

8. Separación de variables

Este capítulo está dedicado a uno de los más viejos métodos de resolución de EDPs (método de separación de variables) que nos va a permitir encontrar la solución (en forma de serie de Fourier) de gran parte de los problemas clásicos planteados en el capítulo 5. Resolveremos la ecuación del calor con diferentes condiciones de contorno, la de la cuerda acotada (vista en 6.1), la de Laplace en un rectángulo y en un círculo, ... Ello será posible porque las ecuaciones y los dominios que consideraremos son simples, pero hay muchos problemas no resolubles por este método.

En la sección 8.1 resolveremos diferentes problemas para EDPs **homogéneas** en dos variables. Las condiciones adicionales serán todas homogéneas menos una (necesariamente serán homogéneas las de contorno, si no haremos un cambio de variable). Básicamente esta será la técnica utilizada: buscaremos soluciones de la ecuación que sean productos de funciones de cada variable [por ejemplo, $u(x,y)=X(x)Y(y)$] y que cumplan todas las condiciones homogéneas; obtendremos así infinitas soluciones de ese tipo resolviendo un problema de Sturm-Liouville y otra EDO; construiremos una serie a partir de ellas [$u(x,y) = \sum c_n X_n(x)Y_n(y)$], cuyos coeficientes c_n arbitrarios se determinarán imponiendo la condición no homogénea aún no utilizada (bastará para ello desarrollar una función dada en serie de autofunciones del problema de Sturm-Liouville citado). La presencia de series en el proceso anterior exigiría justificar todas las cuestiones relativas a su convergencia, pero nosotros no entraremos en ello.

En la sección 8.2 atacaremos los problemas **no homogéneos** buscando también una serie solución. Probaremos en la ecuación una serie cuyos términos serán productos de las autofunciones del problema homogéneo por funciones a determinar de la otra variable. Resolviendo la familia infinita resultante de EDOs lineales no homogéneas con las condiciones que se deducen de las condiciones adicionales (iniciales o de contorno según los casos), se obtendrá la solución (formal) del problema.

En 8.3 extenderemos el método de separación de variables a algunos problemas para ecuaciones en **tres variables**. La técnica será prácticamente la misma una vez definidas las series de Fourier dobles. Veremos ejemplos en que aparecen de forma natural los polinomios de Legendre y las funciones de Bessel.

8.1. Separación de variables para los problemas clásicos.

Consideremos primero varios problemas para la ecuación del calor.

$$\text{Sea } [P_1] \begin{cases} u_t - k u_{xx} = 0, & x \in (0, L), t > 0 & [1] \\ u(x, 0) = f(x) & & [2] \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & & [3] \end{cases}$$

Busquemos soluciones de la forma $u(x, t) = X(x)T(t)$. Debe ser $XT' - kX''T = 0$, es decir, $X''/X = T'/(kT)$. Como el primer miembro es función sólo de x y el segundo lo es sólo de t ambos deben ser iguales a una constante:

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{k} \frac{T'}{T} = -\lambda$$

Así obtenemos una EDO para $X(x)$ y otra para $T(t)$: $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 & [4] \\ T' + \lambda k T = 0 & [5] \end{cases}$.

El producto de una solución de [4] por una de [5] es entonces una solución de [1], cualquiera que sea λ . Sin embargo, nos interesan sólo las soluciones que satisfacen las condiciones de contorno:

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0 \text{ (si fuese } T(t) \equiv 0 \text{ tendríamos } u \equiv 0 \text{ y no se cumpliría la condición inicial). Análogamente, debe ser } X(L) = 0.$$

Nos interesan, pues, las soluciones (no triviales) del problema:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad X_n = \left\{ \sin \frac{n\pi x}{L} \right\}.$$

Llevando estos valores de λ a la ecuación [5] obtenemos:

$$T' = -\frac{kn^2\pi^2}{L^2} T \rightarrow T_n = \left\{ e^{-kn^2\pi^2 t/L^2} \right\}.$$

Hemos deducido hasta ahora que para cada n las funciones

$$u_n(x, t) = \left\{ e^{-kn^2\pi^2 t/L^2} \sin \frac{n\pi x}{L} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

son soluciones de [1] que satisfacen también las condiciones de contorno [3]. Sabemos que una combinación lineal finita de estas u_n también cumple [1] y [3]. Pero consideremos la serie infinita:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-kn^2\pi^2 t/L^2} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad [6]$$

y supongamos que converge y que satisface también [1] y [3]. Si queremos que además se cumpla la condición inicial [2] debe ser:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} = f(x) \Rightarrow c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad [7]$$

pues la serie es precisamente la serie de Fourier en senos de f (si es que f admite desarrollo de Fourier).

Este método de separación de variables nos proporciona una posible solución de [P₁]: la serie [6] con coeficientes dados por [7]. Pero esta solución es sólo formal mientras no se compruebe que la convergencia de la serie es suficientemente buena para asegurar que realmente cumple la ecuación y todas las demás condiciones (en principio una suma infinita de funciones derivables podría ser no derivable). Si f(x) es C¹ a trozos, se puede probar que la serie converge en [0,L]x(0,∞) hacia una función continua y que u_t y u_{xx} se pueden calcular derivando término a término (y así se satisface la ecuación). Para x=0 y x=L está claro que la u se anula. Y la condición inicial se satisface en el siguiente sentido: la u(x,t) definida por la serie para t>0 y por u(x,0)=f(x) es una función continua salvo en los puntos de t=0 en que la f es discontinua.

[Observemos que aunque f sea discontinua, la solución es continua para valores de t>0 arbitrariamente pequeños: a diferencia de lo que ocurriría en la ecuación de ondas, las discontinuidades desaparecen aquí instantáneamente].

Observemos también que como cada u_n→0 cuando t→∞ (y es buena la convergencia), se tiene que u(x,t)→0 cuando t→∞ para todo x∈[0,L] (la barra tiende a ponerse a 0 grados, como era de esperar).

Supongamos ahora que las condiciones [3] se sustituyen por:

$$u(0,t)=T_1, \quad u(L,t)=T_2, \quad T_1 \text{ y } T_2 \text{ constantes}$$

Comenzaremos haciendo las condiciones de contorno homogéneas. Una v que las satisface es:

$$v(x) = T_1 + [T_2 - T_1] \frac{x}{L}$$

Haciendo w=u-v, nuestro problema se convierte en:

$$\begin{cases} w_t - kw_{xx} = 0, & x \in (0, L), t > 0 \\ w(x, 0) = f(x) - v(x) \\ w(0, t) = w(L, t) = 0 \end{cases}$$

y, por tanto:

$$u(x,t) = T_1 + [T_2 - T_1] \frac{x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-kn^2\pi^2t/L^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

con

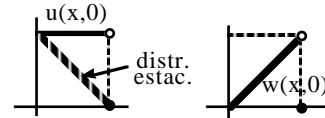
$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L [f(x) - T_1 - [T_2 - T_1] \frac{x}{L}] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n=1, 2, \dots$$

Esta v(x) tiene un significado físico claro: como w→0 para t→∞, v(x) es la distribución estacionaria de temperaturas hacia la que tienden las temperaturas en la varilla, independientemente de las condiciones iniciales.

[Si T₁ y T₂ fuesen funciones de t, la v(x,t) definida como arriba seguiría cumpliendo las condiciones de contorno, pero la ecuación para la w sería no homogénea y para resolver el problema resultante hay que esperar a la próxima sección; dicha v, dependiente de t, pierde además su significado físico].

Ejemplo 1.

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0,1), t > 0 \\ u(x,0) = 1 \\ u(0,t) = 1, u(1,t) = 0 \end{cases}$$



Operando se llega a: $u(x,t) = 1-x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[-1]^{n+1}}{n} e^{-n^2\pi^2 t} \text{sen}(n\pi x)$

y la distribución estacionaria hacia la que tiende es $v(x) = 1-x$.

[No nos importa que para $t=0$ sea incoherente el dato inicial con el de contorno en $x=1$; la solución será una función continua para $t>0$].

Resolvemos ahora el problema de la varilla con extremos aislados:

$$[P_2] \begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0, & x \in (0,L), t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \end{cases}$$

Separando variables (es la misma ecuación) aparecen las EDOs de antes. Pero ahora cambian las condiciones de contorno de la X:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(L) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad n=0,1,2,\dots, \quad X_n = \left\{ \cos \frac{n\pi x}{L} \right\} \quad [X_0 = \{1\}].$$

Para estos valores de λ se tienen las $T_n = \{e^{-kn^2\pi^2 t/L^2}\}$ [$T_0 = \{1\}$].

Así pues, probamos la serie:

$$u(x,t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-kn^2\pi^2 t/L^2} \cos \frac{n\pi x}{L}$$

Si queremos que se satisfaga la condición inicial:

$$u(x,0) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{L} = f(x)$$

con lo que los c_n desconocidos son los coeficientes de la serie de Fourier en cosenos de f :

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n=0,1,2,\dots$$

Observemos que de nuevo la solución se puede interpretar como la suma de una distribución de temperaturas estacionaria [$c_0/2$] y una distribución transitoria que tiende a 0 cuando $t \rightarrow \infty$. Era esperable que toda la varilla (aislada) tendiese a la misma temperatura y que esta fuese el valor medio de las temperaturas iniciales:

$$\frac{c_0}{2} = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx$$

[Si las condiciones de contorno hubiesen sido $u_x(0,t) = F_0, u_x(L,t) = F_L$ (flujo constante dado en los extremos), no se puede encontrar una $v(x)$ que sea una recta (en general) y la ecuación en w resulta no homogénea].

En el tercer problema para la ecuación del calor que tratamos la condición de $x=0$ representa la radiación libre hacia un medio a 0 grados (el flujo de calor es proporcional a la temperatura en $x=0$; si es positiva el calor sale y entra si es negativa). En $x=1$ fijamos el flujo de calor que entra en la varilla (al ser $u_x > 0$ las temperaturas crecen cerca de $x=1$ y el flujo es hacia la izquierda)

$$[P_3] \begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0, & x \in (0,1), t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_x(0,t) - au(0,t) = 0, & a > 0 \\ u_x(1,t) = 1 \end{cases}$$

Vimos en el capítulo 5 que tiene solución única. Para resolverlo lo primero, como siempre, es conseguir condiciones de contorno que sean homogéneas. Tanteando se ve que $v = x + 1/a$ las satisface.

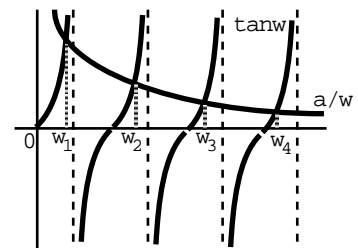
$$w = u - v \rightarrow \begin{cases} w_t - kw_{xx} = 0 \\ w(x,0) = f(x) - x - \frac{1}{a} \\ w_x(0,t) - aw(0,t) = w_x(1,t) = 0 \end{cases}$$

Separando variables se llega a $T' + \lambda kT = 0$ y al problema de contorno:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) - aX(0) = X'(1) = 0 \end{cases} \text{ que no tiene autovalores } \leq 0. \text{ Para } \lambda > 0:$$

$$X = c_1 \cos wx + c_2 \sen wx, \quad w = \sqrt{\lambda} \rightarrow X'(0) - aX(0) = c_2 w - ac_1 = 0 \rightarrow c_2 = \frac{a}{w} c_1$$

$$\rightarrow X'(1) = c_1 \left(\frac{a}{w} \cos w - \sen w \right) = 0 \rightarrow \tan w = \frac{a}{w}$$



Esta ecuación trascendente no se puede resolver pero está claro que hay infinitos autovalores λ_n positivos (que se pueden aproximar numéricamente).

Las autofunciones son $X_n = \left\{ \cos \sqrt{\lambda_n} x + \frac{a}{\sqrt{\lambda_n}} \sen \sqrt{\lambda_n} x \right\}$.

Yendo a la ecuación en T : $T_n = \{ e^{-\lambda_n kt} \} \rightarrow w = \sum c_n e^{-\lambda_n kt} X_n(x)$

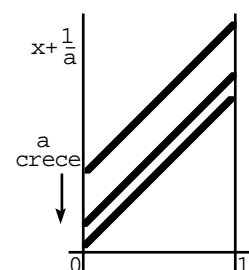
Imponiendo el dato inicial se determinan los c_n :

$$c_n = \frac{\int_0^1 \left[f(x) - x - \frac{1}{a} \right] X_n(x) dx}{\int_0^1 [X_n(x)]^2 dx} \quad [\text{serían aproximados al serlo los } \lambda_n]$$

Sí es calculable la distribución estacionaria hacia la que tienden las temperaturas en la varilla:

$$u(x,t) = w(x,t) + x + \frac{1}{a} \rightarrow x + \frac{1}{a} \text{ cuando } t \rightarrow \infty$$

[la temperatura final de la varilla es menor cuanto mayor sea el a , es decir, cuanto más fuertemente irradie su extremo]



Resolvamos el problema para la cuerda vibrante con extremos fijos (ya resuelto en 6.1 extendiendo y aplicando D'Alembert):

$$[P_4] \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x \in [0, L], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x) \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \end{cases}$$

$$u(x, t) = X(x)T(t) \rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} = -\lambda \rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ T'' + \lambda c^2 T = 0 \end{cases}$$

Las condiciones de contorno imponen $X(0) = X(L) = 0$ y por tanto:

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad X_n = \left\{ \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Las soluciones correspondientes para T son combinaciones lineales de $\text{sen}(n\pi ct/L)$ y $\text{cos}(n\pi ct/L)$. Así, funciones de la forma:

$$u_n(x, t) = \left[k_n \text{cos} \frac{n\pi ct}{L} + c_n \text{sen} \frac{n\pi ct}{L} \right] \text{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, \dots$$

satisfacen la EDP y las condiciones de contorno. Probamos, pues:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[k_n \text{cos} \frac{n\pi ct}{L} + c_n \text{sen} \frac{n\pi ct}{L} \right] \text{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

donde k_n y c_n son constantes que deberemos escoger de modo que se satisfagan las condiciones iniciales:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} = f(x) \rightarrow k_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

y suponiendo que la serie se puede derivar término a término:

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} c_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} = g(x) \rightarrow c_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \text{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

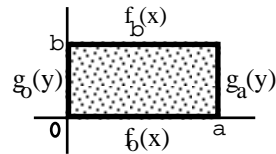
pues $(n\pi c/L)c_n$ son los coeficientes del desarrollo de g en senos.

Tenemos pues una solución, formal en principio, aunque se puede comprobar que de hecho las series convergen y satisfacen realmente la ecuación si f y g cumplen las condiciones vistas en 6.1, es decir, si sus extensiones impares respecto a 0 y L son C^2 y C^1 , respectivamente (si f o g no son tan regulares pero podemos calcular la serie solución, esta representará una solución generalizada o débil de las que hablamos en aquella sección).

Para una serie de cuestiones (cálculos de valores concretos, dibujos,...) es preferible usar la fórmula de D'Alembert, pero otras propiedades de la solución se ven mejor a partir de la serie. Por ejemplo, como cada sumando es una función periódica en t de periodo $2L/c$, también tiene este periodo la u . Observemos además que la solución aparece como una combinación infinita de 'modos naturales de vibración' $[\text{sen}(n\pi x/L)]$ cada uno de los cuales vibra con una frecuencia $n\pi c/L$ (las 'frecuencias naturales' de la cuerda). En términos acústicos u_1 nos da el tono fundamental (su frecuencia es $\pi c/L$) y los demás son los armónicos (vibraciones de frecuencia múltiplo de la anterior).

Utilicemos, por último, el método de separación de variables en el estudio de diversos problemas relativos a la ecuación de Laplace en recintos especialmente simples, comenzando por el problema de Dirichlet en un rectángulo, es decir:

$$[P_5] \begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } (0,a) \times (0,b) \\ u(x,0) = f_0(x), u(x,b) = f_b(x) \\ u(0,y) = g_0(y), u(a,y) = g_a(y) \end{cases}$$



Sabemos que basta resolver los 4 subproblemas que se obtienen al hacer 3 condiciones de contorno igual a 0. Resolvamos, por ejemplo:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } (0,a) \times (0,b) \\ u(x,0) = f_0(x) \\ u(x,b) = u(0,y) = u(a,y) = 0 \end{cases} \quad u(x,y) = X(x)Y(y) \rightarrow \begin{cases} -\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = \lambda \rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ Y'' - \lambda Y = 0 \end{cases} \end{cases}$$

De $u(0,y) = u(a,y) = 0$ se obtiene $X(0) = X(a) = 0$, con lo que el problema de contorno para la X tiene solución no trivial para

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{a^2}, \quad X_n(x) = \left\{ \text{sen} \frac{n\pi x}{a} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Para esos valores de λ es $Y_n(y) = c_1 e^{n\pi y/a} + c_2 e^{-n\pi y/a}$. La condición de contorno homogénea que nos falta $u(x,b) = 0$ impone que $Y(b) = 0$. Luego nos interesan las Y_n que la cumple que se pueden escribir:

$$Y_n(y) = \left\{ \text{sh} \frac{n\pi[b-y]}{a} \right\}$$

Probamos:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sh} \frac{n\pi[b-y]}{a} \text{sen} \frac{n\pi x}{a}$$

Para satisfacer la condición de contorno no homogénea que falta:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sh} \frac{n\pi b}{a} \text{sen} \frac{n\pi x}{a} = f_0(x) \rightarrow c_n \text{sh} \frac{n\pi b}{a} = \frac{2}{a} \int_0^a f_0(x) \text{sen} \frac{n\pi x}{a} dx$$

Y análogamente se resolverían los otros 3 subproblemas de $[P_5]$.

En dos de ellos la Y proporciona las autofunciones y en el otro las vuelve a dar la X (sus papeles son intercambiables). En calor y ondas el problema de contorno siempre era el de la X (las T tenían condiciones iniciales). Para Laplace en polares (los siguientes ejemplos), aunque tanto la R como la θ tendrán condiciones de contorno, la EDO de la θ será más sencilla y la elegiremos siempre para obtener las autofunciones.

Para resolver problemas en círculos nos interesa expresar el Laplaciano en polares ($x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$). Como,

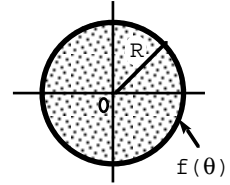
$$\begin{aligned} u_r &= u_x \cos \theta + u_y \sin \theta; \quad u_{rr} = u_{xx} \cos^2 \theta + 2u_{xy} \sin \theta \cos \theta + u_{yy} \sin^2 \theta \\ u_{\theta\theta} &= u_{xx} r^2 \sin^2 \theta - 2u_{xy} r^2 \sin \theta \cos \theta + u_{yy} r^2 \cos^2 \theta - u_x r \cos \theta - u_y r \sin \theta \end{aligned}$$

deducimos que:

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}$$

Resolvamos el problema de Dirichlet en un círculo:

$$[P_6] \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } r < R \\ u(R, \theta) = f(\theta) & , \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$



$$u(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta) \rightarrow \frac{r^2 R'' + r R'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda \rightarrow \begin{cases} \Theta'' + \lambda \Theta = 0 \\ r^2 R'' + r R' - \lambda R = 0 \end{cases}$$

Parece que no hay condiciones para la Θ , pero está claro que la solución $u(r, \theta)$ debe ser 2π -periódica en θ , o lo que es lo mismo, debe ser $\Theta(0) = \Theta(2\pi), \Theta'(0) = \Theta'(2\pi)$. Este problema de Sturm-Liouville periódico tiene los siguientes autovalores y autofunciones:

$$\lambda_n = n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \Theta_0(\theta) = \{1\}, \quad \Theta_n(\theta) = \{\cos n\theta, \sin n\theta\}.$$

Las soluciones correspondientes de R son (ecuación de Euler):

$$R_0(r) = c_1 + c_2 \ln r \quad \text{y} \quad R_n(r) = c_1 r^n + c_2 r^{-n} \quad \text{si } n \geq 1.$$

Parece lógico imponer por consideraciones físicas que la solución debe permanecer acotada cuando $r \rightarrow 0$ (y matemáticamente la solución también debe estarlo si debe ser derivable), así que debe ser $c_2 = 0$ en ambos casos. Por tanto, probamos soluciones de la forma:

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta]$$

Debe ser

$$u(R, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} R^n [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta] = f(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

y por tanto:

$$a_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta, \quad n = 0, 1, \dots, \quad b_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta \, d\theta, \quad n = 1, 2, \dots$$

Sustituyendo estos coeficientes en la serie y operando formalmente:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{R^n} \cos n(\theta - \phi) \right] f(\phi) \, d\phi$$

Operando también se puede demostrar la identidad:

$$[R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta] \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{R^n} \cos n\theta \right] = R^2 - r^2$$

con lo que la solución de $[P_6]$ se puede expresar:

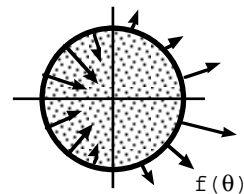
$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi) + r^2} f(\phi) \, d\phi \quad \text{fórmula integral de Poisson}$$

Haciendo $r=0$ deducimos que $u(0, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) \, d\phi$: si $\Delta u = 0$, el valor de u en el centro de un círculo es el valor medio de u sobre la frontera.

Como en los otros casos habría que probar que las u obtenidas para $[P_5]$ y $[P_6]$ son realmente soluciones. Para $[P_6]$ se demuestra que si f es continua a trozos, la u satisface $\Delta u = 0$ en $r < R$ y que alcanza el valor de contorno con continuidad en todos θ en que f es continua (y que sigue habiendo unicidad) [análogo para $[P_5]$].

Resolvamos ahora el problema de Neumann en un círculo:

$$[P_7] \begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } r < R \\ u_r(R, \theta) = f(\theta), \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$



La solución que probamos es como antes:

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n [a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta]$$

pero ahora es diferente la condición de contorno que falta:

$$u_r(R, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} nR^{n-1} [a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta] = f(\theta), \theta \in [0, 2\pi)$$

Así que:

$$a_n = \frac{1}{n\pi R^{n-1}} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta, \quad b_n = \frac{1}{n\pi R^{n-1}} \int_0^{2\pi} f(\theta) \operatorname{sen} n\theta \, d\theta, \quad n=1, 2, \dots$$

siempre que no tenga término independiente el desarrollo en senos y cosenos de $f(\theta)$; es decir, una condición necesaria para que el problema se pueda resolver por este método es que se cumpla:

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) \, d\theta = 0 \quad [\text{confirma lo visto en 5.3: debía ser } \oint_{\partial D} f \, ds = \iint_D F \, dx \, dy = 0]$$

Además, a_0 queda indeterminado [ya sabíamos desde 5.3 que un problema de Neumann tenía unicidad salvo constante].

Ejemplo 2. $\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } r < 1 \\ u_r(1, \theta) = \operatorname{sen}^3 \theta \end{cases}$ No es necesario calcular integrales:

$$u_r(1, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n [a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta] = \operatorname{sen}^3 \theta = \frac{3 \operatorname{sen} \theta}{4} - \frac{\operatorname{sen} 3\theta}{4}$$

Por tanto, $b_1 = 3/4$, $b_3 = -1/12$ y los demás coeficientes son cero.

La solución es: $u(r, \theta) = C + \frac{3}{4} r \operatorname{sen} \theta - \frac{1}{12} r^3 \operatorname{sen} 3\theta$, con C cualquiera.

Resolvemos para acabar un problema con condiciones mixtas:

$$[P_8] \begin{cases} \Delta u = 0, r < 1, \theta \in (0, \pi/2) \\ u_r(1, \theta) = f(\theta) \\ u_\theta(r, 0) = u(r, \pi/2) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \Theta'' + \lambda \Theta = 0, \Theta'(0) = \Theta(\pi/2) = 0 \\ r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0, R \text{ acotada en } r=0 \end{cases}$$

Los autovalores y autofunciones son (citados en la página 37):

$$\lambda_n = (2n-1)^2, \quad \Theta_n(\theta) = \{\cos(2n-1)\theta\}, \quad n=1, 2, \dots$$

Resolviendo la ecuación en R y utilizando la acotación:

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^{2n-1} \cos(2n-1)\theta \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) c_n \cos(2n-1)\theta = f(\theta)$$

$$\rightarrow c_n = \frac{4}{[2n-1]\pi} \int_0^{\pi/2} f(\theta) \cos(2n-1)\theta \, d\theta, \quad n=1, 2, \dots \quad (\text{solución única})$$

8.2. Problemas no homogéneos

Ejemplo 1.

$$[P_1] \begin{cases} u_t - k u_{xx} = F(x,t), & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

(tomamos $L = \pi$ para abreviar las expresiones, pero no se pierde generalidad pues un sencillo cambio de variable lleva $[0, L]$ a $[0, \pi]$).

Aunque no es necesario, descomponemos $[P_1]$ en dos subproblemas $[P_h]$ y $[P_F]$, el primero con $F=0$ (ya resuelto) y el otro con $f=0$:

$$[P_F] \begin{cases} u_t - k u_{xx} = F(x,t), & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

Las autofunciones del $[P_h]$ eran $\{\text{senn}x\}$, $n=1,2,\dots$. Probamos en $[P_F]$ la siguiente serie que ya satisface las condiciones de contorno:

$$u_F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \text{senn}x$$

con las $T_n(t)$ funciones a determinar (si $T_n = c_n e^{-kn^2 t}$, funciones que nos aparecieron resolviendo $[P_h]$, la u satisfaría la ecuación con $F=0$; debemos darle más libertad a las T_n para conseguir una $F \neq 0$).

Suponiendo que la serie se puede derivar término a término:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [T'_n(t) + kn^2 T_n(t)] \text{senn}x = F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \text{senn}x$$

con $B_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(x,t) \text{senn}x \, dx$ (desarrollo de F en senos para t fijo)

Entonces para cada n debe ser: $T'_n + kn^2 T_n = B_n$.

Y del dato inicial: $u_F(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \text{senn}x = 0$ deducimos $T_n(0) = 0$.

Resolviendo la ecuación ordinaria con el dato inicial (utilizando la fórmula de variación de las constantes; para una F concreta a lo mejor hay métodos más rápidos) hallamos la T_n y por tanto:

$$u_F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t e^{-kn^2[t-s]} B_n(s) \, ds \right] \text{senn}x$$

Esta serie es una solución formal de $[P_F]$ (como siempre faltaría comprobar que es solución de verdad). La solución u de $[P_1]$ será la suma de u_F y la solución de $[P_h]$ obtenida en la sección anterior.

[Si las condiciones de contorno hubiesen sido $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$ la u_F sería la construida con las autofunciones correspondientes:

$$u_F(x,t) = T_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \text{cos}nx \quad]$$

Ejemplo 2. $[P_2] \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = x, & x \in [0, \pi], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$

Las autofunciones del homogéneo (lo vimos en 8.1) son las de $[P_h]$:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \operatorname{sen} nx \quad (\text{ya se anula en } x=0 \text{ y } x=\pi). \text{ Entonces:}$$

$$T_n'' + c^2 n^2 T_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \operatorname{sen} nx \, dx = \frac{2[-1]^{n+1}}{n} \rightarrow T_n = c_1 \cos nct + c_2 \operatorname{sen} nct + \frac{2[-1]^{n+1}}{c^2 n^3}$$

Imponiendo $T_n(0) = T_n'(0) = 0$ (pues $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$) deducimos que:

$$u(x, t) = \frac{2}{c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[-1]^{n+1}}{n^3} [1 - \cos nct] \operatorname{sen} nx \quad .$$

Ejemplo 3. $[P_3] \begin{cases} \Delta u = F(x, y) & \text{en } (0, \pi) \times (0, \pi) \\ u_y(x, 0) = u_y(x, \pi) = u_x(0, y) = u_x(\pi, y) = 0 \end{cases}$

Separando variables en la ecuación homogénea se llega, como vimos, a las ecuaciones $X'' + \lambda X = 0$, $Y'' - \lambda Y = 0$. Las condiciones de contorno nos dan $X'(0) = X'(\pi) = 0$, $Y'(0) = Y'(\pi) = 0$. Para este problema tenemos dos familias de autofunciones $\{\cos nx\}$ ó $\{\cos ny\}$, $n=0, 1, \dots$ y podemos elegir cualquiera de ella para nuestra serie. Por ejemplo:

$$u(x, y) = X_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cos ny \quad \rightarrow$$

$$X_0'' + \sum_{n=1}^{\infty} [X_n'' - n^2 X_n] \cos ny = \frac{1}{2} B_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(x) \cos ny, \quad B_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(x, y) \cos ny \, dy$$

Debemos resolver las infinitas ecuaciones ordinarias:

$$X_0'' = \frac{1}{2} B_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} F(x, y) \, dy; \quad X_n'' - n^2 X_n = B_n, \quad n \geq 1; \quad \text{con } X_n'(0) = X_n'(\pi) = 0$$

Las X_n con $n \geq 1$ quedan determinadas de forma única (el problema homogéneo tiene sólo la solución trivial). Pero $X_0'' = 0$, $X_0'(0) = X_0'(\pi) = 0$ tiene soluciones no triviales ($\{1\}$), con lo que según 7.4 para que haya solución para X_0 es necesario que sea $\int_0^{\pi} 1 \cdot B_0(x) \, dx = 0$. Es decir,

$$[P_3] \text{ tiene solución sólo si } \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} F(x, y) \, dx \, dy = 0$$

(y en ese caso tiene infinitas que difieren en una constante; esto es coherente con lo que sabíamos sobre Neumann desde 5.3)

Calculemos la solución en el caso particular en que $F(x, y) = x - a$.

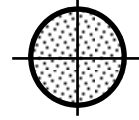
El problema sólo tiene solución si $\iint F = 0$, es decir, si $a = \pi/2$. Entonces nos queda $X_0'' = x - \pi/2$ (la F ya está desarrollada en $\{\cos ny\}$ y por la misma razón los B_n , y por tanto los X_n , son nulos si $n \geq 1$).

Integrando e imponiendo $X_0'(0) = X_0'(\pi) = 0$ obtenemos $u(x, y) = \frac{1}{6} x^3 - \frac{\pi}{4} x^2 + C$

[Probando $\sum Y_n \cos nx$ hubiésemos tenido que desarrollar en serie]

Ejemplo 4.

$$[P_4] \begin{cases} \Delta u = 4 & \text{en } r < 1 \\ u(1, \theta) = \cos 2\theta \end{cases}$$



Podríamos descomponerlo en dos subproblemas (el de $\Delta u = 0$ lo vimos en 8.1), pero lo resolvemos directamente. Las autofunciones del problema homogéneo nos llevan a probar la serie:

$$u(r, \theta) = a_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(r) \cos n\theta + b_n(r) \sin n\theta] \rightarrow$$

$$a_0'' + \frac{1}{r} a_0' + \sum_{n=1}^{\infty} \left([a_n'' + \frac{1}{r} a_n' - \frac{n^2}{r^2} a_n] \cos n\theta + [b_n'' + \frac{1}{r} b_n' - \frac{n^2}{r^2} b_n] \sin n\theta \right) = 4$$

que, por suerte, ya está desarrollada en senos y cosenos. Habrá, pues, que resolver las ecuaciones de Euler:

$$a_0'' + \frac{1}{r} a_0' = 4, \quad a_n'' + \frac{1}{r} a_n' - \frac{n^2}{r^2} a_n = 0, \quad b_n'' + \frac{1}{r} b_n' - \frac{n^2}{r^2} b_n = 0$$

La condición $u(1, \theta) = \cos 2\theta$ impone que $b_n(1) = 0 \forall n$; $a_2(1) = 1$; $a_n(1) = 0, n \neq 2$. La acotación cuando $r \rightarrow 0$ será la segunda condición necesaria para determinar la solución de cada EDO de segundo orden. La de a_0 sabemos que tiene una $a_{0p} = Ar^2$ ($\rightarrow A = 1$). Su solución general será:

$$a_0 = c_1 + c_2 \ln r + r^2 \xrightarrow{\text{acotada}} c_2 = 0 \quad a_0(1) = 0 \xrightarrow{} c_1 = -1$$

Para a_2 :

$$a_2 = c_1 r^2 + c_2 r^{-2} \xrightarrow{\text{acotada}} c_2 = 0 \quad a_2(1) = 1 \xrightarrow{} c_1 = 1$$

Sin resolver más ecuaciones podemos asegurar que las demás a_n y las b_n son cero (cero es solución y, por unicidad, no hay más).

Por tanto, la solución es:

$$u(r, \theta) = r^2 - 1 + r^2 \cos 2\theta$$

Como vimos en la sección 6.1, en ocasiones un cambio de variable adecuado nos simplifica un problema. Por ejemplo, en nuestro caso podíamos haber buscado una solución particular v de la ecuación no homogénea que no dependiera de θ resolviendo $v'' + v/r = 4$. La más sencilla de sus soluciones es $v = r^2$. Hacer $w = u - v$ nos lleva a:

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{en } r < 1 \\ w(1, \theta) = \cos 2\theta - 1 \end{cases}$$

De la serie obtenida en 8.1 obtenemos, sin más que identificar coeficientes, que la solución de este problema es:

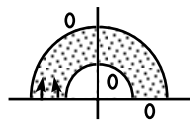
$$w(r, \theta) = r^2 \cos 2\theta - 1$$

lo que nos lleva de forma mucho más rápida a la solución de antes.

Para todos los ejemplos que hemos visto hasta ahora en esta sección habíamos resuelto previamente el problema homogéneo. Si nos enfrentásemos a un problema nuevo, deberíamos comenzar con el cálculo de las autofunciones del homogéneo, como en el siguiente:

Ejemplo 5.

$$[P_5] \begin{cases} \Delta u = 0, & 1 < r < 2, 0 < \theta < \pi \\ u(1, \theta) = u(2, \theta) = u(r, 0) = 0 \\ u_\theta(r, \pi) = r^2 \end{cases}$$



Aparentemente se trata de un problema homogéneo, pero ya dijimos que las condiciones de contorno para Laplace en polares que deben ser homogéneas son las de la θ . Necesitamos una v que las cumpla. Claramente $v=r^2\theta$ lo hace. Haciendo $w=u-v$ se obtiene:

$$\begin{cases} \Delta w = -4\theta, & 1 < r < 2, 0 < \theta < \pi \\ w(1, \theta) = -\theta, w(2, \theta) = -4\theta \\ w(r, 0) = w_\theta(r, \pi) = 0 \end{cases}$$

Conocemos la ecuación en Θ que sale al separar variables en $\Delta w = 0$. Junto a las condiciones de contorno nos dará las autofunciones:

$$\begin{cases} \Theta'' + \lambda\Theta = 0 \\ \Theta(0) = \Theta'(\pi) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = \frac{[2n-1]^2}{4}, \Theta_n(\theta) = \left\{ \text{sen} \frac{[2n-1]\theta}{2} \right\}, n=1, 2, \dots$$

Probamos entonces la serie:

$$w(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r) \text{sen} \frac{[2n-1]\theta}{2} \rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[R_n'' + \frac{1}{r} R_n' - \frac{[2n-1]^2}{4r^2} R_n \right] \text{sen} \frac{[2n-1]\theta}{2} = -4\theta = 4 \sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{sen} \frac{[2n-1]\theta}{2}$$

$$\text{con } B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi -\theta \text{sen} \frac{[2n-1]\theta}{2} d\theta = \frac{2[-1]^n}{\pi [n-1/2]^2}$$

De los datos no homogéneos deducimos las condiciones para las R_n :

$$\sum_{n=1}^{\infty} R_n(1) \Theta_n(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \Theta_n(\theta), \quad \sum_{n=1}^{\infty} R_n(2) \Theta_n(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} 4B_n \Theta_n(\theta)$$

Resolvemos pues: $r^2 R_n'' + r R_n' - [n - \frac{1}{2}]^2 R_n = 4B_n r^2$ con $R_n(1) = B_n, R_n(2) = 4B_n$.

$$R_{np} = Ar^2 \quad [\lambda=2 \text{ no autovalor}] \rightarrow A = \frac{4B_n}{4 - (n-1/2)^2} \rightarrow R_n = C_1 r^{n-1/2} + C_2 r^{-(n-1/2)} + Ar^2$$

$$\text{c. contorno} \rightarrow C_1 = \frac{[2^{q+2}-1][B_n-A]}{2^{2q-1}}, \quad C_2 = \frac{2^q[2^q-4][B_n-A]}{2^{2q-1}} \quad \text{llamando } q = n - \frac{1}{2}$$

Simplificando un poco:

$$R_n(r) = \frac{2[-1]^n}{\pi q^2 [q^2-4][2^{2q-1}]} \left([2^{q+2}-1] q^2 r^q + 2^q [2^q-4] q^2 r^{-q} - 4[2^{2q-1}] r^2 \right)$$

La solución final es $u=r^2\theta+w$ donde la w es la serie de arriba con sus coeficientes dados por la última expresión.

8.3. Algunos problemas en tres variables

Comenzamos estudiando las series de Fourier dobles, de teoría semejante a las de una variable. Sean $X_m(x)$, $x \in [a, b]$ e $Y_n(y)$, $y \in [c, d]$ las autofunciones de dos problemas de Sturm-Liouville con pesos respectivos $r(x)$ y $s(y)$, y sea $f(x, y) \in C^1([a, b] \times [c, d])$. Entonces, para cada $(x, y) \in (a, b) \times (c, d)$ se puede escribir f como la serie:

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} X_m Y_n \quad \text{con} \quad c_{mn} = \frac{1}{\langle X_m, X_m \rangle} \frac{1}{\langle Y_n, Y_n \rangle} \int_a^b \int_c^d f(x, y) X_m Y_n r s \, dy \, dx$$

[$\langle u, v \rangle$ designa, desde luego, $\int_a^b u v r \, dx$ ó $\int_c^d u v s \, dy$]

pues para x fijo se puede poner $f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(x) Y_n$, $C_n(x) = \frac{\langle f(x, y), Y_n \rangle}{\langle Y_n, Y_n \rangle}$,

y con $C_n(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_{mn} X_m$, $c_{mn} = \frac{\langle C_n(x), X_m \rangle}{\langle X_m, X_m \rangle}$ se tiene la expresión de arriba.

En particular, se tienen los desarrollos en series trigonométricas:

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \sin \frac{m\pi x}{M} \sin \frac{n\pi y}{L} \quad \text{con} \quad b_{mn} = \frac{4}{ML} \int_0^M \int_0^L f(x, y) \sin \frac{m\pi x}{M} \sin \frac{n\pi y}{L} \, dy \, dx$$

$$f(x, y) = \frac{1}{4} a_{00} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m0} \cos \frac{m\pi x}{M} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_{0n} \cos \frac{n\pi y}{L} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cos \frac{m\pi x}{M} \cos \frac{n\pi y}{L}$$

$$\text{con} \quad a_{mn} = \frac{4}{ML} \int_0^M \int_0^L f(x, y) \cos \frac{m\pi x}{M} \cos \frac{n\pi y}{L} \, dy \, dx$$

[o los desarrollos parecidos en \sum sen cos ó \sum cos sen]

Por ejemplo, desarrollemos $f(x, y) = x \cos y$ en $[0, \pi] \times [0, \pi]$ de dos formas:

$$x \cos y = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \sin m x \sin n y \quad \text{con} \quad b_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} x \cos y \sin m x \sin n y \, dy \, dx \rightarrow$$

$$x \cos y = \frac{16}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[-1]^{m+1} n}{m[4n^2-1]} \sin m x \sin 2n y$$

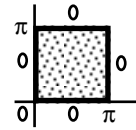
$$a_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} x \cos y \cos m x \cos n y \, dy \, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 1 \\ \pi & \text{si } n=1, m=0 \\ 2 \frac{(-1)^{m-1}}{(\pi m^2)} & \text{si } n=1, m>0 \end{cases} \rightarrow$$

$$x \cos y = \frac{\pi}{2} \cos y - \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{[2m-1]^2} \cos [2m-1] x \cos y \quad (\text{ya estaba desarrollado en } y)$$

[la igualdad entre f y su serie se da en los puntos de continuidad de la f extendida, de forma impar en el primer caso y par en el segundo, en cada variable hasta $[-\pi, \pi]$ y luego de forma 2π -periódica; así, la serie en senos converge hacia $x \cos y$ en el lado $x=0$ del cuadrado $[0, \pi] \times [0, \pi]$, pero no lo hace en los otros lados; la serie en cosenos, en cambio, converge (uniformemente) en todo el cuadrado, incluido el borde].

Resolvamos por separación de variables varios ejemplos de problemas en tres variables. Primero, la ecuación del calor en un cuadrado: estudiamos la evolución de las temperaturas de una placa cuadrada (dadas las iniciales) si el borde se mantiene a 0 grados:

$$\begin{cases} u_t - k[u_{xx} + u_{yy}] = 0, & (x,y) \in (0,\pi) \times (0,\pi), t > 0 \\ u(x,y,0) = f(x,y) \\ u(x,0,t) = u(x,\pi,t) = u(0,y,t) = u(\pi,y,t) = 0 \end{cases}$$



Buscamos soluciones: $u(x,y,t) = X(x)Y(y)T(t) \rightarrow XT' - k[X''Y + XY''] = 0$

$$\rightarrow \frac{Y''}{Y} = \frac{1}{k} \frac{T'}{T} - \frac{X''}{X} = -\lambda \rightarrow \begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0 \\ \frac{X''}{X} = \lambda + \frac{1}{k} \frac{T'}{T} = -\mu \rightarrow \begin{cases} X'' + \mu X = 0 \\ T' + k[\lambda + \mu]T = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Las condiciones de contorno exigen: $X(0) = X(\pi) = Y(0) = Y(\pi) = 0$. Así pues:

$$\begin{cases} \mu = m^2, X_m = \{ \text{sen} mx \}, m = 1, 2, \dots \\ \lambda = n^2, Y_n = \{ \text{sen} ny \}, n = 1, 2, \dots \end{cases} \rightarrow T_{mn} = \{ e^{-[m^2+n^2]kt} \}.$$

Probamos, pues, la serie:

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} e^{-[m^2+n^2]kt} \text{sen} mx \text{sen} ny$$

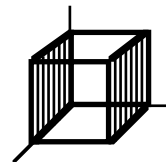
que debe satisfacer:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \text{sen} mx \text{sen} ny = f(x,y) \rightarrow b_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} f(x,y) \text{sen} mx \text{sen} ny \, dy \, dx, m, n \geq 1$$

(como en la varilla, aquí también $u \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$)

Ahora, Laplace en un cubo (con condiciones de contorno mixtas):

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } (0,\pi) \times (0,\pi) \times (0,\pi) \\ u(x,y,0) = f(x,y) \\ u = 0 \text{ en } x=0, x=\pi, z=\pi \\ u_y = 0 \text{ en } y=0, y=\pi \end{cases}$$



$$u = XYZ \rightarrow \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = -\frac{X''}{X} = \lambda \rightarrow \frac{Z''}{Z} - \lambda = -\frac{Y''}{Y} = \mu \rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0, X(0) = X(\pi) = 0 \\ Y'' + \mu Y = 0, Y'(0) = Y'(\pi) = 0 \\ Z'' - [\lambda + \mu]Z = 0, Z(\pi) = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \lambda = n^2, X_n = \{ \text{sen} nx \}, n = 1, 2, \dots \\ \mu = m^2, Y_m = \{ \text{cos} my \}, m = 0, 1, \dots \end{cases} \rightarrow Z_{mn} = \{ \text{sh}(\sqrt{n^2+m^2}[\pi-z]) \} \rightarrow$$

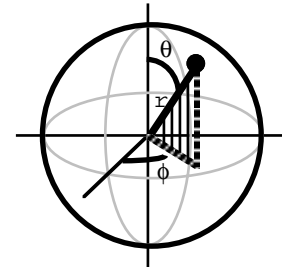
$$u(x,y,z) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_{0n} \text{sh}(n[\pi-z]) \text{sen} nx + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \text{sh}(\sqrt{n^2+m^2}[\pi-z]) \text{sen} nx \text{cos} my$$

Como $u(x,y,0) = f(x,y)$, los c_{mn} son:

$$c_{mn} = \frac{4}{\pi^2 \text{sh}(\pi\sqrt{n^2+m^2})} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} f(x,y) \text{sen} nx \text{cos} my \, dy \, dx \quad \begin{matrix} n = 1, 2, \dots \\ m = 0, 1, \dots \end{matrix}$$

Resolvamos el problema de Dirichlet en una esfera con datos independientes de ϕ . La laplaciana en esféricas tiene la forma:

$$\Delta u = u_{rrr} + \frac{2u_r}{r} + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2} + \frac{\cos\theta u_\theta}{\sin\theta r^2} + \frac{u_{\phi\phi}}{\sin^2\theta r^2}$$



Si intentásemos resolver el problema general:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, r < R, \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi] \\ u(R, \theta, \phi) = f(\theta, \phi) \end{cases}$$

Aparecería una EDO desconocida para nosotros, así que tratamos el caso de que f no dependa de ϕ . Podemos buscar entonces soluciones que tampoco dependan de ϕ , con lo que de hecho tenemos un problema con dos variables. Resolvemos pues:

$$\begin{cases} u_{rrr} + \frac{2u_r}{r} + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2} + \frac{\cos\theta u_\theta}{\sin\theta r^2} = 0, r < R \\ u(R, \theta) = f(\theta), \theta \in [0, \pi] \end{cases} \quad u = R\Theta \rightarrow \begin{cases} r^2 R'' + 2rR' - \lambda R = 0 \\ \sin\theta \Theta'' + \cos\theta \Theta' + \lambda \sin\theta \Theta = 0 \end{cases}$$

El cambio $t = \cos\theta$ transforma la segunda ecuación en la de Legendre:

$$[1-t^2] \frac{d^2\Theta}{dt^2} - 2t \frac{d\Theta}{dt} + \lambda \Theta = 0$$

Imponemos que Θ esté acotada en $t = \pm 1$ ($\theta = 0, \pi$ polos de la esfera). Los autovalores de este problema singular son $\lambda = n(n+1), n = 0, 1, \dots$ y sus autofunciones son los polinomios de Legendre:

$$\{P_n(t)\} = \{P_n(\cos\theta)\} \quad [P_0 = 1, P_1 = t, P_2 = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}, P_3 = \frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t, \dots]$$

Para estos valores de λ :

$$r^2 R'' + 2rR' - n(n+1)R = 0 \rightarrow R_n = c_1 r^n + c_2 r^{-(n+1)} \xrightarrow{R \text{ acotada}} R_n = \{r^n\}, n = 0, 1, \dots$$

Probamos:

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos\theta)$$

Debe ser:

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos\theta) = f(\theta) \rightarrow a_n = \frac{2n+1}{2R^n} \int_0^\pi f(\theta) P_n(\cos\theta) \sin\theta d\theta, n = 0, 1, \dots$$

Ya que el peso es $r(\theta) = \sin\theta$ [$(\sin\theta \Theta')' + \lambda \sin\theta \Theta = 0$] y es sabido que:

$$\int_0^\pi [P_n(\cos\theta)]^2 \sin\theta d\theta = \int_{-1}^1 [P_n(t)]^2 dt = \frac{2}{2n+1}$$

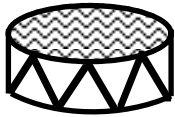
Por ejemplo, si $R=1$ y $f(\theta) = \cos^2\theta$ se tiene: $a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 t^2 P_n(t) dt$

Por tanto:

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{1}{3}, a_2 = \dots = \frac{2}{3} \text{ y los demás } a_n = 0 \rightarrow u(r, \theta) = \frac{1-r^2}{3} + r^2 \cos^2\theta$$

$$[\text{o tanteando: } \cos^2\theta = \frac{2}{3} [\frac{3}{2} \cos^2\theta - \frac{1}{2}] + \frac{1}{3} \rightarrow a_2 = \frac{2}{3}, a_0 = \frac{1}{3}]$$

Si los problemas con simetría esférica llevan a la ecuación de Legendre, los de simetría cilíndrica llevan a la de Bessel, como en el siguiente problema de vibración de una membrana circular:



$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 [u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}] = 0, r \leq 1, t \in \mathbf{R} \\ u(r, \theta, 0) = f(r, \theta), u_t(r, \theta, 0) = 0 \\ u(1, \theta, t) = 0 \end{cases}$$

$$u = R\Theta T \rightarrow \frac{T''}{c^2 T} = \frac{R'' + \frac{R'}{r}}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''}{\Theta} = -\lambda \rightarrow \frac{r^2 R'' + rR'}{R} + \lambda r^2 = \frac{\Theta''}{\Theta} = -\mu \rightarrow$$

$$\begin{cases} \Theta'' + \mu\Theta = 0, \Theta \text{ } 2\pi\text{-periódica} \rightarrow \mu_m = m^2, m = 0, 1, \dots, \Theta_0 = \{1\}, \Theta_m = \{\cos m\theta, \text{sen } m\theta\} \\ T'' + \lambda c^2 T = 0, T'(0) = 0 \rightarrow \{\cos[\sqrt{\lambda} c t]\} \\ r^2 R'' + rR' + [\lambda r^2 - \mu]R = 0, R \text{ acotada en } 0 \end{cases}$$

Para $\mu = m^2$ consideramos el problema de contorno singular para R:

$$\begin{cases} r^2 R'' + rR' + [\lambda r^2 - m^2]R = 0 \\ R \text{ acotada en } 0, R(1) = 0 \end{cases}$$

Haciendo $t = r\sqrt{\lambda}$ la ecuación se transforma en la de Bessel:

$$t^2 R''(t) + tR'(t) + [t^2 - m^2]R = 0 \rightarrow R = c_1 J_m(t) + c_2 K_m(t) = c_1 J_m(r\sqrt{\lambda}) + c_2 K_m(r\sqrt{\lambda})$$

R acotada $\Rightarrow c_2 = 0$. Los autovalores serán los λ que hagan $J_m(\sqrt{\lambda}) = 0$, que son una sucesión infinita para cada m: $\lambda_{m1}, \dots, \lambda_{mk}, \dots$

Y las autofunciones son $R_{mk} = \{J_m(r\sqrt{\lambda_{mk}})\}$. Así que probamos:

$$u(r, \theta, t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} c_{0k} J_0(r\sqrt{\lambda_{0k}}) \cos [c\sqrt{\lambda_{0k}} t] + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} [c_{mk} \cos m\theta + d_{mk} \text{sen } m\theta] J_m(r\sqrt{\lambda_{mk}}) \cos [c\sqrt{\lambda_{mk}} t]$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} c_{0k} J_0(r\sqrt{\lambda_{0k}}) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} [c_{mk} \cos m\theta + d_{mk} \text{sen } m\theta] J_m(r\sqrt{\lambda_{mk}}) = f(r, \theta)$$

Para r fijo, $f(r, \theta) = \frac{1}{2} A_0(r) + \sum_{m=1}^{\infty} [A_m(r) \cos m\theta + B_m(r) \text{sen } m\theta]$, con

$$A_m(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \theta) \cos m\theta d\theta, m = 0, 1, \dots, B_m(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \theta) \text{sen } m\theta d\theta, m = 1, 2, \dots$$

Desarrollando: $A_m(r) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{mk} J_m(r\sqrt{\lambda_{mk}}), B_m(r) = \sum_{k=1}^{\infty} d_{mk} J_m(r\sqrt{\lambda_{mk}})$

[teniendo en cuenta que $\int_0^1 r J_m^2(r\sqrt{\lambda_{mk}}) dr = \frac{1}{2} J_{m+1}^2(\sqrt{\lambda_{mk}})$]

se llega a la expresión definitiva para los coeficientes:

$$\begin{cases} c_{mk} = \frac{2}{\pi J_{m+1}^2(\sqrt{\lambda_{mk}})} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r f(r, \theta) \cos m\theta J_m(r\sqrt{\lambda_{mk}}) dr d\theta \\ d_{mk} = \frac{2}{\pi J_{m+1}^2(\sqrt{\lambda_{mk}})} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r f(r, \theta) \text{sen } m\theta J_m(r\sqrt{\lambda_{mk}}) dr d\theta \end{cases}$$