

9. Otros métodos en EDPs

Este último capítulo está dedicado al estudio de dos temas independientes entre sí. En la sección 9.1 generalizaremos las **funciones de Green** que aparecieron en el estudio de problemas de contorno para ecuaciones ordinarias no homogéneas. Seguiremos un camino poco formal (utilizando la delta de Dirac como si fuera una función) que nos abreviará los cálculos. Sobre todo nos ocuparemos de las funciones de Green para la ecuación de Poisson en recintos sencillos utilizando el llamado **método de las imágenes**. De paso introduciremos el concepto de **solución fundamental** (función v tal que $\Delta v = \delta$) que es básico en estudios más avanzados de EDPs que utilizan la teoría de distribuciones.

En la 9.2 definiremos la **transformada de Fourier** \mathfrak{F} (y las transformadas seno y coseno) y citaremos sin demostración aquellas propiedades que permiten resolver algunas EDPs en intervalos no acotados (para ellos no se puede utilizar separación de variables). Como ocurría con la transformada de Laplace, aplicando la \mathfrak{F} a algún problema para EDPs acabaremos en otro más sencillo (de EDOs, para las ecuaciones en dos variables que tratamos). Resuelto este segundo problema, para hallar la solución habrá que calcular una transformada inversa. En particular, las transformadas de Fourier nos permitirán resolver problemas de la ecuación del calor para varillas no acotadas (que no son resolubles con las técnicas de los capítulos anteriores). Aparecerá la solución fundamental de la ecuación del calor y se comprobará que, según nuestra ecuación matemática, el calor se transmite a velocidad infinita.

9.1. Funciones de Green.

[A lo largo de esta sección trabajaremos formalmente con la δ de Dirac, utilizando simplemente que:

- i. $\delta(\xi-x, \eta-y) = 0$ para $(\xi, \eta) \neq (x, y)$
- ii. $\iint_D F(\xi, \eta) \delta(\xi-x, \eta-y) d\xi d\eta = F(x, y)$ si F continua en $D \subset \mathbf{R}^2$ y $(x, y) \in D$
análogamente 'definiríamos' la δ en más dimensiones].

Comencemos considerando el problema de Dirichlet no homogéneo:

$$(P_D) \begin{cases} \Delta u = F(x, y) \text{ en } D \\ u = f \text{ en } \partial D \end{cases}$$

Nuestro objetivo es (como hacíamos en el capítulo 7) expresar su solución en términos de integrales en las que sólo aparezcan una 'función de Green' G y las funciones dato F y f :

Teor 1:

Si $G(x, y; \xi, \eta)$ satisface para cada $(x, y) \in D$ el problema

$$(P_G) \begin{cases} \Delta u = \delta(\xi-x, \eta-y) \text{ en } D \\ u = 0 \text{ en } \partial D \end{cases},$$

vista G como función de (ξ, η) , entonces la solución de (P_D) es

$$u(x, y) = \iint_D G(x, y; \xi, \eta) F(\xi, \eta) d\xi d\eta + \oint_{\partial D} G_n(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta) ds$$

[G_n es la derivada G en la dirección de \mathbf{n} , vector unitario exterior a D]

[Se puede probar que la función de Green G es simétrica: $G(x, y; \xi, \eta) = G(\xi, \eta; x, y)$ así que en lo que sigue podríamos intercambiar los papeles de (x, y) y (ξ, η)].

Del teorema de la divergencia en el plano se deduce sin dificultad la llamada segunda identidad de Green: si u y G son $C^2(\bar{D})$ se tiene

$$\iint_D [G\Delta u - u\Delta G] d\xi d\eta = \oint_{\partial D} [G u_n - u G_n] ds$$

Si u es ahora la solución de (P_D) y G la de (P_G) , y si admitimos que la identidad anterior es válida para nuestra G (evidentemente no es C^2 , pero la fórmula es válida para distribuciones) tenemos:

$$\iint_D [GF - u\delta] d\xi d\eta = \oint_{\partial D} [-f G_n] ds \rightarrow u = \iint_D GF d\xi d\eta + \oint_{\partial D} G_n f ds$$

Tenemos, pues, que resolver (P_G) . Comencemos buscando una $v(x, y; \xi, \eta)$ que, vista como función de (ξ, η) , satisfaga la ecuación, aunque no cumpla las condiciones de contorno. ¿Qué funciones conocemos que satisfagan $\Delta v = 0$ y que puedan originar una δ ? Las soluciones de Laplace en polares que no dependen del ángulo son:

$$v_{rr} + \frac{1}{r} v_r = 0 \rightarrow v = c_1 + c_2 \ln r$$

La función discontinua puede dar la δ . Así que algún múltiplo del logaritmo de la distancia r de (ξ, η) a (x, y) es buen candidato a v :

Teor 2:

$$v = \frac{1}{4\pi} \ln [(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2] \text{ satisface } \Delta v = \delta(\xi-x, \eta-y) \text{ para } (x,y) \text{ fijo}$$

A v se le llama solución fundamental para el punto (x,y) ; llamando $P=(\xi,\eta)$ y $Q=(x,y)$, podemos abreviar la expresión de v escribiendo:

$$v = \frac{1}{2\pi} \ln \overline{PQ} \quad , \text{ siendo } \overline{PQ} \text{ la distancia de } P \text{ a } Q$$

Para demostrar el teorema 2 volvemos a hacer 'trampa' con la δ . Ya vimos que $\Delta v = 0$ si $r \neq 0$, o sea, si $(\xi,\eta) \neq (x,y)$. Además, aplicando el 'teorema' de la divergencia en un círculo de centro Q y radio R :

$$\iint_{r \leq R} \Delta v \, d\xi \, d\eta = \oint_{r=R} v_n \, ds = \oint_{r=R} v_r \, ds = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi R} R \, d\theta = 1 \quad \rightarrow \quad \Delta v = \delta$$

Si w es cualquier función que satisfaga $\Delta w = 0$ en D entonces $v+w$ seguirá satisfaciendo $\Delta[v+w] = \delta$ para cada (x,y) fijo. Por tanto:

Para encontrar G [y tener resuelto (P_D)] bastará encontrar la w armónica en D tal que $v+w$ se anule en la frontera ∂D

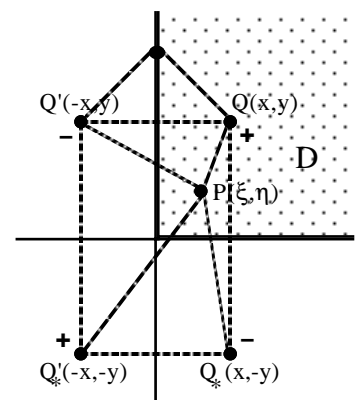
[Podríamos pensar en hacer $w = G - v$ y resolver (tal vez separando variables) el problema que queda: $\begin{cases} \Delta w = 0 \text{ en } D \\ w = -v \text{ en } \partial D \end{cases}$ pero para eso separamos variables en (P_D)].

La forma práctica de encontrar la w (en recintos D limitados por líneas rectas y circunferencias) es el método de las imágenes. Basándonos en la geometría de D se tratará de escribir G como suma de la solución fundamental v y de funciones armónicas w del mismo tipo: logaritmos de distancias a otros puntos Q' exteriores a D ('imágenes' de Q respecto de la ∂D), escogidos de tal forma que la G se anule en la frontera de D .

Como primer ejemplo resolvamos, hallando la G , el problema:

$$(P_1) \begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } D = \{x > 0\} \times \{y > 0\} \\ u(x, 0) = f(x), u(0, y) = 0, u \text{ acotada} \end{cases}$$

Sea $Q=(x,y)$ fijo. Está claro que si considero el punto $Q'=(-x,y)$, entonces $\frac{1}{2\pi} \ln \overline{PQ} - \frac{1}{2\pi} \ln \overline{PQ'}$ es una función de $P=(\xi,\eta)$ que se anula cuando P pertenece al eje y , ya que entonces $\overline{PQ} = \overline{PQ'}$; y $w' = -\frac{1}{2\pi} \ln \overline{PQ'}$ es armónica en D (lo es en $\mathbf{R}^2 - \{Q'\}$). Análogamente $w_* = -\frac{1}{2\pi} \ln \overline{PQ_*}$, siendo $Q_*(x,-y)$, es armónica en D y $w+w_* = 0$ si P está en el eje x . Para que G sea cero en ambos ejes a la vez hay que sumar una nueva $w'_* = \frac{1}{2\pi} \ln \overline{PQ'_*}$, $Q'_*(-x,-y)$.



Entonces $G(P,Q) = v + w' + w_* + w'_*$ es la función de Green buscada, ya que $\Delta G = \delta$ [pues $\Delta v = \delta$ y $\Delta(w' + w_* + w'_*) = 0$] y $G = 0$ si $P \in \partial D$ [si P está en el eje y es $\overline{PQ} = \overline{PQ'}$ y $\overline{PQ_*} = \overline{PQ'_*}$; y análogo si P está en el eje x].

Escribiendo las distancias anteriores analíticamente tenemos que:

$$G(x,y;\xi,\eta) = \frac{1}{4\pi} \ln [(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2] - \frac{1}{4\pi} \ln [(\xi+x)^2 + (\eta-y)^2] - \\ - \frac{1}{4\pi} \ln [(\xi-x)^2 + (\eta+y)^2] + \frac{1}{4\pi} \ln [(\xi+x)^2 + (\eta+y)^2]$$

Como $\mathbf{n} = -\mathbf{j}$ en el eje x , la solución de nuestro problema (P_1) será:

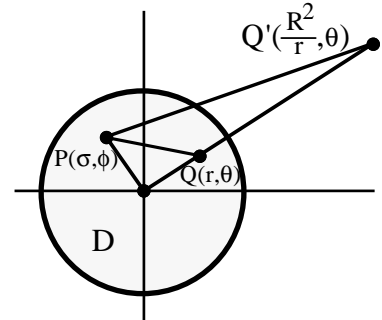
$$u(x,y) = \oint_{\partial D} G_{\mathbf{n}} f ds = \int_0^{\infty} -G_{\eta} \Big|_{\eta=0} f(\xi) d\xi = \dots = \frac{y}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{(\xi-x)^2 + y^2} - \frac{1}{(\xi+x)^2 + y^2} \right] f(\xi) d\xi$$

Resolvamos el problema no homogéneo de Dirichlet en el círculo:

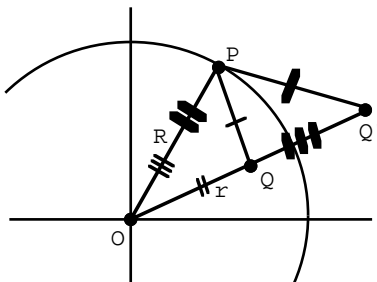
$$(P_2) \begin{cases} \Delta u = F(r,\theta) & \text{en } r < R \\ u(1,\theta) = f(\theta), \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Las coordenadas adecuadas son las polares. Las del punto Q fijo son (r,θ) y las del P variable las llamaremos (σ,ϕ) . La solución fundamental v en estas coordenadas queda entonces:

$$v = \frac{1}{2\pi} \ln \overline{PQ} = \frac{1}{4\pi} \ln [\sigma^2 + r^2 - 2r\sigma \cos(\theta - \phi)]$$



¿Dónde situar el punto imagen Q' ? Las cosas no son tan simples como en el ejemplo anterior. Es claro que su θ ha de ser la misma, pero ¿a qué distancia del origen O colocarlo? Podríamos llegar al resultado tanteando, pero nos limitamos a comprobar que la G es:



$$G(P,Q) = \frac{1}{2\pi} \left[\ln \overline{PQ} - \ln \overline{PQ'} + \ln \frac{R}{r} \right], \quad Q' = \left(\frac{R^2}{r}, \theta \right)$$

Como $G = v + v' + \text{cte}$ se cumple $\Delta G = 0$, pues v' es armónica en $\mathbf{R}^2 - \{Q'\}$ y $Q' \notin D$. Además si P está sobre la circunferencia se cumple:

$$\frac{\overline{PQ}}{r} = \frac{\overline{PQ'}}{R} \quad (\Rightarrow \ln \overline{PQ} - \ln \overline{PQ'} + \ln R - \ln r = 0)$$

ya que entonces los triángulos OQP y OPQ' son semejantes, pues tienen un ángulo común y dos lados proporcionales: $OQ'/R = R/OQ$.

Expresando la $G(P,Q)$ en términos de coordenadas obtenemos:

$$G(r,\theta;\sigma,\phi) = \frac{1}{4\pi} \ln [\sigma^2 + r^2 - 2r\sigma \cos(\theta - \phi)] - \frac{1}{4\pi} \ln \left[R^2 + \frac{r^2\sigma^2}{R^2} - 2r\sigma \cos(\theta - \phi) \right]$$

[$G=0$ si $P \in \partial D$, es decir, si $\sigma=R$; podíamos ahorrarnos la discusión geométrica]

y como $G_{\mathbf{n}} = G_{\sigma} \Big|_{\sigma=R}$ y $ds = R d\phi$, deducimos que la solución de (P_2) es:

$$u(r,\theta) = \int_0^R \int_0^{2\pi} \sigma G(r,\theta;\sigma,\phi) F(\sigma,\phi) d\phi d\sigma + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi) + r^2} f(\phi) d\phi$$

expresión mucho más compacta que las series del capítulo 7, aunque estas integrales, en general, no sean calculables explícitamente (y habrá que aproximarlas numéricamente, pero son aproximaciones también las sumas parciales de las series).

Los cálculos de funciones de Green en tres dimensiones son muy similares a los de dos. Si G es la solución del (P_G) (∂D es ahora una superficie) u es:

$$u = \iiint_D G F d\xi d\eta d\gamma + \oint_{\partial D} G_n f dS$$

Se ve de manera similar que la solución fundamental en el espacio es:

$$v = -\frac{1}{4\pi PQ} \quad [v_{rrr} + \frac{2}{r}v_r = 0 \rightarrow v = c_1 + \frac{c_2}{r}]$$

Los puntos imágenes respecto a planos son igual de sencillos y para la esfera de radio R vuelve a situarse el punto Q' a una distancia R^2/r del origen.

También se habla de funciones de Green para la ecuación de ondas y para la del calor. No entraremos en la primera (ya tenemos D'Alambert). Para la segunda, a diferencia de las que hemos calculado para Laplace, la expresión de la G es una serie y tiene mucha menor utilidad. Vimos que la solución de:

$$[P] \begin{cases} u_t - k u_{xx} = F(x,t), & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x,0) = u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

era:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t e^{-kn^2[t-s]} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(\xi,s) \operatorname{sen} n\xi d\xi \right) ds \right] \operatorname{sen} nx$$

es decir, intercambiando formalmente integrales y sumatorios:

$$u(x,t) = \int_0^t \int_0^{\pi} \left[\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-kn^2[t-s]} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} n\xi \right] F(\xi,s) d\xi ds \rightarrow$$

$$u(x,t) = \int_0^t \int_0^{\pi} G(x,\xi,t-s) F(\xi,s) d\xi ds, \quad \text{con } G(x,\xi,t-s) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-kn^2[t-s]} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} n\xi$$

Como todas las G es la solución de un problema que contiene una δ :

si $F(x,t) = \delta(x-x_0, t-t_0)$ con $x_0 \in (0, \pi)$ y $t_0 > 0$ la solución de $[P]$ para $t > t_0$ es:

$$\int_0^t \int_0^{\pi} G(x,\xi,t-s) \delta(\xi-x_0, s-t_0) d\xi ds = G(x,x_0, t-t_0)$$

con lo que $G(x,\xi,t-s)$ se puede mirar como la solución de $\begin{cases} u_t - k u_{xx} = \delta(x-\xi, t-s) \\ u(x,0) = u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$

9.2. Transformadas de Fourier.

Sea $f(x)$ definida en \mathbf{R} y absolutamente integrable $[\int_{-\infty}^{\infty} |f| < \infty]$.
Se llama transformada de Fourier de f a la función:

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx$$

Si la f es además C^1 se puede recuperar a partir de \hat{f} usando la fórmula de inversión (que, como otros resultados, no demostramos):

Teor 1: Sea $f \in C^1(\mathbf{R})$ y absolutamente integrable. Entonces $\forall x \in \mathbf{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{-ikx} dk$$

[en algunos libros no aparece el coeficiente $1/\sqrt{2\pi}$ en la definición de \hat{f} y aparece $1/2\pi$ en la fórmula de inversión; también se puede encontrar e^{-ikx} en la primera fórmula y e^{ikx} en la segunda].

A f se llamará transformada inversa de Fourier de \hat{f} . Denotaremos también $\mathfrak{F}f = \hat{f}$ y $\mathfrak{F}^{-1}\hat{f} = f$. Es evidente que \mathfrak{F} y \mathfrak{F}^{-1} son lineales.

Estudiemos algunas propiedades de la \mathfrak{F} y calculemos las transformadas de algunas funciones que nos aparecerán resolviendo EDPs:

Teor 2: Sean $f, f', f'' \in C(\mathbf{R})$ y absolutamente integrables. Entonces:

$$\mathfrak{F}(f') = -ik\mathfrak{F}(f) \quad , \quad \mathfrak{F}(f'') = -k^2\mathfrak{F}(f)$$

Teor 3: Se llama convolución de f y g en $(-\infty, \infty)$ a la función:

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-s) g(s) ds$$

Se tiene que $f * g = g * f$ y que $\mathfrak{F}(f * g) = \mathfrak{F}(f) * \mathfrak{F}(g)$, siempre que las transformadas que aparecen tengan sentido.

Teor 4: $\mathfrak{F}(e^{-ax^2}) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-k^2/4a}$; $\mathfrak{F}^{-1}(e^{-ak^2}) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-x^2/4a}$

$$\mathfrak{F}[\delta(x-a)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ika} \quad ; \quad \mathfrak{F}^{-1}(f(k)e^{iak}) = f(x-a)$$

$$\text{Si } h(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} \quad , \quad \mathfrak{F}(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ikb} - e^{ika}}{ik}$$

Frecuentemente un problema en EDP referente a una función u de dos variables puede reducirse a una EDO para la \hat{u} respecto de una de las variables. Resolviendo esta EDO respecto de la otra se puede determinar \hat{u} . Identificando la u de la que proviene esta \hat{u} o aplicando el teorema de inversión se podrá en ocasiones obtener la solución explícitamente, pero en muchos casos habrá que dejar la solución en términos de integrales no calculables.

Ejemplo 1. Problema para el calor en una varilla infinita:

$$(P_1) \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, x \in \mathbf{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), u \text{ acotada} \end{cases}$$

Supongamos que la u y la f son suficientemente regulares y tienden a 0 lo suficientemente rápido como para que se puedan utilizar los teoremas anteriores. Aplicando la transformada de Fourier en la variable x a la ecuación y al dato inicial se tiene el problema:

$$\begin{cases} \hat{u}_t + k^2 \hat{u} = 0 \\ \hat{u}(k, 0) = \hat{f}(k) \end{cases} \quad \text{cuya solución es} \quad \hat{u}(k, t) = \hat{f}(k) e^{-k^2 t}$$

La solución es la convolución de las transformadas inversas de cada uno de los factores (la del segundo la vimos en el teorema 4):

$$(*) \quad u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-(x-s)^2/4t} ds \equiv \int_{-\infty}^{\infty} G(x, s, t) f(s) ds$$

donde $G(x, s, t) = e^{-(x-s)^2/4t} / 2\sqrt{\pi t}$ es la llamada solución fundamental de la ecuación del calor que representa la temperatura del punto x en el instante t debida a una f inicial de la forma $\delta(x-s)$.

Una vez deducida (*), en vez de justificar los pasos que llevaron a ella, se prueba que proporciona realmente la solución de (P_1) con hipótesis más amplias incluso de las que nos permiten aplicar la \mathfrak{S} . En concreto, para cualquier f acotada y continua a trozos (*) nos da la solución única acotada de (P_1) que es continua para $t \geq 0$ a excepción de los puntos de $t=0$ en que f es discontinua.

De (*) se deduce también que, según nuestro modelo matemático, el calor se transmite a velocidad infinita: si $f > 0$ en un entorno de un x_0 y nula en el resto, está claro que $u(x, t) > 0$ por pequeño que sea t y grande que sea $|x-x_0|$. También se ve que u es C^∞ para $t > 0$ aunque f sea discontinua (¡aunque sea $f(x) = \delta(x-s)$!). Son propiedades claramente diferentes de la ecuación de ondas.

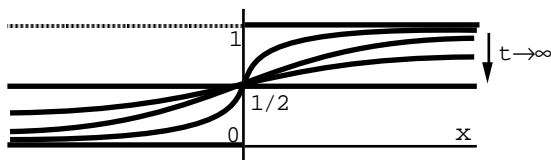
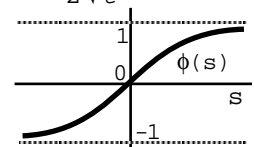
Apliquemos (*) para resolver un problema particular. Suponemos que:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-(x-s)^2/4t} ds$$

Haciendo $v = (s-x)/2\sqrt{t}$ la integral se transforma en:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-v^2} dv = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{t}} e^{-v^2} dv + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-v^2} dv = \frac{1}{2} \left[1 + \phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \right]$$

donde $\phi(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s e^{-v^2} dv$ es la llamada función error que aparece a menudo en la teoría de las probabilidades.



Como se observa, la solución tiende hacia $1/2$ para todo x cuando t tiende a ∞ .

Ejemplo 2. $(P_2) \begin{cases} u_t + u_x = g(x) \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$

Aplicando la \mathfrak{I} en la variable x (suponiendo como siempre que u, g y f son buenas; el rigor sólo se emplea al justificar el resultado):

$$\begin{cases} \hat{u}_t - ik\hat{u} = \hat{g}(k) \\ \hat{u}(k,0) = \hat{f}(k) \end{cases} \rightarrow \hat{u}(k,t) = p(k)e^{ikt} - \frac{\hat{g}(k)}{ik} \text{ con } p \text{ función arbitraria.}$$

Imponiendo el dato inicial: $\hat{u} = \hat{f}(k)e^{ikt} + \hat{g}(k) \left[\frac{e^{ikt}-1}{ik} \right]$

Por tanto: $u(x,t) = f(x-t) + \sqrt{2\pi} g(x) * h(x)$ siendo $h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,t] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$

Como $\int_0^t g(x-u) du = -\int_x^{x-t} g(s) ds$, concluimos que $u = f(x-t) + \int_{x-t}^x g(s) ds$

[Es fácil comprobar que la expresión satisface la ecuación y el dato inicial. La solución la podemos calcular también con las técnicas del capítulo 5:

$$dt/dx = 1 \rightarrow \begin{cases} \xi = x-t \\ \eta = x \end{cases} \rightarrow u_\eta = g(\eta) \rightarrow u = p(x-t) + \int_0^x g(s) ds \rightarrow$$

$$p(x) + \int_0^x g(s) ds = f(x) \rightarrow u = f(x-t) - \int_0^{x-t} g(s) ds + \int_0^x g(s) ds \text{ como antes]}$$

Para problemas en regiones semi-infinitas son útiles las transformadas seno y coseno que surgen como caso particular de la de Fourier por las propiedades de las funciones pares o impares. Se definen estas transformadas de funciones f absolutamente integrables en $[0, \infty)$ mediante:

$$\mathfrak{I}_s(f)(k) = \hat{f}_s(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \operatorname{sen} kx dx ; \quad \mathfrak{I}_c(f)(k) = \hat{f}_c(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \operatorname{cos} kx dx$$

La fórmula de inversión adopta la forma:

Teor 1':

$$\text{Sea } f \in C^1([0, \infty)) \text{ y sea } \int_0^\infty |f| < \infty. \text{ Entonces:}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{f}_s(k) \operatorname{sen} kx dk \text{ para todo } x \in (0, \infty)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{f}_c(k) \operatorname{cos} kx dk \text{ para todo } x \in [0, \infty)$$

Con hipótesis análogas a las del teorema 2 se tiene también:

Teor 2':

$$\mathfrak{I}_s(f'') = -k^2 \mathfrak{I}_s(f) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0)k ; \quad \mathfrak{I}_c(f'') = -k^2 \mathfrak{I}_c(f) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0)$$

[Por este resultado, la \mathfrak{I}_s será útil cuando nos den el valor de $u(0,t)$ mientras que la \mathfrak{I}_c la emplearemos si lo fijado es $u_x(0,t)$].

Estas transformadas aparecen en problemas del calor en $[0, \infty)$:

Teor 4':

$$\mathfrak{I}_s^{-1}(ke^{-ak^2}) = \frac{1}{[2a]^{3/2}} xe^{-x^2/4a} ; \quad \mathfrak{I}_c^{-1}(e^{-ak^2}) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-x^2/4a}$$

Ejemplo 3. Calor en una varilla semi-infinita:

$$(P_3) \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = 0, u(0, t) = g(t) \\ u \text{ acotada} \end{cases}$$

Sea $\hat{u}(k, t)$ la transformada seno de $u(x, t)$ respecto a x (suponiendo como siempre que existe). El problema para \hat{u} es:

$$\hat{u}_t + k^2 \hat{u} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} g(t) k, \hat{u}(k, 0) = 0 \rightarrow \hat{u}(k, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-k^2 t} \int_0^t g(s) k e^{k^2 s} ds$$

Utilizando la fórmula de inversión, cambiando el orden de integración y utilizando el teorema 4':

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^t g(s) k e^{-k^2(t-s)} \text{sen} kx ds dk = \frac{2}{\pi} \int_0^t g(s) \int_0^\infty k e^{-k^2(t-s)} \text{sen} kx dk ds$$

$$\rightarrow u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{[t-s]^{3/2}} e^{-x^2/4(t-s)} g(s) ds$$

Ejemplo 4. Ondas semi-infinita:

$$(P_4) \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = t^2 \end{cases}$$

$$\mathfrak{S}_s u = \hat{u} \rightarrow \hat{u}_{tt} + k^2 \hat{u} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} t^2 k \rightarrow \hat{u} = p(k) \cos kt + q(k) \text{sen} kt + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{t^2}{k} - \frac{2}{k^3} \right]$$

$$\hat{u}(k, 0) = \hat{u}_t(k, 0) = 0 \rightarrow \hat{u} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{t^2}{k} + \frac{2}{k^3} (\cos kt - 1) \right] \rightarrow u = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{t^2}{k} + \frac{2}{k^3} (\cos kt - 1) \right] \text{sen} kx dk$$

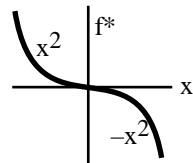
La integral parece muy complicada. Vamos a calcular sólo $u(1, 2)$ ya que entonces parece simplificarse:

$$u(1, 2) = \frac{8}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{\text{sen} k}{k} - \frac{\text{sen}^3 k}{k^3} \right] dk = (\text{tablas}) = \frac{8}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8} \right] = 1$$

Lleguemos a este valor a partir de D'Alembert (mejor camino). Lo primero es hacer homogénea la condición de contorno (\mathfrak{S}_s y \mathfrak{S}_c no exigen este paso):

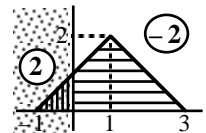
Tanteando un poco se ve que $v = x^2 + t^2$ satisface la condición y la ecuación:

$$w = u - v \rightarrow \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0, x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ w(x, 0) = -x^2, w_t(x, 0) = 0 \\ w(0, t) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0, x, t \in \mathbf{R} \\ w(x, 0) = f^*(x), w_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$



$$\rightarrow w(1, 2) = \frac{1}{2} [f^*(-1) + f^*(-3)] = -4 \rightarrow u(1, 2) = 5 - 4 = 1$$

$$\text{Con menos vista, } w = u - t^2 \rightarrow \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = -2 \\ w(x, 0) = w_t(x, 0) = 0 \\ w(0, t) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = \begin{cases} 2 & x < 0 \\ -2 & x > 0 \end{cases} \\ w(x, 0) = w_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$



$$\rightarrow w(1, 2) = \frac{1}{2} [(2) \text{ area} + (-2) \text{ area}] = -3 \rightarrow u(1, 2) = -3 + 4 = 1$$

bibliografía

- BD Boyce-Di Prima. ECUACIONES DIFERENCIALES Y PROBLEMAS CON VALORES EN LA FRONTERA. Limusa
- Si Simmons. ECUACIONES DIFERENCIALES (CON APLICACIONES Y NOTAS HISTORICAS). McGraw-Hill
- Br Braun. ECUACIONES DIFERENCIALES Y SUS APLICACIONES. Interamericana
- R Ross. ECUACIONES DIFERENCIALES. Reverté
- E Elsgoltz. ECUACIONES DIFERENCIALES Y CALCULO VARIACIONAL. Mir
- MCZ Marcellán-Casasús-Zarzo. ECUACIONES DIFERENCIALES. PROBLEMAS LINEALES Y APLICACIONES. McGraw-Hill
- PA Puig Adam. CURSO TEORICO-PRACTICO DE ECUACIONES DIFERENCIALES APLICADO A LA FISICA Y TECNICA.
- MU Myint-U. PARTIAL DIFFRENTIAL EQUATIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS. Elsevier
- W Weimberger. ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES. Reverté
- T Tjonov-Samarski. ECUACIONES DE LA FISICA MATEMATICA. Mir
- Sp Stephenson. INTRODUCCION A LAS ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES. Reverté
- Ch Churchill. SERIES DE FOURIER Y PROBLEMAS DE CONTORNO. McGraw-Hill
- J John. PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS. Springer-Verlag
- Sk Stakgold. GREEN'S FUNCTIONS AND BOUNDARY VALUE PROBLEMS. Wiley

Los primeros cinco libros (básicamente de EDOs y ya citados en la primera parte de los apuntes) tienen introducciones a las EDPs. En concreto, BD, Br, R y Si estudian los problemas de contorno para EDOs y el método de separación de variables. R clasifica también las EDPs de segundo orden con coeficientes constantes. E trata con detalle las EDPs de primer orden.

Los dos siguientes, el MCZ y el clásico PA (de 1950), son mixtos de EDOs y EDPs y abarcan una mayor parte del curso.

Los demás libros son más bien de EDPs: MU, W y T incluyen casi todos los temas de los apuntes (y muchos otros que no se tratan en ellos). Sp y Ch tienen bastantes menos páginas (y sirven para parte del curso). J y Sk son de mayor nivel y bastante más difíciles de leer.

Gran parte de los libros de EDPs, en vez de organizarse en torno a los métodos de resolución (como en los apuntes), estudian por separado y con diferentes técnicas las ecuaciones hiperbólicas, elípticas y parabólicas.

Las EDPs de primer orden se estudian en E, PA y J, pero en el caso más general de las ecuaciones cuasilineales (también tratan las no lineales). La reducción a forma canónica y las cuestiones de unicidad se ven en casi todos los libros de EDPs. Véase por ejemplo MU, W o T. Para un estudio serio de los problemas de Cauchy ver el J. La deducción de las ecuaciones y el significado físico de los problemas se puede mirar, por ejemplo, en Bd, W o T (en éste se tratan otros muchos problemas de la física).

Para el capítulo 6 se puede consultar el PA, el MU, el W, el T o el J. En ellos se deducen las fórmulas de 6.2 no demostradas en los apuntes.

Para el 7 es recomendable leer BD y Si. La teoría general de problemas de contorno, funciones de Green, desarrollos en autofunciones... en el Sk. Hay demostraciones menos generales (con matemáticas más elementales) en Ch o W.

La separación de variables (capítulo 8) está en casi todos los libros. Buenas introducciones hay en los cuatro primeros y en el Sp. Para precisiones de convergencia y problemas de varias variables ver MU, W o T.

La sección 9.1 sigue más o menos el MU. W, T y Sp también estudian las funciones de Green por otros caminos. Cuestiones más avanzadas en el Sk. Para la 9.2 ver Ch, MU, Sp y sobre todo W (tiene introducción a la variable compleja y utiliza también la transformada de Laplace para EDPs).

El MCZ da métodos numéricos para problemas de contorno y EDPs (lo que no hacen los demás libros, salvo unas pocas ideas del W).