simetría esférica que son de tratamiento sencillo, por ser esencialmente unidimensionales.

## 6.1. Ecuación de la cuerda vibrante

Comencemos con el problema puro de valores iniciales:

$$(P_1) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$



Para esta ecuación hiperbólica  $\begin{cases} \xi = x+ct \\ \eta = x-ct \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \\ u_{tt} = c^2 (u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) \end{cases}$

y, por tanto, en las nuevas variables:

$$-4c^2 u_{\xi\eta} = 0 \rightarrow u_{\xi\eta} = 0 \rightarrow u_{\xi} = p^*(\xi) \rightarrow u = p(\xi) + q(\eta)$$

Luego la solución general de la ecuación es:

$$u(x, t) = p(x+ct) + q(x-ct) \quad , \quad p \text{ y } q \text{ funciones arbitrarias de } C^2$$

Imponiendo las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} p(x) + q(x) = f(x) \\ cp'(x) - cq'(x) = g(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p'(x) + q'(x) = f'(x) \\ p'(x) - q'(x) = \frac{g(x)}{c} \end{cases} \rightarrow 2p'(x) = f'(x) + \frac{g(x)}{c}$$

$$\rightarrow p(x) = \frac{f(x)}{2} + \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds + k \rightarrow q(x) = \frac{f(x)}{2} - \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds - k$$

$$\rightarrow u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds \quad (1)$$

fórmula de D'Alembert que da la solución de  $(P_1)$  de forma única a partir de los datos  $f$  y  $g$ . Para que la  $u$  sea de  $C^2$ ,  $f$  debe ser  $C^2$  y  $g$  debe ser  $C^1$  (entonces será una solución clásica o regular). La solución de  $(P_1)$  es la suma de dos ondas que viajan a velocidad  $c$ , una hacia las  $x$  crecientes y otra hacia las decrecientes.

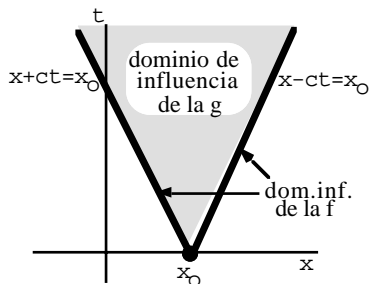
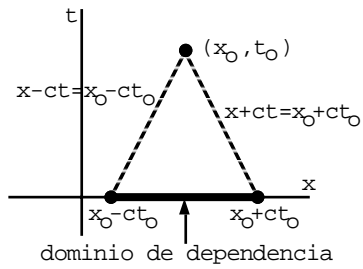
[Si  $G(x) \equiv \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds$ ,  $\frac{1}{2} f(x) - G(x)$  se mueve hacia la derecha y hacia la izquierda va  $\frac{1}{2} f(x) + G(x)$ ].

Veamos a partir de (1) la dependencia continua (a datos iniciales próximos corresponden soluciones próximas en intervalos de tiempo finitos): sea  $|f(x) - f^*(x)| < \delta$  y  $|g(x) - g^*(x)| < \delta$  para todo  $x$ ; entonces para  $t \in [0, T]$  se tiene:

$$|u(x, t) - u^*(x, t)| \leq \frac{1}{2} |f(x+ct) - f^*(x+ct)| + \frac{1}{2} |f(x-ct) - f^*(x-ct)| + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} |g(s) - g^*(s)| ds < \delta + \frac{\delta}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} ds = \delta(1+T)$$

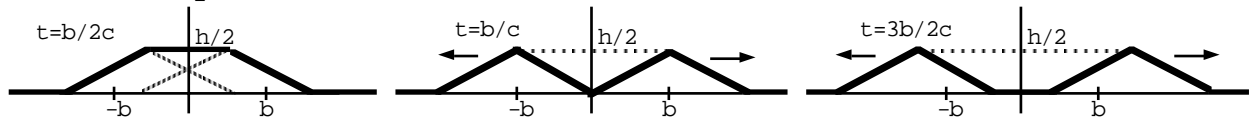
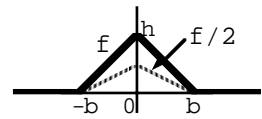
Por tanto, si  $\delta < \frac{\varepsilon}{1+T}$  es  $|u(x, t) - u^*(x, t)| < \varepsilon \quad \forall x \text{ y } \forall t \in [0, T]$ .

Observemos que  $u(x_0, t_0)$  está determinado sólo por los valores de  $f$  en los puntos  $x_0 - ct_0$  y  $x_0 + ct_0$  [puntos de corte con el eje  $x$  de las características que pasan por  $(x_0, t_0)$ ] y los de  $g$  en el intervalo  $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$ . A este intervalo se le llama dominio de dependencia de la solución en  $(x_0, t_0)$  de los valores iniciales  $f$  y  $g$  [el dominio de dependencia de los valores de  $f$  se reduce a los extremos del intervalo].

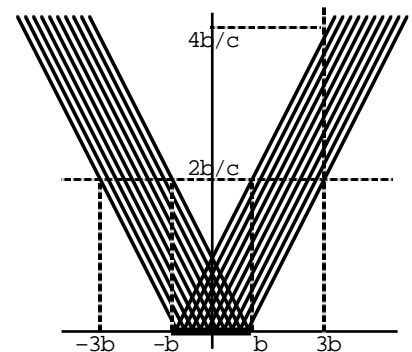


Recíprocamente, el valor de la  $f$  inicial en  $x = x_0$  influye sólo en los valores de la solución  $u$  sobre las dos características que pasan por  $(x_0, 0)$  [dominio de influencia de la  $f$ ], pues este punto no pertenece al dominio de dependencia de los puntos que no estén en esas características. Por la misma razón el dominio de influencia de la  $g$  en  $x_0$  consiste en el triángulo infinito limitado por dichas características.

Ejemplo 1. Supongamos que  $f=0$  salvo una perturbación en forma de triángulo en torno a 0 y que soltamos la cuerda sin impulso ( $g=0$ ). Dibujemos la solución para diferentes instantes. Basta trasladar las dos ondas que viajan en sentidos opuestos (en este caso ambas son  $f(x)/2$ ):



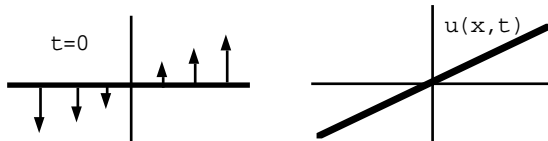
Veamos que nos dice el dominio de influencia. El conjunto de puntos de  $[-b, b]$  modifican la solución en las dos bandas dibujadas (cada uno influye en dos características). Fuera de ellas seguro que es  $u=0$ . Por ejemplo, para  $t=2b/c$  vemos que sólo puede ser no nula la solución en  $[-3b, -b]$  y en  $[b, 3b]$ . Un punto como  $x=3b$  sólo se moverá si  $t \in [2b/c, 4b/c]$  y después permanecerá en reposo.



En este ejemplo hemos considerado una  $f$  que ni siquiera es  $C^1$ , por lo que  $[f(x+ct)+f(x-ct)]/2$  no es estrictamente una solución (no es "clásica"). Se llama solución débil o generalizada a una  $u$  continua de la forma (2) aunque no sea  $C^2$  (se puede considerar como límite uniforme de soluciones clásicas). El concepto de solución débil aparece muchas veces en EDPs. En cada caso hay que precisar que se entiende por solución débil y comprobar que los problemas siguen bien planteados (por ejemplo, si ampliamos el conjunto de funciones entre las que buscamos soluciones, ¿seguirá habiendo unicidad?). El ejemplo 1 muestra también que las "discontinuidades" de los datos iniciales se propagan a lo largo de las características.

Ejemplo 2. Sea  $f(x)=0, g(x)=x \rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} s ds = tx$ .

[la cuerda infinita se va inclinando progresivamente; no es una situación física muy real: la ecuación es sólo un modelo simplificado de la realidad]



Supongamos ahora que hay fuerzas externas. El problema es:

$$(P_2) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t), & x,t \in \mathbf{R} \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

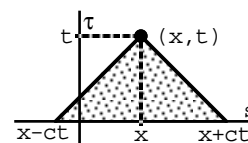
Para resolverlo nos basta hallar una solución  $u_F$  del problema en el caso de que  $f$  y  $g$  sean 0, pues entonces si  $u_1$  es la solución del problema  $(P_1)$  anterior [dada por (1)] se tiene que  $u_1 + u_F$  es la solución buscada de  $(P_2)$  [gracias a la linealidad de la ecuación y de las condiciones iniciales]. Como no es difícil comprobar que

$$u_F(x,t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c[t-\tau]}^{x+c[t-\tau]} F(s,\tau) ds d\tau \quad \text{satisface} \quad \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t) \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

concluimos que la solución de  $(P_2)$  es:

$$u(x,t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c[t-\tau]}^{x+c[t-\tau]} F(s,\tau) ds d\tau \quad (2)$$

[Observemos que el recinto descrito por la integral doble es el triángulo del plano  $s\tau$  limitado por el eje  $\tau=0$  y las características que pasan por  $(x,t)$ ]



En ocasiones es fácil encontrar una solución particular  $v$  de la ecuación no homogénea (por ejemplo si  $f$  depende sólo de  $x$  o  $t$  se pueden buscar soluciones que dependan sólo de esa variable). En esos casos podemos evitar el cálculo de la integral doble, ya que haciendo  $w = u - v$ , la  $w$  satisface (por la linealidad) un problema más sencillo (con  $F=0$ ) resoluble por la fórmula (1).

Ejemplo 3.  $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 2 \\ u(x,0) = x \\ u_t(x,0) = 3 \end{cases}$  Utilizando directamente (2):

$$u(x,t) = \frac{1}{2} [(x+t) + (x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} 3 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-[t-\tau]}^{x+[t-\tau]} 2 ds d\tau = \dots = x + 3t + t^2$$

Podemos también encontrar una  $v(x)$  o una  $v(t)$  y hacer  $w = u - v$ :

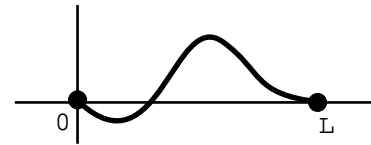
$$-v_{xx} = 2 \rightarrow v = -x^2 + Cx + K \rightarrow \text{si } v = -x^2, w \text{ cumple } \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0 \\ w(x,0) = x + x^2, w_t(x,0) = 3 \end{cases}$$

$$\rightarrow w = \frac{1}{2} [(x+t) + (x+t)^2 + (x-t) + (x-t)^2] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} 3 ds = x + x^2 + t^2 + 3t \rightarrow u = x + 3t + t^2$$

$$v_{tt} = 2 \rightarrow v = t^2 + 3t, \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0 \\ w(x,0) = x, w_t(x,0) = 0 \end{cases} \rightarrow w = x \rightarrow u = x + 3t + t^2$$

Consideremos ahora la cuerda acotada y fija en los extremos:

$$(P_3) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x \in [0, L], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x) \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \end{cases}$$



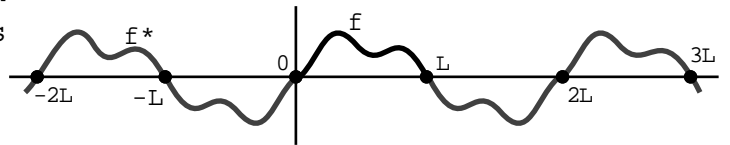
(observemos que debe ser  $f(0)=f(L)=0$ ).

Para resolverla utilizando (1) necesitamos unos datos iniciales definidos  $\forall x$ . Extendemos  $f$  y  $g$  a  $[-L, L]$  de forma impar respecto a 0 y luego de forma  $2L$ -periódica a todo  $\mathbf{R}$ , es decir, si llamamos  $f^*$  y  $g^*$  a estas extensiones:

$$f^*(-x) = -f^*(x); \quad f^*(x+2L) = f^*(x)$$

$$g^*(-x) = -g^*(x); \quad g^*(x+2L) = g^*(x)$$

(se tiene entonces que  $f^*$  y  $g^*$  son también impares respecto a  $L$ ). Resolviendo el siguiente problema con la fórmula de D'Alembert:



$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f^*(x) \\ u_t(x, 0) = g^*(x) \end{cases} \rightarrow u(x, t) = \frac{1}{2} [f^*(x+ct) + f^*(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g^*(s) ds \quad (3)$$

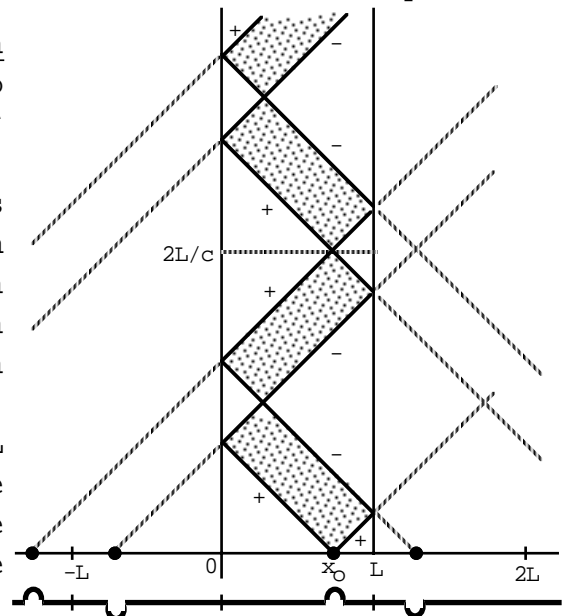
obtenemos la solución única de  $(P_3)$ , ya que  $u$  cumple la ecuación, las condiciones iniciales para  $x \in [0, L]$  y, por la imparidad de los datos, también las de contorno:

$$u(0, t) = \frac{1}{2} [f^*(ct) + f^*(-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{-ct}^{ct} g^*(s) ds = 0$$

$$u(L, t) = \frac{1}{2} [f^*(L+ct) + f^*(L-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{L-ct}^{L+ct} g^*(s) ds = 0$$

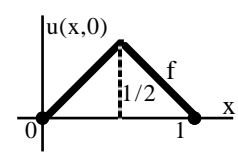
Para que la  $u$  dada por (3) sea regular deben ser  $f \in C^2[0, L]$  y  $g \in C^1[0, L]$  y además:  $f(0)=f(L)=f'(0)=f'(L)=g(0)=g(L)=0$  [ $f'$  y  $g'$  existen en 0 y  $L$  por la imparidad]. Si falla alguna de estas hipótesis la  $u$  no será  $C^2$  en todo punto.

Hallemos los dominios de influencia de  $(P_3)$ . Supongamos que  $g=0$  y  $f=0$  salvo una perturbación en torno a  $x_0$ .  $f^*$  será no nula cerca de  $\dots, x_0-2L, -x_0, x_0, -x_0+2L, \dots$ . Cada punto influirá en dos características. Veamos que pasa en  $[0, L]$ . Al principio la perturbación va por las características. Para  $t=x_0/c$  la de la izquierda se cruza en  $x=0$  con la que viene de  $-x_0$  (cambiada de signo), que sigue esta característica hasta  $x=L$  donde se encuentra otra que procede de  $x_0+2L$  y así sucesivamente. A la que parte inicialmente hacia la derecha le ocurrirá algo similar. El dominio de influencia de la  $f$  consiste, pues, en este par de características reflejadas en  $x=0$  y  $x=L$ . Es fácil ver que el de la  $g$  son todos los paralelogramos rayados.

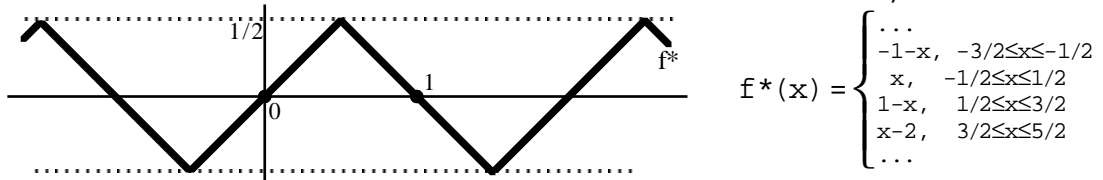


Ejemplo 4.

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, & x \in [0,1], t \in \mathbf{R} \\ u(x,0) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1-x, & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \\ u_t(x,0) = u(0,t) = u(1,t) = 0 \end{cases}$$

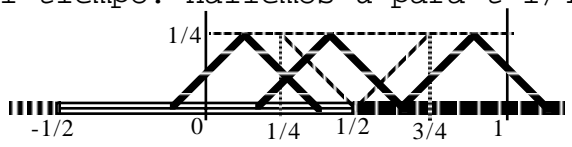


(puede representar idealizadamente la pulsación de la cuerda de una guitarra)  
 Con la fórmula (3) es, en general, complicado hallar expresiones analíticas de soluciones para todo x y todo t, pues f\* y g\* tienen diferentes formas en diferentes intervalos. Así, en nuestro caso:



Para hallar  $u(x,t) = [f^*(x+t) + f^*(x-t)]/2$  tendríamos que discutir según los valores de x y t los intervalos en que se mueven x+t y x-t, lo que nos llevaría a un número excesivo de casos (para estas discusiones conviene utilizar los dominios de dependencia). Más fácil es dar analíticamente la forma de la cuerda para un t dado o ver la evolución de un x a lo largo del tiempo. Hallemos u para  $t=1/4$ :

$$u(x, 1/4) = \frac{1}{2} [f^*(x+1/4) + f^*(x-1/4)] = \begin{cases} x+1/4-x-1/4, & 0 \leq x \leq 1/4 \\ 3/4-x-x-1/4, & 1/4 \leq x \leq 3/4 \\ 3/4-x+5/4-x, & 3/4 \leq x \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1/4 \\ 1/4, & 1/4 \leq x \leq 3/4 \\ 1-x, & 3/4 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

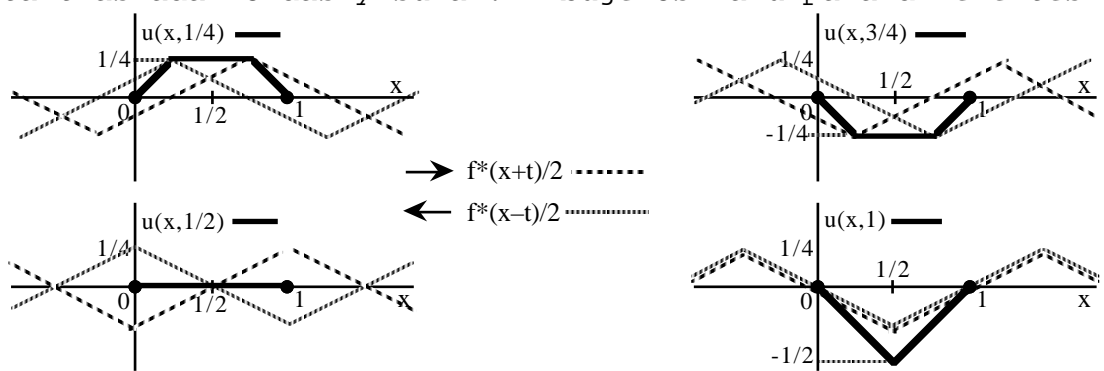


Lo que sí es fácil es calcular la u para un x y un t dados. No es siquiera necesario conocer la expresión de la f\*. Por ejemplo:

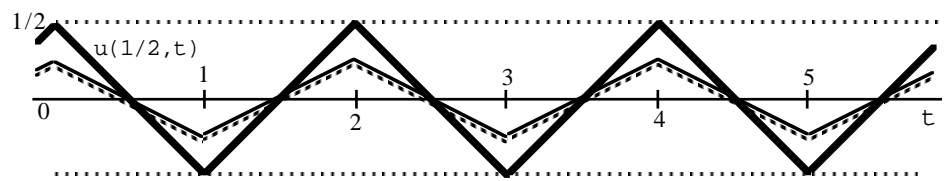
$$u(1/4, 3) = \frac{1}{2} [f^*(13/4) + f^*(-11/4)] = \frac{1}{2} [f^*(-3/4) + f^*(-3/4)] = -f^*(3/4) = -1/4$$

$f^*$  es 2-periódica                       $f^*$  es impar

Tampoco es necesaria la expresión de la f\* para hacer dibujos: basta trasladar ondas y sumar. Dibujemos la u para diferentes t:



Dibujemos ahora  $u(1/2, t) = \frac{1}{2} [f^*(1/2+t) + f^*(1/2-t)] = \frac{1}{2} [f^*(1/2+t) - f^*(t-1/2)]$



Como vemos, la gráfica se repite con periodo 2. Esto es general: por las propiedades f\* y g\* la u dada por (3) es  $2L/c$ -periódica.

Por último, tratamos el problema más general en el que existen fuerzas externas y movemos los extremos de la cuerda:

$$(P_4) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t), & x \in [0,L], t \in \mathbf{R} \\ u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x) \\ u(0,t) = h_0(t), u(L,t) = h_L(t) \end{cases}$$

Lo primero que hay que hacer es convertirlo en uno con condiciones de contorno homogéneas. Para ello hay que encontrar una  $v$  que las satisfaga y hacer  $w = u - v$ . Un ejemplo de tal  $v$  puede ser:

$$v(x,t) = \frac{x}{L} h_L(t) + \left[1 - \frac{x}{L}\right] h_0(t) \quad [\text{a veces será mejor buscar otra}]$$

La solución del problema resultante en  $w$  viene dada por (2) si sustituimos  $f, g$  y  $F$  por  $f^*, g^*$  y  $F^*$ , siendo ésta la extensión impar y  $2L$ -periódica de  $F$  considerándola como función de  $x$ .

Ejemplo 5. 
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in [0,1], t \in \mathbf{R} \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = 0, u(1,t) = \text{sent} \end{cases}$$

Hallemos  $u(1/2, 1/2)$  y  $u(1/2, 3/2)$ . La  $v$  de arriba es  $v = x \text{sent}$ .

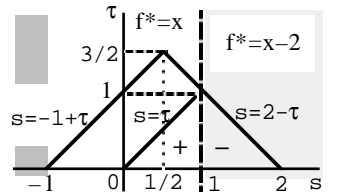
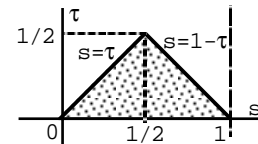
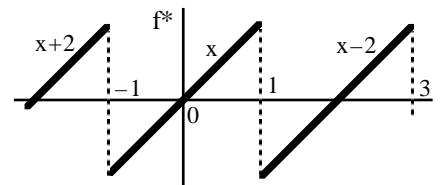
$$w = u - v \rightarrow \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = x \text{sent} \\ w(x,0) = 0, w_t(x,0) = -x \\ w(0,t) = w(1,t) = 0 \end{cases} \quad \text{Sea } f^*(x) \rightarrow$$

$$\rightarrow w \text{ es la solución de } \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = f^*(x) \text{sent} \\ w(x,0) = 0 \\ w_t(x,0) = -f^*(x) \end{cases}$$

$$u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \int_0^1 -s \, ds + \frac{1}{2} \int_0^{1/2} \int_{\tau}^{1-\tau} s \text{sent} \tau \, ds \, d\tau + \frac{1}{2} \text{sen} \frac{1}{2} = 0$$

[un punto a distancia 1/2 de donde movemos la cuerda era de esperar que para  $t=1/2$  todavía esté parado]

$$\begin{aligned} u\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^2 -f^*(s) \, ds + \frac{1}{2} \int_0^{3/2} \text{sen} \tau \int_{-1+\tau}^{2-\tau} f^*(s) \, ds \, d\tau + \frac{1}{2} \text{sen} \frac{3}{2} = \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \int_0^1 \text{sen} \tau \int_{-1+\tau}^{\tau} s \, ds \, d\tau + \frac{1}{2} \int_1^{3/2} \text{sen} \tau \int_{-1+\tau}^{2-\tau} s \, ds \, d\tau + \frac{1}{2} \text{sen} \frac{3}{2} = \text{sen} 1 \end{aligned}$$



Basándose en el capítulo 8 se puede encontrar una  $v$  mejor:

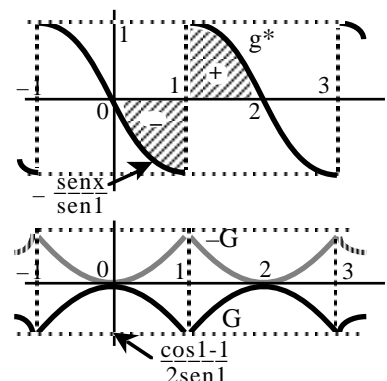
$$v = \frac{1}{\text{sen} 1} \text{sent} \text{sen} x \quad \text{satisface las c.c. y también la ecuación.}$$

$$\text{Ahora } w = u - v \rightarrow \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0 \\ w(x,0) = 0, w_t(x,0) = -\frac{\text{sen} x}{\text{sen} 1} \\ w(0,t) = w(1,t) = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\text{Por tanto: } u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\text{sen}^2(1/2)}{\text{sen} 1} + \frac{1}{2} \int_0^1 -\frac{\text{sen} s}{\text{sen} 1} \, ds = 0,$$

$$u\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{\text{sen}(1/2)\text{sen}(3/2)}{\text{sen} 1} + \frac{1}{2} \int_{-1}^0 -\frac{\text{sen} s}{\text{sen} 1} \, ds = \text{sen} 1.$$

Para dibujar hallaríamos las ondas viajeras de este problema:  $G(x) = \frac{1}{2} \int_0^x g^*$  [ $\leftarrow$ ] y  $-G(x)$  [ $\rightarrow$ ]



Para acabar hagamos unas cuantas reflexiones sobre cambios de variable y descomposición en subproblemas que generalicen las ideas que hemos utilizado en esta sección. Los problemas clásicos que presentamos en 5.3 están formados por una ecuación lineal [que podemos representar por  $Lu=F$ , con  $L$  lineal] y unas condiciones adicionales también lineales [ $M_k u=f_k$ , unas iniciales, otras de contorno]. Supongamos, por ejemplo, que son 3 las condiciones.

$$\text{Nuestro problema es entonces (P) } \begin{cases} Lu=F \\ M_1 u=f_1 \\ M_2 u=f_2 \\ M_3 u=f_3 \end{cases}$$

El problema de resolver (P) puede ser reducido a resolver otros más sencillos. Por ejemplo, si  $u_1, u_2, u_3$  y  $u_4$  son soluciones de

$$(P_1) \begin{cases} Lu=F \\ M_1 u=0 \\ M_2 u=0 \\ M_3 u=0 \end{cases} \quad (P_2) \begin{cases} Lu=0 \\ M_1 u=f_1 \\ M_2 u=0 \\ M_3 u=0 \end{cases} \quad (P_3) \begin{cases} Lu=0 \\ M_1 u=0 \\ M_2 u=f_2 \\ M_3 u=0 \end{cases} \quad (P_4) \begin{cases} Lu=0 \\ M_1 u=0 \\ M_2 u=0 \\ M_3 u=f_3 \end{cases}$$

está claro que  $u=u_1+u_2+u_3+u_4$  es solución de (P) [pero otras veces nos convendrá descomponer (P) en menos subproblemas].

En otros casos lo que puede interesar es convertir la ecuación o algunas de las condiciones adicionales (sobre todo si son de contorno) en homogéneas. Por ejemplo, y como hemos visto para la ecuación de ondas, si conocemos una solución particular  $v$  de la ecuación el cambio  $w=u-v$  convierte (P) en

$$\begin{cases} Lw=0 \\ M_1 w=f_1 - M_1 v \\ M_2 w=f_2 - M_2 v \\ M_3 w=f_3 - M_3 v \end{cases}$$

si lo que tenemos es una  $v$  que satisfaga, por ejemplo,  $M_2 v=f_2$  y  $M_3 v=f_3$ , haciendo  $w=u-v$  acabaríamos en

$$\begin{cases} Lw=F-Lv \\ M_1 w=f_1 - M_1 v \\ M_2 w=M_3 w=0 \end{cases}$$

(lo que ya es un lujo es tener una  $v$  que satisfaga la ecuación y dos condiciones como en el ejemplo 5 de antes). Como vemos, hay mucha variedad en los posibles cambios. En cada caso habrá que ver cuáles nos llevan a problemas más asequibles. Si inicialmente hay condiciones homogéneas intentaremos que los cambios no nos estropeen esas condiciones, aunque a veces no tendremos más remedio.

Por último, observemos que si  $u_1, \dots, u_n$  satisfacen algunas condiciones homogéneas, entonces cualquier combinación lineal de ellas  $u=c_1 u_1 + \dots + c_n u_n$  sigue satisfaciendo esas mismas condiciones. Si son infinitas las  $u_k$  también satisfará esas condiciones homogéneas (si las cuestiones de convergencia van bien) la serie infinita  $\sum c_n u_n$  [esto lo utilizaremos en separación de variables en el capítulo 8]



## 6.2. Ondas en tres y dos dimensiones.

Consideremos el problema de valores iniciales para la ecuación de ondas en 3 dimensiones espaciales:

$$(P_3) \begin{cases} u_{tt} - c^2 [u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}] = 0, (x,y,z) \in \mathbf{R}^3, t \in \mathbf{R} \\ u(x,y,z,0) = f(x,y,z) \\ u_t(x,y,z,0) = g(x,y,z) \end{cases}$$

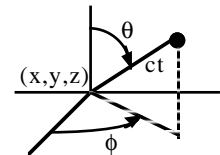
Se puede deducir una fórmula para la solución de  $(P_3)$  análoga a la de D'Alembert para la cuerda vibrante. Aceptemos que, si  $f \in C^3$  y  $g \in C^2$ , esa solución viene dada por la fórmula de Poisson o Kirchoff:

$$u(x,y,z,t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_C f \, dS \right] + \frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_C g \, dS \quad (1)$$

siendo C la superficie de la bola de centro  $(x,y,z)$  y radio  $ct$ .

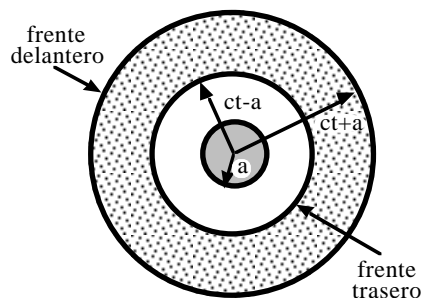
(en otras palabras, si  $\omega_f$  y  $\omega_g$  representan los valores medios de  $f$  y  $g$  sobre la superficie esférica  $C$  la solución es  $u = \partial[t\omega_f]/\partial t + t\omega_g$ ).

La forma más natural de parametrizar esta superficie es mediante los ángulos  $\theta$  y  $\phi$  de las coordenadas esféricas centradas en el punto  $(x,y,z)$  del dibujo  $\rightarrow$  Desarrollando las integrales de (1) se obtiene:



$$u(x,y,z,t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{t}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(x+ct \sin\theta \cos\phi, y+ct \sin\theta \sin\phi, z+ct \cos\theta) \sin\theta \, d\theta \, d\phi \right] + \frac{t}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi g(x+ct \sin\theta \cos\phi, y+ct \sin\theta \sin\phi, z+ct \cos\theta) \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

Interpretemos (1). Los valores de la solución sólo dependen de los valores de  $f$  y  $g$  sobre el borde de la esfera  $B((x,y,z), ct)$ . Así, si inicialmente hay una perturbación concentrada en un punto  $P$ , en el instante  $t$  sólo están perturbados los puntos de la superficie esférica de centro  $P$  y radio  $ct$ , ya que para los demás puntos es  $f=g=0$  sobre la superficie  $C$  de (1). Si inicialmente es perturbado todo un conjunto  $R$ , en cada instante  $t$  los puntos afectados por esa perturbación constituyen una región  $R_t$  del espacio formada por la unión de todas superficies esféricas de radio  $ct$  y centro  $P \in R$ . La superficie exterior de  $R_t$  se llama frente delantero de la onda y



la interior frente trasero. En el dibujo están esquematizados ambos frentes para el caso de una perturbación inicial de una esfera de radio  $a$ . Los puntos que alcanza el frente delantero, antes en reposo, comenzarán a oscilar. Los puntos sobrepasados por el frente trasero permanecerán en reposo.

Estudiemos ahora la propagación de ondas en 2 dimensiones:

$$(P_2) \begin{cases} u_{tt} - c^2 [u_{xx} + u_{yy}] = 0, (x,y) \in \mathbf{R}^2, t \in \mathbf{R} \\ u(x,y,0) = f(x,y) \\ u_t(x,y,0) = g(x,y) \end{cases}$$

Podemos mirar  $(P_2)$  como un caso particular de  $(P_3)$  en que los datos (y por tanto las soluciones) no dependen de  $z$ . Las coordenadas adecuadas ahora para parametrizar  $C$  son las cartesianas (o las cilíndricas). Expresando (1) en cartesianas se obtiene:

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi c} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \iint_B \frac{f(\xi,\eta) d\xi d\eta}{\sqrt{c^2 t^2 - [\xi-x]^2 - [\eta-y]^2}} + \iint_B \frac{g(\xi,\eta) d\xi d\eta}{\sqrt{c^2 t^2 - [\xi-x]^2 - [\eta-y]^2}} \right]$$

donde  $B$  es todo el círculo de centro  $(x,y)$  y radio  $ct$ .

La fórmula anterior escrita en polares centradas en  $(x,y)$  queda:

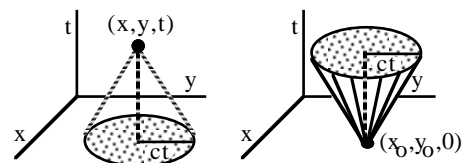
$$u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi c} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} \int_0^{ct} \frac{r f(x+r\cos\theta, y+r\sin\theta) dr d\theta}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} + \int_0^{2\pi} \int_0^{ct} \frac{r g dr d\theta}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} \right]$$

Supongamos una perturbación localizada en un punto  $P$  del plano. Otro punto  $M$ , situado a una distancia  $d$  de  $P$ , permanecerá en reposo hasta el instante  $t_0 = d/c$ . Si  $t \geq t_0$ ,  $P \in B(M, ct)$  y por tanto es  $u(M,t) \neq 0$ : a partir del instante  $t_0$  el punto  $M$  permanece perturbado indefinidamente (aunque tienda a pararse cuando  $t \rightarrow \infty$ , como las ondas producidas por una piedra en un estanque). Esta situación no contradice los resultados para  $n=3$ : la perturbación de  $P$ , vista como una perturbación en el espacio independiente de  $z$ , consiste de hecho en un cilindro vertical infinito sobre  $P$ , con lo que al  $M$  irán llegando las perturbaciones provenientes de puntos cada vez más lejanos del cilindro. Las ondas que se propagan constituyen ondas cilíndricas en el espacio: en cada cilindro paralelo al inicial la solución toma un valor constante.

[Las ondas pasan en el espacio y permanecen en el plano].

Si descendiésemos desde  $n=3$  hasta  $n=1$ , considerando que la  $f$  y la  $g$  de (1) sólo dependen de  $x$ , llegaríamos a la conocida fórmula de D'Alembert. Si se contempla esta solución sumergida en  $\mathbf{R}^3$  se puede interpretar como la suma de dos ondas planas avanzando por planos perpendiculares al eje  $x$  a velocidad  $\pm c$ . Todos los puntos de cada plano están igualmente perturbados. El caso  $n=1$  presenta un comportamiento intermedio entre  $n=2$  y  $n=3$ : la influencia del desplazamiento inicial  $f$  desaparece, pero la de la velocidad  $g$  inicial se deja sentir permanentemente.

Para  $n=2$ , el dominio de dependencia de  $u(x,y,t)$  de los datos iniciales es todo el círculo  $B((x,y), ct)$  y el de influencia de la  $f$  y  $g$  iniciales en un punto  $(x_0, y_0, 0)$  es todo el cono  $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq c^2 t^2$ . Para  $n=3$  la influencia de  $(x_0, y_0, z_0, 0)$  es sólo la superficie de un cono tetradimensional (no dibujable).



Consideremos ahora ondas en el espacio con simetría radial. Si suponemos que las  $f$  y  $g$  iniciales sólo dependen de  $r$  (distancia al origen), la solución entonces dependerá sólo de  $r$  y  $t$ . Escribiendo el laplaciano en esféricas y quitando los términos con derivadas respecto a los ángulos  $\theta$  y  $\phi$  llegamos a nuestro problema:

$$(P_r) \begin{cases} u_{tt} - c^2 [u_{rr} + \frac{2}{r} u_r] = 0, r \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(r,0) = f(r), u_t(r,0) = g(r) \end{cases}$$

Haciendo  $v = ur$ , la ecuación se transforma en:  $v_{tt} - c^2 v_{rr} = 0$ .

Si  $u$  es acotada, aparece la condición de contorno:  $v(0,t) = 0$ .

Por tanto, el problema en las nuevas variables es:

$$(P_v) \begin{cases} v_{tt} - c^2 v_{rr} = 0, r \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ v(r,0) = rf(r), v_t(r,0) = rg(r) \\ v(0,t) = 0 \end{cases}$$

que es la ecuación de las oscilaciones de una cuerda semiacotada con extremo fijo, resoluble por D'Alembert tras extender de forma impar respecto a 0 las funciones  $F(r) \equiv rf(r)$  y  $G(r) \equiv rg(r)$ , es decir, si llamamos  $F^*$  y  $G^*$  a las extensiones, la solución de  $(P_r)$  es:

$$u(r,t) = \frac{1}{2r} [F^*(r+ct) + F^*(r-ct)] + \frac{1}{2cr} \int_{r-ct}^{r+ct} G^*(s) ds, \quad (2)$$

solución que podemos escribir en la forma  $u(r,t) = p(r+ct)/r + q(r-ct)/r$  e interpretar como la suma de dos ondas esféricas cuyos radios disminuyen o crecen a velocidad  $c$ . La magnitud de la perturbación propagada, a diferencia de la cuerda, es inversamente proporcional al radio. Se ve que la fórmula (2) da problemas en el origen, pero aplicando L'Hôpital y el teorema fundamental del cálculo tenemos:

$$u(r,t) \xrightarrow{r \rightarrow 0} \frac{1}{2} [F^*(ct) + F^*(-ct)] + \frac{1}{2c} [G^*(ct) - G^*(-ct)] = F^*(ct) + \frac{1}{c} G^*(ct)$$

$[u(0,t)$  podría ser discontinua aunque la  $f$  sea continua (si  $F^*$  no es  $C^1$ ) ]

[Las ondas para  $n=2$  siempre dan más problemas de cálculo que las de  $n=3$ ; por ejemplo, no hay cambios como el  $v=ur$  que lleven a la ecuación de la cuerda la ecuación de ondas en el plano con simetría radial:  $u_{tt} - c^2 [u_{rr} + u_r/r] = 0$  ].

Ejemplo 1. Resolvamos:

$$\begin{cases} u_{tt} - [u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}] = 0, (x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \\ u(x,y,z,0) = z, u_t(x,y,z,0) = x^2 + y^2 \end{cases}$$

$$u = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{t}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (z + t \cos \theta) \sin \theta \, d\theta \, d\phi \right] + \frac{t}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (x^2 + y^2 + t^2 \sin^2 \theta + 2t [x \sin \theta \cos \phi + y \sin \theta \sin \phi]) \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{t}{2} \int_0^\pi (z + t \cos \theta) \sin \theta \, d\theta \right] + \frac{t}{2} \int_0^\pi (x^2 + y^2 + t^2 \sin^2 \theta) \sin \theta \, d\theta = \frac{\partial}{\partial t} [tz] + t(x^2 + y^2 + \frac{2t^2}{3}) = z + tx^2 + ty^2 + \frac{2t^3}{3}$$

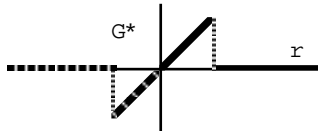
También podemos descomponer el problema en 2. El de  $f=z, g=0$  se puede ver como uno para  $n=1$ :  $u_1 = \frac{1}{2} [(z+t) + (z-t)] = z$ . El de  $f=0, g=x^2+y^2$ , como uno de  $n=2$ :

$$u_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^t \frac{r(x^2 + y^2 + r^2 + 2r[x \cos \theta + y \sin \theta])}{\sqrt{t^2 - r^2}} \, dr \, d\theta = \int_0^t \frac{r(x^2 + y^2 + r^2)}{\sqrt{t^2 - r^2}} \, dr = \dots = tx^2 + ty^2 + \frac{2t^3}{3}$$

Ejemplo 2.

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, r \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(r,0) = 0, u_t(r,0) = \begin{cases} 1, & r \leq 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases} \end{cases}$$

Comencemos suponiendo que  $n=3$ . Sabemos que su solución es  $u=v/r$ , si  $v$  es la solución del problema para la cuerda infinita:



$$\begin{cases} v_{tt} - v_{rr} = 0, r, t \in \mathbf{R} \\ v(r,0) = 0, v_t(r,0) = G^*(r) = \begin{cases} 1, & |r| \leq 1 \\ 0, & |r| > 1 \end{cases} \end{cases} \rightarrow v(r,t) = \frac{1}{2} \int_{r-t}^{r+t} G^* ds$$

Estudiamos la oscilación para  $t \geq 0$  de un punto  $M$  del espacio situado a una distancia  $R > 1$  del origen. Si  $t < R-1$  o si  $t > R+1$  es claro que  $v=0$ . Si  $t \in [R-1, R+1]$ , la integral se reduce a:

$$\int_{R-t}^1 ds \rightarrow u(R,t) = \frac{1 - [R-t]^2}{4R}$$

Se ve que el punto  $M$  oscila sólo durante un determinado intervalo de tiempo. Se ve también que la amplitud máxima de la oscilación es inversamente proporcional a la distancia que separa  $M$  del origen.

Llegar a la solución utilizando la fórmula de Poisson es complicado. Es evidente como antes que  $u=0$  si  $t \notin (R-1, R+1)$  [ $C \cap \{r \leq 1\} = \emptyset$ ]. En  $(R-1, R+1)$  el valor de  $u$  viene dado por:

$$u(M,t) = \frac{1}{4\pi t} \iint_D dS = \frac{\text{área de } D}{4\pi t}$$

siendo  $D$  la intersección de la superficie esférica  $C$  de centro  $M$  y radio  $t$  con la esfera unidad. Buscando en libros de geometría:

$$\text{área de } D = 2\pi [1 - \cos\alpha] t^2 = 2\pi \left[1 - \frac{R^2 + t^2 - 1}{2tR}\right] t^2$$

que lleva a lo mismo. Sí es fácil con Poisson hallar  $u(0,0,0,t)$ :

$$u(0,0,0,t) = \frac{1}{4\pi t} \iint_C 1 dS = \frac{\text{área de } C}{4\pi t} = t \text{ si } t \leq 1, \quad u(0,0,0,t) = \frac{1}{4\pi t} \iint_C 0 dS = 0 \text{ si } t > 1$$

(que coincide con la expresión  $u(0,t) = G^*(t)$  deducida por L'Hôpital; como era previsible, por la discontinuidad de la  $G$ , aparecen soluciones discontinuas; pero  $u(M,t)$  era continua; en el origen se concentran las discontinuidades).

Miremos ahora el problema como si fuese para  $n=2$ . Los cálculos son siempre más difíciles, así que nos limitamos a hallar  $u(0,0,t)$ :

$$\begin{aligned} u(0,0,t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^t \frac{rg dr d\theta}{\sqrt{t^2 - r^2}} = \int_0^t \frac{rg dr}{\sqrt{t^2 - r^2}} = \\ &= \begin{cases} \int_0^t r [t^2 - r^2]^{-1/2} dr = t, & t \leq 1 \\ \int_0^1 r [t^2 - r^2]^{-1/2} dr = t - \sqrt{t^2 - 1}, & t \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Como debía suceder,  $t - \sqrt{t^2 - 1} = 1/[t + \sqrt{t^2 - 1}] \rightarrow 0$ .

