problemas 5

1. Resolver (si es posible) los siguientes problemas de Cauchy:

$3x^2u_y+u_x=x^5$ $u(x,0)=x^3$	$yu_y+(2y-x)u_x=x$ $u(x,1)=0$	$xu_y-yu_x=2xyu$ $u(x,0)=x$
$u_x-u_y=\frac{x-y}{xy}\,u$ $u(x,1)=x$	$u_y+3y^2u_x=\frac{2u}{y}+6y^4x$ $u(x,1)=x^2$	$yu_y+e^{x^2}u_x=2x$ $u(x,0)=0$

2. Precisar para qué valores de n entero positivo la condición $u(x,x^n)=x^n$ determina una única solución de la ecuación $u_x+yu=y^2$ cerca de (0,0).

3. Determinar en torno a qué puntos tienen solución única los problemas:

$\operatorname{sen} y\, u_y+u_x=1$ $u(0,y)=1$	$(x^2+y^2)u_y+u_x=0$ $u(x,0)=0$	$(x^2+y)u_y+xu_x=0$ $u(x,x^2)=x$

4. Sea $u_y-2yu_x=2yu$. Hallar la solución que satisface los datos de Cauchy: i) $u(x,1)=e^{-x}$, ii) $u(2y,y)=0$, discutiendo la unicidad de las soluciones.

5. Hallar la solución y estudiar la unicidad de: $u_y+xu_x = -x^2e^{-y}$, $u(-1,y)=0$.

6. Sea (E) $(y+1)u_y+xu_x=0$. Dibujar sus características.
Probar que (E) tiene una única solución satisfaciendo $u(x,0)=f(x)$. Probar que si f no es constante dicha solución no puede estar definida en todo $\mathbf{R}^2$.
¿En torno a qué puntos hay más de una solución de (E) que cumple $u(y^2,y)=0$?
Estudiar si existen soluciones de (E) satisfaciendo $u(0,y)=g(y)$.

7. Demostrar que no existe solución de $u_x=0$ que esté definida en todo el semiplano $y\geq 0$ y que contenga la curva Γ: $y=x^2, z=x^3$.
Estudiar en qué entornos de Γ hay soluciones únicas locales.

8. Sea (E) $u_t-2tu_x+\frac{2tu}{1+t^2}=0$. Hallar la solución que satisface $u(x,0)=f(x)$.
Dibujar $u(x,2)$ en el caso particular en que $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}^2\pi x & \text{si } |x|\leq 1 \\ 0 & \text{si } |x|>1 \end{cases}$
Escribir un problema de Cauchy para (E) que tenga infinitas soluciones.

9. Sea (E) $t^2u_t+u_x=2xu$.
Hallar la solución de (E) que cumple $u(x,1)=f(x)$, estudiando su unicidad.
En particular, si $f(x)=\operatorname{sen}^2 x$ en $[0,\pi]$ y 0 en el resto de $\mathbf{R}$, hallar $u(3,\frac{1}{2})$.
Plantear un problema de Cauchy para (E) que tenga infinitas soluciones.

10. Sea (E) $A(x,y,u)u_y+B(x,y,u)u_x = C(x,y,u)$ [ecuación cuasilineal].
Supongamos que las curvas integrales del sistema de EDOs: $\frac{du}{dx}=\frac{C}{B}$, $\frac{dy}{dx}=\frac{A}{B}$
vienen dadas por $\eta(x,y,u)=C_1$, $\xi(x,y,u)=C_2$ [curvas características de (E)].
Probar que $\eta(x,y,u) = p[\xi(x,y,u)]$ (o bien, $\xi(x,y,u) = q[\eta(x,y,u)]$) para cualquier función p (q) arbitraria es solución de (E).

11. Hallar (si se puede) la solución o soluciones de las siguientes ecuaciones que satisfacen cada uno de los datos de Cauchy que se indican:

$u_y+uu_x=0$ con i) $u(x,0)=x$, ii) $u(0,y)=0$

$uu_y+xu_x=u$ con i) $u(x,0)=1$, ii) $u(0,y)=1$

$u_y+u_x=u^2$ con i) $u(x,0)=x$, ii) $u(x,x)=1$

12. Reducir a forma canónica y, si es posible, encontrar la solución general:

$t^2u_{tt}-x^2u_{xx}=0$ $\quad$ $u_{yy}+2u_{xy}+2u_{xx}=0$ $\quad$ $x^2u_{xx}-2xyu_{xy}+y^2u_{yy}=e^x$

$e^xu_{xx}+e^yu_{yy}=u$ $\quad$ $u_{xx}-3yu_x+2y^2u=y$ $\quad$ $u_{xx}+4u_{xy}-5u_{yy}+6u_x+3u_y=9u$

13. Escribir (E) $u_{tt}+2u_{xt}=2$ en forma canónica y hallar su solución general. De los datos de Cauchy: i) $u(x,0)=u_t(x,0)=0$, ii) $u(0,t)=0, u_x(0,t)=t$, hay unos que determinan una única solución de (E). Hallarla en ese caso.

14. Sea [E] $u_{tt}-x^2u_{xx}-u_t=0$. Hallar su solución general.
Determinar la solución de [E] que satisface $u(x,0)=2x$, $u_t(x,0)=x$.
Escribir (en el caso de que exista) alguna solución de [E], distinta de la $u\equiv 0$, que satisfaga $u(e^t,t)=u_t(e^t,t)=0$.

15. Sea $u_{tt}-2u_{tx}+u_{xx}=2t^{-2}u$.
Calcular la solución que satisface $u(x,1)=0$, $u_t(x,1)=g(x)$.
En el caso particular $g(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\le 0\\ \text{sen}^4\pi x & \text{si } x\ge 0\end{cases}$ hallar y dibujar $u(x,2)$.

16. a) Escribir (E) $4yu_{yy}-u_{xx}+2u_y=0$ en forma canónica para $y>0$ y para $y<0$.
b) Resolver (E) con los datos iniciales: $u(x,1) = 2x$, $u_y(x,1) = x$.

17. Resolver los siguientes problemas de Cauchy ($x,t\in\mathbf{R}$):

$\begin{cases}u_{tt}-4u_{xx}=0\\ u(x,x)=x^2\\ u_t(x,x)=0\end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=0\\ u(x,x)=0\\ u_t(x,x)=0\end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=u_t+u_x\\ u(x,0)=x\\ u_t(x,0)=0\end{cases}$

18. Sea (E) $Au_{yy}+Bu_{xy}+Cu_{xx}+Du_y+Eu_x+Fu=G(x,y)$, con $A,B,\dots,F$ constantes.
Probar que, si (E) no es parabólica, un cambio de variable $u=e^{py}e^{qx}w$, con p y q constantes adecuadas, lleva (E) a una ecuación (E*) en la que no existen derivadas de primer orden. ¿Para qué relación entre las constantes $A,\dots,F$ no tiene (E*) término en w?
Aplicar lo anterior para hallar la solución general de $u_{xy}+2u_y+3u_x+6u=1$.
Probar que cualquier ecuación parabólica o es resoluble o se puede escribir mediante cambios de variable en la forma $w_\eta+E^*w_{\xi\xi}=G^{**}(\xi,\eta)$.

19. Estudiar la unicidad de los problemas:

$\begin{cases}u_t-ku_{xx}=F(x,t),\ x\in(0,L), t>0\\ u(x,0)=f(x)\\ u_x(0,t)+au(0,t)=0\\ u_x(L,t)+bu(L,t)=0\end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases}u_{tt}-(c(x)u_x)_x=F(x,t),\ x\in[0,1], t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=f(x),\ u_t(x,0)=g(x)\\ u(0,t)=0,\ u(1,t)=0\\ \qquad (c \text{ de } C^1 \text{ y positiva})\end{cases}$

$\begin{cases}\Delta u-k^2u = F \text{ en } D\\ u = f \text{ en } \partial D\end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases}\Delta u = F \text{ en } D\\ u = f \text{ en } C_1\\ u_{\mathbf{n}} = g \text{ en } C_2\\ \text{si } C_1\cup C_2=\partial D, C_1\cap C_2=\phi\end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases}u_t-k\Delta u = F(x,y,t) \text{ en } D\\ u(x,y,0)=f(x,y) \text{ en } D\\ u(x,y,t)=0 \quad \text{en } \partial D\end{cases}$

(D dominio acotado en $\mathbf{R}^2$)

20. Si la distribución inicial de temperaturas en una varilla es $f(x)=2x^2-3x$, $x\in[0,2]$, y la temperatura para $t>0$ en los extremos es $h_0(t)=-t/(1+t^2)$, $h_2(t)=2\,\text{sen}\,t/t$, y suponemos que no existen fuentes de calor en el interior de la varilla, determinar la máxima y mínima temperaturas alcanzadas en la varilla para $t\ge 0$.

problemas 6

1. Resolver por diferentes caminos: $\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}=e^{-t}, & x,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=x^2, u_t(x,0)=-1 \end{cases}$

2. Para los problemas:

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, \ x,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\begin{cases}\operatorname{sen}\pi x, & 2\le x\le 3\\ 0 & \text{resto de } \mathbf{R}\end{cases} \\ u_t(x,0)=\begin{cases}\operatorname{sen}\pi x, & -4\le x\le -3\\ 0 & \text{resto de } \mathbf{R}\end{cases}\end{cases} \qquad \begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, \ x\in[0,4], t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\begin{cases}\operatorname{sen}\pi x, & 2\le x\le 3\\ 0 & \text{resto de } [0,4]\end{cases} \\ u_t(x,0)=u(0,t)=u(4,t)=0\end{cases} \qquad \begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, \ x\ge 0, t\in\mathbf{R} \\ u_t(x,0)=\begin{cases}\operatorname{sen}\pi x, & 1\le x\le 2\\ 0, & [0,1]\cup[2,\infty\end{cases} \\ u(x,0)=u(0,t)=0\end{cases}$$

i) dibujar el dominio de influencia y ver cuando la cuerda está en reposo; ii) dibujar u(x,1), u(x,2) y u(x,3); iii) dibujar u(3,t), t≥0.

3. Para los siguientes problemas:

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, \ x,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=0 \\ u_t(x,0)=\begin{cases}1, & |x|\le 1/2\\ 0, & |x|>1/2\end{cases}\end{cases} \qquad \begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=\operatorname{sen}\pi x, \ x\in[0,1], t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\operatorname{sen}\pi x \\ u_t(x,0)=\operatorname{sen}\pi x \\ u(0,t)=u(1,t)=0\end{cases} \qquad \begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, \ x\ge 0, t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\begin{cases}x(1-x), & 0\le x\le 1\\ 0, & x\ge 1\end{cases} \\ u_t(x,0)=u(0,t)=0\end{cases}$$

i) hallar u(x,1) y u(1,t), t≥0; ii) dibujar u(x,1/2), u(x,1) y u(x,2).

4. Sea el problema $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=\delta(x), & x,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 \end{cases}$.

Hallar la expresión analítica de su solución para t≥0. Dibujar u(x,2) y u(3,t). Analizar la continuidad y diferenciabilidad de la solución.
[ayuda: v(x)=|x|/2 satisface v"(x)=δ(x)]

5. Sea $\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}=F(x,t), & x,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 \end{cases}$, con $F(x,t)=\begin{cases}1, & x\in[1,2], t\ge 0\\ 0, & \text{en el resto}\end{cases}$.

Calcular u(-1,1) y u(1,1). Calcular y dibujar u(x,1).

6. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, \ x,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\begin{cases}\operatorname{sen}x, & x\in[0,\pi]\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}, \quad u_t(x,0)=\begin{cases}\cos x, & x\in[0,\pi]\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}\end{cases}$

Demostrar que su solución es una onda que viaja hacia la izquierda.

7. Sea $\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}=0, \ x\in[0,2], t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=4x-x^3, u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=u(2,t)=0 \end{cases}$ Hallar $u(\frac{3}{2},\frac{3}{4})$. Dibujar u(x,2). Hallar u(x,1).

8. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, \ x\in[0,L], t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=t, u(L,t)=0 \end{cases}$

Hallar la expresión analítica de u(x,T) con T∈[0,L]. Describir la evolución de la cuerda en el intervalo de tiempo t∈[0,L]. Hallar u(x,kL), k=1,2,…

9. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, \ x\ge 0, t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=f(x), \ u_t(x,0)=g(x), \ u_x(0,t)=0 \end{cases}$

Escribir su solución extendiendo f y g de forma adecuada a todo **R** y aplicando la fórmula de D'Alembert. ¿Que condiciones deben cumplir f y g para que la solución sea clásica? ¿Se invierten las ondas al reflejarse en x=0? ¿Cómo son los dominios de influencia?

10. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=6x, \ x\geq 0, t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=u_x(0,t)=0 \end{cases}$. Calcular $u(0,t)$ para todo t.

11. Sea $u_{tt}-e^{2t}u_{xx}-u_t=0$. Hallar su solución general y la particular que satisface $u(x,0)=f(x)$, $u_t(x,0)=0$. Escribir un problema de Cauchy para dicha ecuación que no tenga solución, y otro con infinitas soluciones.
Si $f(x)=\begin{cases} 1-2|x|, \text{ si } |x|\leq 1/2 \\ 0, \text{ en el resto} \end{cases}$, dibujar la solución para $t=1$ y $t=2$.
Dibujar en el plano xt las características que pasan por $(0,0)$ y $(0,1)$.
¿Cuál es el dominio de influencia sobre la solución del valor inicial de f en $x=0$? ¿Cuál es el dominio de dependencia de $u(0,1)$ de los valores de f?

12. El potencial v y la intensidad i en una linea telegráfica satisfacen:

$$v_x+Li_t+Ri=0 \quad , \quad i_x+Cv_t+Gv=0$$

donde L,R,C y G son constantes características de la linea.
a) Hallar la ecuación de segundo orden (E) que verifica el potencial v.
b) Si $GL=RC$, comprobar que un cambio adecuado reduce (E) a la ecuación de ondas y hallar $v(x,t)$ si inicialmente $v(x,0)=V(x)$ e $i(x,0)=I(x)$.

13. Resolver $\begin{cases} u_{tt}-c^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})=0 \\ u(x,y,z,0)=f(x,y,z) \\ u_t(x,y,z,0)=0 \end{cases}$, si $f(x,y,z)=\begin{cases} \text{a] } x+y+z \\ \text{b] } x+y \\ \text{c] } x \end{cases}$.

14. Hallar $u(0,t)$ para $t\geq 0$ en los seis casos y $u(r,t)$ cuando se pueda para:
$\begin{cases} u_{tt}-\Delta u=0 \\ u(r,0)=f(r) \\ u_t(r,0)=g(r) \end{cases}$ con a) $f(r)=g(r)=r^2$, b) $f(r)=0$, $g(r)=\begin{cases} 1-r^2, & r\leq 1 \\ 0 \ , & r\geq 1 \end{cases}$
vistos como problemas en i)una, ii)dos y iii)tres dimensiones [r es la distancia de un punto (de la recta, del plano, del espacio) al origen]

15. Sea $\begin{cases} u_{tt} - (u_{rr}+\frac{2}{r}u_r) = 0 \ , \ r\geq 0 \\ u(r,0)=0, \ u_t(r,0)=e^{-r^2} \end{cases}$
Hallar $u(r,t)$ para $r>0$. Hallar $u(0,t)$. Dibujar u para varios valores de t.

16. Sea $\begin{cases} u_{tt} - (u_{rr}+\frac{2}{r}u_r) = 0 \ , \ r\geq 0 \\ u(r,0)=6, \ u_t(r,0)=5r^3 \end{cases}$. Hallar $u(2,3)$.

17. Sea $\begin{cases} u_{tt} - (u_{rr}+\frac{2}{r}u_r) = 0 \ , \ r\geq 0 \\ u(r,0)=r, \ u_t(r,0)=0 \end{cases}$. Calcular $u(1,t)$.

18. Sean los problemas:
$\begin{cases} v_{tt}-v_{xx}=0 \ , \ x\geq 0, t\in\mathbf{R} \\ v(x,0)=xf(x) \\ v_t(x,0)=v(0,t)=0 \end{cases}$ $\begin{cases} u_{tt} - (u_{rr}+\frac{2}{r}u_r) = 0 \ , \ r\geq 0, t\in\mathbf{R} \\ u(r,0)=f(r) \\ u_t(r,0)=0 \end{cases}$
donde $f(x)=(x-2)(x-4)$ si $x\in[2,4]$ y 0 en el resto de $[0,\infty)$.
Dibujar $v(x,3)$, $v(x,6)$, $u(r,3)$ y $u(r,6)$. Comentar la evolución a lo largo del tiempo de las soluciones de ambos problemas.

19. Estudiar qué tipo de ondas viajeras [soluciones $u(x,t)=f(x-ct)$] admite la ecuación no lineal (de Sine-Gordon): $u_{tt}-u_{xx}+\operatorname{sen} u=0$.

problemas 7

1. Determinar los autovalores y autofunciones asociadas:

$y''+\lambda y=0$, $y(0)=y'(1)=0$ $y''+\lambda y=0$, $y(-1)=y(1)=0$ $y''+\lambda y=0$, $y(0)=y(1)+y'(1)=0$

$y''-2y'+y+\lambda y=0$, $y(0)=y(1)=0$ $t^2y''+ty'+\lambda y=0$, $y(1)=y(e)=0$ $t^2y''+ty'+[\lambda t^2-\frac{1}{4}]y=0$, $y(1)=y(4)=0$

2. Estudiar los autovalores y autofunciones del ejemplo 4 de 7.1:

$$\begin{gathered} y''+\lambda y=0 \\ y(0)=y'(0),\, y(1)=-y'(1) \end{gathered}$$

3. Sea $\begin{gathered} y''+\lambda y=0 \\ \alpha y(0)+y'(0)=y(1)=0 \end{gathered}$.
Probar que posee infinitos autovalores positivos $\forall\alpha$. Discutir si existen autovalores negativos ó 0. Estudiar la evolución con α del menor autovalor. Comprobar para $\alpha=0$ que la n-sima autofunción posee n-1 ceros en (0,1).

4. Hallar cotas superior e inferior para los autovalores positivos de

$$\begin{gathered} t^2y''-2ty'+[2+\lambda t^2]y=0 \\ y(\pi)=y(2\pi)=0 \end{gathered}$$

comparando con una ecuación de coeficientes constantes.
Con el cambio $y=xt$ resolver explícitamente el problema y comprobar la validez de las acotaciones anteriores.

5. Sea $\begin{gathered} y''+[\lambda-V(t)]y=0 \\ y(a)=y(b)=0 \end{gathered}$ y supongamos que $m<V(t)<M$ para todo $t\in[a,b]$.
Hallar cotas superior e inferior para los autovalores del problema.

6. Determinar los autovalores de $\begin{gathered} y''+[\lambda-V(t)]y=0 \\ y(0)=y(2)=0 \end{gathered}$ si $V(t)=\begin{cases} 0, & \text{si } 0<x<1 \\ 1, & \text{si } 1<x<2 \end{cases}$.

7. Hallar autovalores y autofunciones de los problema singulares:

$\begin{gathered} [1-t^2]y''-ty'+\lambda y=0 \\ y,y' \text{ acotadas en } \pm1 \end{gathered}$ (ecuación de Tchebycheff).

$\begin{gathered} y''+(2p+1-t^2)y=0,\ p \text{ cte}\geq0 \\ y\to0 \text{ cuando } |t|\to\infty \end{gathered}$ (hacer $y=u\,e^{-t^2/2}$ para obtener Hermite)

8. Desarrollar $f(t)=t^2$, $t\in[0,1]$ en serie de i) $\{\operatorname{sen} n\pi t\}$, ii) $\{\cos n\pi t\}$.
Dibujar algunas sumas parciales de las series obtenidas.

9. Desarrollar f(t) en serie de senos y cosenos en $[-\pi,\pi]$, estudiando la convergencia puntual y uniforme de dicha serie si:

$f(t)=\operatorname{sen}^2 t$ $f(t)=|\operatorname{sen} t|$ $f(t)=\operatorname{sen}\frac{t}{2}$ $f(t)=\begin{cases} -\pi, & -\pi\leq t<0 \\ \operatorname{sen} t, & 0\leq t\leq\pi \end{cases}$

10. Desarrollar $f(t)=t$ en serie de autofunciones de cada uno de los problemas del problema 1.

11. Escribir los tres primeros términos del desarrollo de $f(t)=1$ en serie de autofunciones del problema singular:

$$\begin{gathered} ([1-t^2]y')'+\lambda y=0 \\ y(0)=0,\ y \text{ acotada en } 1 \end{gathered}$$

12. Desarrollar la función $f(t)=1-t^2$ en serie de autofunciones del problema:

$$\begin{gathered} (ty')'+\lambda ty=0 \\ y \text{ acotada en } 0,\ y(1)=0 \end{gathered}$$

13. Estudiar la unicidad de $y''=f(t)$, $t\in(0,1)$ [ecuación de Poisson en una dimensión] con diferentes condiciones de contorno, utilizando técnicas similares a las de las ecuaciones en derivadas parciales.

14. Determinar para qué valores de α existe solución del problema:

$$\begin{array}{l} y'' = e^{-(t-1)^2} \\ \alpha y(0)+(1-\alpha)y'(0)=y(1)=0 \end{array}$$

15. Estudiar para qué valores de n (entero positivo) existe solución de:

$$\begin{array}{l} y''+ny = \cos^n t \\ y(0)=y(2\pi),y'(0)=y'(2\pi) \end{array}$$

16. Estudiar según los valores de b cuántas soluciones posee el problema:

$$\begin{array}{l} ty''+2y' = 1 \\ y'(1)=2y'(2)+by(2)=0 \end{array}$$

Para b=1 hallar la solución mediante la función de Green.

17. Sea (P) $\begin{array}{l} \cos t\, y''-2\operatorname{sen} t\, y' = f(t) \\ y'(-\pi/4)=y'(\pi/4)-ay(\pi/4)=0 \end{array}$.

Determinar para qué valor de a el problema (P) no tiene solución única.
Para ese a dar una f(t) para el que (P) tenga infinitas soluciones.
Calcular la solución de (P) utilizando la función de Green si a=2 y f(t)=1.

18. Discutir, según las constantes c y a, cuántas soluciones tiene el problema

$$\begin{array}{l} y''+\dfrac{2y'}{t} = 1+\dfrac{c}{t} \\ y'(1)+ay(1)=y'(2)=0 \end{array}$$

Para c=0 y a=1, hallar la solución haciendo uso de la función de Green.

19. Hallar la función de Green y la solución para f(t)=t

$\begin{array}{l} y''=f(t) \\ y(0)=y'(1)=0 \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{l} t^2y''+ty'-y=f(t) \\ y(1)+y'(1)=y(2)=0 \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{l} y''+y'-2y=f(t) \\ y(0)-y'(0)=y(1)=0 \end{array}$

20. Hallar una fórmula para la solución de $\begin{array}{l} y''=f(t) \\ y(1)=a,y(2)=b \end{array}$

en términos de la función de Green, la función f y las constantes a y b.
Calcular su solución si f(t)=1, a=0, b=1.

21. Considérese $\begin{array}{l} u''+r^{-1}u'=F(r) \\ u'(1)-au(1)=A,u'(2)+bu(2)=B \end{array}$ con $a,b\geq 0$.

Precisar cuándo tiene solución o soluciones [se puede interpretar como un problema para la ecuación de Laplace en el plano con simetría radial].
Para $F(r)=r^{-2}$,a=1,b=0,A=B=0 resolverlo haciendo uso de la función de Green.

22. Sea el problema singular $\begin{array}{l} (ty')'=f(t) \\ y \text{ acotada en } 0,\ y(1)=0 \end{array}$.

Hallar su función de Green utilizando la fórmula para problemas regulares.
Comprobar que proporciona la solución i) si f(t)=1, ii) si f(t)=t.
Relacionar los resultados con la ecuación de Poisson en el plano.

23. Calcular la función de Green G(t,s) para $\begin{array}{l} y''+y=f(t) \\ y(0)=y(1)=0 \end{array}$,

resolviendo para s fijo $\begin{array}{l} G''+G=\delta(t-s) \\ G(0)=G(1)=0 \end{array}$.

24. Sea $\begin{array}{l} y''=f(t) \\ y(0)=-y(1),y'(0)=-y'(1) \end{array}$.

Construir su función de Green y usarla para hallar la solución si f(t)=t.

25. Calcular para $\lambda=0$ y $\lambda=1$ la solución (si la hay) de
$$t^2y''-ty'+\lambda y = t^3$$
$$y(1)-y'(1)=y(2)-2y'(2)=0$$
haciendo uso de la función de Green en el caso de que exista.

26. Sea $\begin{array}{l} y''+\lambda y=-4\pi^2 t \\ y(0)=1,y(1)=0 \end{array}$. ¿Para qué valores de λ tiene solución única?
Precisar para qué λ tiene infinitas soluciones y resolverlo en ese caso.

27. Sea $\begin{array}{l} y''+\lambda y = 0 \\ y(0)=0,y(1)=1 \end{array}$. Hallar la función de Green G_λ para todos λ que exista.
Hallar la solución para todos los λ para los que exista alguna.

28. Sea $\begin{array}{l} y'' + \lambda y = 1 \\ y'(0)=y'(1)-2y(1)=0 \end{array}$.
Determinar los autovalores y autofunciones del problema homogéneo.
Precisar si el no homogéneo posee infinitas soluciones para algún λ.
Calcular la solución para $\lambda=0$, haciendo uso de la fórmula de Green.

29. Sea $\begin{array}{l} y'' + \lambda y = 1 \\ y(0)-y'(0)=y(1)+y'(1)=0 \end{array}$.
Hallar autovalores y autofunciones del homogéneo.
Calcular aproximadamente λ_1, λ_2, λ_3 y los ceros en $(0,1)$ de y_2 e y_3.
Estudiar para qué λ tiene solución y para cuáles dicha solución es única.

30. Sea $\begin{array}{l} y''+2y'+\lambda y=e^{-t} \\ y(0)+y'(0)=y(1/2)=0 \end{array}$. ¿Existen para algún λ infinitas soluciones?

31. Sea $\begin{array}{l} ty''+2y'+\lambda ty=f(t) \\ y(1)=y(2)=0 \end{array}$.
Determinar autovalores y autofunciones del homogéneo.
Si $\lambda=0$, $f(t)=1$, calcular la solución a partir de la función de Green.
Determinar para qué enteros positivos n el problema con $\lambda=\pi^2$, $f(t)=\operatorname{sen} n\pi t$ tiene solución o soluciones, calculándolas en ese caso.

32. Hallar una fórmula para la solución de un problema de Sturm-Liouville no homogéneo utilizando desarrollos en serie de autofunciones del homogéneo.
Escribir, si $\lambda\neq n^2\pi^2$, el desarrollo en autofunciones de la solución de
$$y''+\lambda y = 1$$
$$y(0)=y(1)=0$$
Hallar (a partir de la función de Green y directamente) la solución exacta para $\lambda=0$, $\lambda=1$ y $\lambda=-1$. Desarrollar esta solución para $\lambda=0$ y comprobar.

33. Desarrollar la solución para $\lambda=0$ en serie de autofunciones del homogéneo:

$y''+\lambda y=t$	$y''+\lambda y=\operatorname{sen}\pi t$	$y''-2y'+y+\lambda y=e^t$
$y(0)=y'(1)=0$	$y(-1)=y(1)=0$	$y(0)=y(1)=0$

problemas 8

1. Resolver por separación de variables y dar interpretación física a los problemas y soluciones que se pueda:

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, \ x\in[0,1], t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\begin{cases} x, & x\in[0,1/2] \\ 1-x, & x\in[1/2,1]\end{cases} \\ u_t(x,0)=u(0,t)=u(1,t)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=4\,\text{sen}\,6x\cos 3x, \ x\in[0,\pi/2] \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 \quad t\in\mathbf{R} \\ u(0,t)=u_x(1,t)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{tt}+4u_t-u_{xx}=0, \ x\in[0,\pi], t\geq 0 \\ u(x,0)=\text{sen}\,2x \\ u_t(x,0)=u(0,t)=u(1,t)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{rr}-\frac{2}{r}u_r=0, \ r\leq 1, t>0 \\ u(r,0)=1 \\ u_t(r,0)=u(1,t)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}=0, \ x\in(0,\pi), \ t>0 \\ u(x,0)=1 \\ u(0,t)=0, \ u(\pi,t)=\cos t \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}=0, \ x\in(0,\pi), \ t>0 \\ u(x,0)=0 \\ u(0,t)=1, \ u_x(\pi,t)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}-4u_x-4u=0, \ x\in(0,\pi), t>0 \\ u(x,0)=e^{-2x} \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \ r<2 \\ u(2,\theta)=\begin{cases} 3, & x\in(-\pi/2,\pi/2) \\ 1, & x\in(\pi/2,3\pi/2)\end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta u = -1, \ (x,y)\in(0,\pi)x(0,\pi) \\ u=0 \text{ en } x=0, x=\pi, y=0, y=\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta u=\cos\theta, \ 1<r<2 \\ u_r(1,\theta)=0, \ u_r(2,\theta)=\cos 2\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta u=y\cos x, \ (x,y)\in(0,\pi)x(0,1) \\ u_x(0,y)=u_x(\pi,y)=0 \\ u_y(x,0)=u_y(x,1)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta u=2x\cos^2 y, \ (x,y)\in(0,\pi)x(0,\pi) \\ u(\pi,y)=5+\cos y \\ u_y(x,0)=u_y(x,\pi)=u(0,y)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta u = r, \ r<2, 0<\theta<\pi \\ u_\theta(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0 \\ u(2,\theta)=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta u=\cos\frac{3\theta}{2}, \ r<1, 0<\theta<\pi/3 \\ u(1,\theta)=0 \\ u_\theta(r,0)=u(r,\pi/3)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \ 1<r<2, 0<\theta<\pi/4 \\ u(1,\theta)=0, \ u_r(2,\theta)=\text{sen}\,\theta \\ u(r,0)=u(r,\pi/4)-u_\theta(r,\pi/4)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta u+u = 0, \ r<1, \pi/2<\theta<3\pi/2 \\ u(1,\theta)=\text{sen}\,2\theta, \ u \text{ acotada} \\ u(r,\pi/2)=u(r,3\pi/2)=0 \end{cases}$$

2. Resolver y determinar para qué relación entre las constantes existe solución estacionaria (interpretarlo físicamente):

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}=A, \ x\in(0,1), t>0 \\ u(x,0)=B \\ u_x(0,t)=C, u_x(1,t)=D \end{cases}$$

3. Resolver $\begin{cases} u_t-u_{xx}=F(t), \ x\in(0,\pi), t>0 \\ u(x,0)=f(x) \\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0 \end{cases}$

Determinar la distribución estacionaria si $f(x)=\text{sen}^2\frac{x}{2}$ y $F(t)=e^{-t}$.

4. Sea $\begin{cases} u_t-u_{xx}=F(x), \ x\in(-1,1), t>0 \\ u(x,0)=0 \\ u_x(-1,t)=u_x(1,t)=0 \end{cases}$ y sea $Q(t)=\int_1^{-1} u(x,t)dx$.

Calcular la variación en el tiempo de Q(t) y deducir cuándo es constante. Resolver si i) $F(x)=\text{sen}\frac{\pi x}{2}$, ii) $F(x)=\text{sen}^2\frac{\pi x}{2}$. ¿Tiene límite u cuando $t\to\infty$?

5. Calcular la solución y su límite cuando $t\to\infty$ (F y T constantes):

$$\begin{cases} u_t-ku_{xx}=\cos\frac{\pi x}{2}, \ x\in(0,1), \ t>0 \\ u(x,0)=T, \ u_x(0,t)=F, \ u(1,t)=T \end{cases}$$

6. Sea una varilla de aluminio ($k=0.86\ cm^2/seg$) de 20 cm de longitud, con una temperatura inicial uniforme de 25 grados. En el instante $t=0$ el extremo $x=0$ se enfría hasta 0 grados, mientras que el extremo $x=20$ se calienta hasta 60 grados, y ambos se mantienen posteriormente a esas temperaturas. Escribir la distribución de temperaturas $u(x,t)$ para todo t y evaluar u en $x=5$, 10 y 15 para $t=0$, 5 y 30 utilizando tres y diez términos de la serie.

7. Sea $\begin{cases} u_t-u_{xx}=0, & x\in(0,1),\ t>0 \\ u(x,0)=0 \\ u_x(0,t)=0, & u_x(1,t)-u(1,t)=1 \end{cases}$

Hallar su solución y comprobar que tiende a ∞ cuando t tiende a ∞.

8. Resolver $\begin{cases} u_t-u_{xx}=0\,, & x\in(0,\pi)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=1\,,\ u_x(0,t)=0\,,\ u(\pi,t)=e^{-t} \end{cases}$.

9. Sea una placa circular homogénea de 1cm de de radio, inicialmente a 0 grados. Supongamos que en $t=0$ todo su borde se calienta hasta 1 grado y luego se mantiene a esa temperatura. Determinar la distribución de temperaturas en la placa para $t>0$. ¿Hacia qué valor tenderá la temperatura de un punto situado a 0.5cm del centro de la placa cuando $t\to\infty$?

10. Sea (E) $u_t-u_{xx}+2u_x=0$, $x\in(0,1)$, $t>0$, con el dato inicial (D) $u(x,0)=f(x)$.
a) Determinar la solución de (E) que satisface (D) y las condiciones de contorno $u_x(0,t)=u_x(1,t)=0$. En el caso de que $f(x)=e^x$ determinar el límite de dicha solución cuando $t\to\infty$.
b) Demostrar que existe una única solución de (E) que verifica (D) y las condiciones de contorno $u(0,t)=h_0(t)$, $u(1,t)=h_1(t)$.

11. Sea $\begin{cases} u_t-u_{xx}-au=0, & x\in(0,3\pi),\ t>0 \\ u(x,0)=1 \\ u(0,t)-4u_x(0,t)=u(3\pi,t)=0 \end{cases}$

Determinar, según la constante a, el límite de la solución si $t\to\infty$.

12. Dado $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=x\,, & x\in[0,\pi]\,,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=x\,,\ u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=0\,,\ u(\pi,t)=\pi \end{cases}$, obtener el valor de $u(\frac{\pi}{2},\pi)$,

a] utilizando la fórmula de D'Alembert; b] por separación de variables.
(sumar la serie $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$ desarrollando $\pi x-x^2$ en $\operatorname{sen} nx$ en $[0,\pi]$)

13. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, & x\in[0,2\pi],\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=g(x) \\ u_x(0,t)=u_x(2\pi,t)=0 \end{cases}$ con $g(x)=\begin{cases}\operatorname{sen} x, & x\in[0,\pi] \\ 0, & x\in[\pi,2\pi]\end{cases}$

Hallar $u(x,2\pi)$ con la fórmula de D'Alembert y por separación de variables.

14. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, & x\in[0,\pi],\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=\operatorname{sen} wt, & u(\pi,t)=0 \end{cases}$

Determinar los valores de w para los que la solución no está acotada.

15. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{rr}-\frac{2}{r}u_r=F(r), & 1\le r\le 2,\ t>0 \\ u(r,0)=0,\ u_t(r,0)=g(r) \\ u(1,t)=u(2,t)=0 \end{cases}$

a) Hallar la solución para $F(r)\equiv 0$ i) por separación de variables,
ii) con las técnicas del capítulo 6.
b) Resolver el problema con $F(r)=g(r)=\frac{1}{r}\operatorname{sen}\pi r$

16. Resolver $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 \ , \ (x,y)\in(0,1)\times(0,\pi) \\ u(x,0)=u_y(x,\pi)=u(0,y)=0, u(1,y)=1 \end{cases}$.

17. Sean $(P_\alpha)\begin{cases} \Delta u = 0, \ r<1, 0<\theta<\alpha \\ u(1,\theta)=\operatorname{sen}\frac{k\pi\theta}{\alpha} \\ u(r,0)=u(r,\alpha)=0 \end{cases}$ y $(P)\begin{cases} \Delta u = 0, \ r<1 \\ u(1,\theta)=\operatorname{sen}\frac{k\theta}{2} \end{cases}$

Comparar para k=1 y k=2 las soluciones de (P) con las de (P_α) si $\alpha\to 2\pi$.
Hallar cotas superiores e inferiores para todas las soluciones.

18. Sea el problema en el plano: $\begin{cases} \Delta u = \pi \ , \ r<1, \ \theta\in(0,\pi) \\ u(r,0)=u(r,\pi)=u(1,\theta)=0 \end{cases}$

Resolverlo y justificar si $u(\frac{1}{2},\frac{\pi}{2})$ es mayor o menor que cero.

19. Probar que $\frac{2}{3}\le u(\frac{1}{2},\frac{\pi}{2})\le 1$, si $u(r,\theta)$ es la solución del problema plano:

$$\begin{cases} \Delta u=0 \ , \ r<1 \\ u(1,\theta)=f(\theta) \end{cases} \quad \text{con} \quad f(\theta) = \begin{cases} 1 \ , \ 0\le\theta\le\pi \\ 0 \ , \ \pi<\theta<2\pi \end{cases}$$

20. Resolver $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=\cos^2\theta-a, \ r<1, 0<\theta<\pi \\ u_r(1,\theta)=0, \ u_\theta(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0 \end{cases}$ para los a que se pueda.

21. Resolver por separación de variables el problema en la semiesfera:

$$\begin{cases} u_{rr}+\frac{2}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}+\frac{\cos\theta}{r^2\operatorname{sen}\theta}u_\theta=0, \ r<1, 0<\theta<\pi/2 \\ u_r(1,\theta)=f(\theta), \ u_\theta(r,\pi/2)=0 \end{cases}$$

¿Qué condición debe cumplir $f(\theta)$ para que exista solución?
Hallar la solución si $f(\theta)=\cos^2-a$ para el único a en que existe.

22. Calcular la solución (o soluciones) de $\begin{cases} \Delta u+u=0, \ (x,y)\in(0,\pi)\times(-\pi/4,\pi/4) \\ u(0,y)=u_y(x,-\pi/4)=u_y(x,\pi/4)=0 \\ u(\pi,y)=\operatorname{sen}2y \end{cases}$

Comprobar que no podemos garantizar la unicidad del problema si utilizamos la fórmula de Green.

23. Resolver el problema exterior para la ecuación de Laplace en el círculo y en la esfera con simetría, es decir, resolver:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \ \text{si } r>R \\ u(R,\theta)=f(\theta), \ 0\le\theta<2\pi \\ u \text{ acotada cuando } r\to\infty \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \Delta u = 0, \ \text{si } r>R \\ u(R,\theta)=f(\theta), \ 0<\theta<\pi \\ u\to 0 \text{ cuando } r\to\infty \end{cases}$$

Hallar la solución en ambos casos para $f(\theta)=a$ constante y para $f(\theta)=\cos^3\theta$.

24. Resolver:

$$\begin{cases} u_t-\Delta u=0, \ (x,y)\in(0,\pi)\times(0,\pi), t>0 \\ u(x,y,0)=1+\cos x\cos 2y \\ u_x(0,y,t)=u_x(\pi,y,t)=0 \\ u_y(x,0,t)=u_y(x,\pi,t)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_{tt}-\Delta u=0, \ (x,y)\in(0,\pi)\times(0,\pi), t\in\mathbf{R} \\ u(x,y,0)=\operatorname{sen}^3x\operatorname{sen}y, u_t(x,y,0)=0 \\ u(0,y,t)=u(\pi,y,t)=0 \\ u(x,0,t)=u(x,\pi,t)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta u = z \ , \ x^2+y^2+z^2<1 \\ u = z^3 \ \text{si } x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_t-\Delta u=0, \ 1<r<2, 0<z<1, t>0 \\ u(r,z,0)=\operatorname{sen}\pi z \\ u(1,z,t)=u(2,z,t)=0 \\ u(r,0,t)=u(r,1,t)=0 \end{cases}$$

25. Un cubo homogéneo de lado π, inicialmente a temperatura constante T_1, se sumerge en el tiempo 0 en un baño que se mantiene a temperatura T_2. Hallar la distribución de temperaturas en cualquier tiempo t>0.

problemas 9

1. Hallar una fórmula para la solución de $\begin{array}{l} y'' = f(t) \\ y(1)=a, y(2)=b \end{array}$ siguiendo el camino de la teoría para el cálculo de la función de Green para la ecuación de Laplace en el plano [ayuda: la función $v(s)=|s-t|/2$ satisface $v''=\delta(s-t)$ para cada t fijo].

2. Hallar la función de Green para la ecuación de Laplace en el semiplano $\{(x,y): x\in\mathbb{R}, y>0\}$ y utilizarla para la hallar la solución de

$$\begin{array}{l} \Delta u = F(x,y),\ x\in R,\ y>0 \\ u(x,0) = f(x) \end{array}$$

Resolver el mismo problema para $F\equiv 0$ con transformadas de Fourier.

3. a) Resolver: $(P_a)\ \begin{cases} \Delta u=0,\ r<a, 0<\theta<\pi/2,\ a>0 \\ u(r,0)=u(a,\theta)=0 \\ u(r,\pi/2)=1 \end{cases}$

b) Utilizando la función de Green adecuada resolver

$$\begin{cases} \Delta u=0,\ (x,y)\in(0,\infty)x(0,\infty) \\ u(x,0)=0,\ u(0,y)=1 \end{cases}$$

y comparar su solución con el límite cuando $a\to\infty$ de la solución de (P_a).

4. Calcular el valor en el origen de la solución de $\begin{cases} \Delta u=r\cos^2\theta\ ,\ r<1 \\ u(1,\theta)=0,\ 0\leq\theta<2\pi \end{cases}$

5. Hallar la función de Green para la ecuación de Laplace:
i) en el semicírculo $r<1, \theta\in(0,\pi)$; ii) en el dominio $r>1$, $\theta\in(0,\pi/2)$.

6. Sabiendo que $u(1,\theta) = \begin{cases} \operatorname{sen}\theta,\ \theta\in[0,\pi] \\ 0\ ,\ \theta\in[\pi,2\pi] \end{cases}$, hallar el potencial u en el punto del plano de coordenadas polares $r=2$, $\theta=0$.

7. a) Hallar la función de Green en el semiespacio $z>0$ para la ecuación de Laplace.
b) En el plano $z=0$ el potencial es V_0 dentro de un círculo de radio a, centrado en el origen, y 0 fuera de ese círculo. Usando a) expresar mediante una integral el potencial en un punto de coordenadas cilíndricas (r,θ,z). Demostrar que a lo largo del eje del círculo $(r=0)$ el potencial es

$$V = V_0\left[1-z(z^2+a^2)^{-1/2}\right]$$

8. Escribir, utilizando coordenadas esféricas, la función de Green G para la ecuación de Laplace en la esfera unidad y deducir la expresión, en términos de G, F y f, de la solución del problema

$$(P)\begin{cases} \Delta u=F,\ r<1 \\ u=f \text{ si } r=1 \end{cases}$$

Hallar el valor de la solución de (P) en el origen en caso de que:

i) $F\equiv 1$, $f\equiv 1$, ii) $F=z$, $f=z^3$

9. Sea (E) $u_t-u_{xx}-2u_x+au=0$. Simplificarla con un cambio de variable adecuado. Hallar la solución de (E) que satisface la condición inicial $u(x,0)=e^{-x^2}$ y analizar su comportamiento cuando $t\to\infty$.

10. Sea $\begin{cases} u_t-u_{xx}=0,\ x>0,t>0 \\ u(x,0)=0,\ u(0,t)=1,\ u \text{ acotada} \end{cases}$

Escribir en términos de la función error ϕ su solución u(x,t) utilizando:

a) la fórmula para la semirrecta obtenida en los apuntes,

b) la fórmula de la varilla infinita, tras cambio y extensión adecuados,

c) transformadas de Laplace en la variable t [$L\left[1-\phi\left(x/2\sqrt{t}\right)\right]=\frac{1}{s}\exp\left(-x\sqrt{s}\right)$]

Hallar con un error menor que 0.001 el valor de u(0.5,1), u(1,1), u(6,1), u(1,4), u(2,4) y u(12,4).

11. i) Hallar $I(a,x)=\int_0^\infty e^{-ak^2}\cos kx\,dk$ probando que $\frac{dI}{dx}=-\frac{x}{2a}I$ e $I(a,0)=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}$; usar lo anterior para calcular: $\Im^{-1}\left(e^{-ak^2}\right)$, $\Im^{-1}\left(ke^{-ak^2}\right)$, $\Im^{-1}\left(e^{-ak^2}\right)$, $\Im\left(e^{-ax^2}\right)$.

ii) Probar el resto de afirmaciones de los teorema 2, 2' y 4 de 9.2.

iii) Calcular $\Im[\delta(x-a)+\delta(x+a)]$ y $\Im^{-1}\left(\frac{\operatorname{sen} ak}{k}\right)$.

12. Resolver mediante transformadas de Fourier:

$\begin{cases} u_t-u_{xx}=0,\ x\in\mathbf{R},\ t>0 \\ u(x,0)=e^{-x^2} \end{cases}$ $\begin{cases} u_t-u_{xx}+u_x=0,\ x\in\mathbf{R},\ t>0 \\ u(x,0)=e^{-x^2/2} \end{cases}$ $\begin{cases} u_t-2tu_{xx}=0,\ x\in\mathbf{R},\ t>0 \\ u(x,0)=\delta(x) \end{cases}$

13. Resolver: $\begin{cases} u_t-u_{xx}=0,\ x,t>0 \\ u(x,0)=f(x),\ u_x(0,t)=g(t),\ u \text{ acotada} \end{cases}$

14. Utilizando transformadas de Fourier resolver el problema puro de valores iniciales para la cuerda vibrante y el problema 4 de problemas 6.

15. Sea (P) $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0,\ x\geq 0,t\geq 0 \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0,\ u(0,t)=\operatorname{sen} t \end{cases}$.

i) Hallar y describir u(x,t) para cada t>0 fijo (ayuda: $v=\operatorname{sen} t\cos x$ satisface la condición de contorno y la ecuación).

ii) Hallar $\hat{u}_s$, transformada seno de la solución u hallada en i).
Hallar $\hat{u}_s$ resolviendo directamente (P) por transformadas seno.

16. a) Resolver $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}+2u_t+u=0,\ x,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=f(x),\ u_t(x,0)=0 \end{cases}$ i. con transformadas de Fourier ii. haciendo $u=we^{-t}$.

Si $f(x)=\operatorname{sen}\pi x$, $x\in[0,1]$ y 0 en el resto de **R**, dibujar u(x,3).

b) Resolver $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}+2u_t+u=0,\ 0<x<1,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\operatorname{sen}\pi x,\ u_t(x,0)=u(0,t)=u(1,t)=0 \end{cases}$

17. Hallar la solución de $\begin{cases} u_{tt}+2u_{tx}+u_{xx}=0,\ x,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$

i) a partir de su forma canónica, ii) con transformadas de Fourier.

18. Resolver: $\begin{cases} t^2u_t-u_x=g(x) \\ u(x,1)=0 \end{cases}$ por las características y utilizando la $\Im$.

19. Sea (E) $u_t+(\cos t)u_x=u$, $x\in\mathbf{R},t\geq 0$.

i) Hallar la solución con u(x,0)=f(x) por Fourier y las características.

ii) Si $f(x)=\begin{cases} \cos^2 x,\ x\in[-\pi/2,\pi/2] \\ 0 \text{ en el resto} \end{cases}$ describir u(x,t) para t≥0.

iii) Estudiar si existe más de una solución de (E) satisfaciendo u(0,t)=0.

20. Dado $\begin{cases} u_t-u_{xx}=\delta(x)\ ,\ x\in\mathbf{R}\ ,\ t>0 \\ u(x,0)=0\ ,\ u \text{ acotada} \end{cases}$,
hallar u(0,t) sin que aparezcan integrales en el resultado.