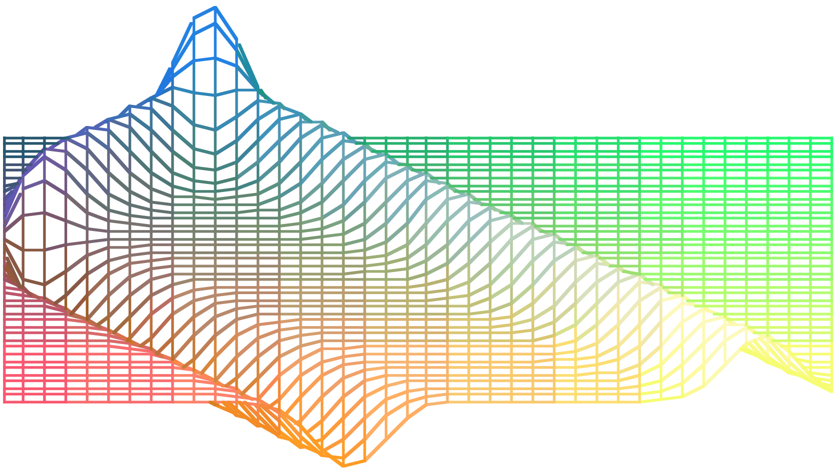
2000

apuntes de ecuaciones en derivadas parciales



Pepe Aranda
Métodos Matemáticos
Físicas Complutense
pparanda@fis.ucm.es

índice

Introducción

Esta segunda parte de los apuntes está dedicada al estudio de las **ecuaciones en derivadas parciales** (EDPs), aunque también se estudiarán los **problemas de contorno** para las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs). Recordamos que una ecuación en derivadas parciales es una ecuación en la que aparece una función incógnita de varias variables y algunas de sus derivadas parciales. Todas las EDPs que veremos serán **lineales**. Más en concreto, salvo un breve estudio de las lineales de **primer orden**, trataremos de EDPs **lineales de segundo orden**, del tipo:

$$[1] \quad Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + c\, u = d$$

donde u, a_{ij}, b_j, c y d son funciones de $(x_1,\ldots,x_n)$. Una **solución** de [1] será una función $u(x_1,\ldots,x_n)$ de clase C^2 en un dominio D de $\mathbf{R}^n$ que sustituida en la ecuación la convierte en una identidad.

Entre las EDPs lineales de segundo orden se encuentran muchas ecuaciones de la física. Entre ellas las tres clásicas:

ecuación de ondas $u_{tt} - c^2\Delta u = 0$

ecuación del calor $u_t - k\Delta u = 0$

y **ecuación de Laplace** $\Delta u = 0$

que son ejemplos de los tres grandes tipos en que se clasifican (**hiperbólicas**, **parabólicas** y **elípticas**, respectivamente). La teoría de las EDPs viene a ser la generalización del estudio de estos tres problemas. Sus propiedades son tan diferentes que no existen teorías generales como la de las EDOs lineales.

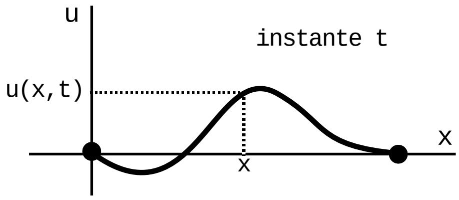
En el capítulo 5 veremos que, normalmente, no es posible hallar la solución general de una EDP. Eso será tal vez posible para las de primer orden y para unas pocas de segundo (en particular, para la de ondas). Además se verá qué condiciones adicionales (iniciales o de contorno) hay que imponer a las EDPs clásicas para que tengan solución única. En el 6 estudiaremos la ecuación de ondas, primero para una u(x,t) y luego, con menos detalles, para dos y tres dimensiones espaciales.

El capítulo 8 trata el método de **separación de variables** para resolver (en recintos sencillos) las ecuaciones clásicas (homogéneas y no homogéneas). Este método exigirá resolver problemas de contorno para EDOs y expresará las soluciones en términos de series de Fourier. La teoría de los problemas de contorno (muy diferente de la de los de valores iniciales) y un repaso de dichas series se dará previamente en el capítulo 7.

El último capítulo, el 9, estudia dos temas independientes: las **funciones de Green** para la ecuación de Laplace y la utilización de la **transformada de Fourier** para resolver algunas EDPs (en particular, la del calor en la recta infinita).

Para acabar esta introducción, describamos el significado físico de las ecuaciones clásicas. Interpretémoslas únicamente en sus versiones más sencillas (que son las más tratadas en los apuntes): cuando la u es función de dos variables.

Comencemos con la ecuación de **ondas unidimensional** o ecuación de la **cuerda vibrante** . Consideremos las oscilaciones de una cuerda totalmente elástica, tensa y fija en sus extremos. Se supone que sus oscilaciones son siempre transversales y de pequeña amplitud. En esas condiciones se puede ver que si u(x,t) representa el desplazamiento vertical del punto de abscisa x en el instante t, la función u(x,t) satisface la EDP:



$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t)$$

donde $c^2 = T_o/\rho$, con T_o fuerza de tensión en los extremos, ρ masa por unidad de longitud (densidad lineal) y F(x,t) fuerza externa por unidad de masa que actúa en dirección vertical sobre el punto x en el instante t. No olvidemos que el modelo matemático de esta cuerda ideal es sólo una simplificación de la realidad; lo mismo ocurre con las siguientes.

La distribución de temperaturas a lo largo del tiempo en una varilla delgada (que podemos suponer unidimensional) viene regida por la **ecuación del calor**:

$$u_t - k u_{xx} = 0$$

donde u(x,t) representa la temperatura del punto de abscisa x en el instante t y k>0 es una constante proporcional a la conductibilidad e inversamente proporcional a la densidad y al calor específico. Si existiesen fuentes de calor en el interior de la varilla deberíamos escribir una F(x,t) en el segundo miembro de la ecuación.

La **ecuación de Laplace**:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

puede describir, entre otras situaciones físicas, la distribución estacionaria de temperaturas en una placa bidimensional. La existencia de fuentes de calor en el interior de la superficie aportaría una F en el segundo miembro (ecuación de Poisson). Frente a las dos ecuaciones anteriores que describían la evolución de un sistema a lo largo del tiempo, ésta describe situaciones estacionarias.