

- Determinar los autovalores y autofunciones asociadas:
 
$$y'' + \lambda y = 0 \quad y'' + \lambda y = 0 \quad y'' - 2y' + y + \lambda y = 0$$

$$y(0) = y'(1) = 0 \quad y(0) = y(1) + y'(1) = 0 \quad y(0) = y(1) = 0$$
- Sea  $(P_S)$  con el significado y notación de la teoría (problema S-L con condiciones separadas) y supongamos  $q(t) > 0$  para todo  $t$  de  $[a, b]$ . Probar que si  $\lambda$  es autovalor e  $y$  es la autofunción correspondiente entonces
 
$$\lambda \int_a^b p y^2 dt = \int_a^b (p(y')^2 + q y^2) dt - [p y y']_a^b$$
 . Deducir que si  $\alpha' = \beta' = 0$  todos los autovalores de  $(P_S)$  son estrictamente positivos. Más en general, encontrar condiciones sobre  $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$  que aseguren que los autovalores sean mayores o iguales que 0. Comprobar que  $y'' + \lambda y = 0$  tiene un autovalor negativo.
 
$$2y(0) + y'(0) = y(1) = 0$$
- Encontrar la función de Green para los problemas:
 
$$ty'' + y' = f(t) \quad (ty')' - \frac{y}{t} = f(t) \quad y'' = f(t)$$

$$y(1) = y(e) = 0 \quad y(1) = y(2) = 0 \quad y(0) + y(1) = y'(0) + y'(1) = 0$$
 Hallar las soluciones si  $f(t) = t$ .
- Sea  $y'' + \lambda y = -4\pi^2 t$  ¿Para qué valores de  $\lambda$  tiene solución  $y(0) = 1, y(1) = 0$  única?. Estudiar lo que sucede para los otros valores de  $\lambda$ . Hallar la solución (para los valores de  $\lambda$  en que exista).
- Desarrollar en serie de senos y cosenos en  $[-\pi, \pi]$ , estudiando la convergencia puntual y uniforme de dicha serie:
 
$$f(t) = \text{sent } t, t \in [-\pi, \pi] \quad f(t) = \begin{cases} -\pi, t \in [-\pi, 0) \\ \text{sent } t, t \in [0, \pi] \end{cases} \quad f(t) = \begin{cases} 0, t \in [-\pi, 0) \\ \text{sent } t, t \in [0, \pi] \end{cases}$$
- Encontrar el desarrollo de  $f(t) = t$  en serie de autofunciones de los problemas del problema 1.
- Sea  $((1-t^2)y')' + \lambda y = 0$   $y(0) = 0$ , y acotada en I. Escribir los tres primeros términos del desarrollo de  $f(t) = 1$  en serie de autofunciones de este problema de Sturm-Liouville no singular.

- Hallar la solución que contiene la curva  $\Gamma$  que se indica:
 
$$u_x - u_y = \frac{x-y}{xy} u \quad x u_y - y u_x = 0 \quad x u_y - y u_x = 2xyu$$

$$\Gamma: \begin{cases} y=1 \\ z=x \end{cases} \quad \Gamma: \begin{cases} z=y^2 \\ x=0 \end{cases}; \quad \Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z=1 \end{cases} \quad \Gamma: \begin{cases} z=x \\ y=0 \end{cases}$$
- Clasificar, reducir a forma canónica y, si es posible, encontrar la solución general:
 
$$u_{yy} + 2u_{xy} + 2u_{xx} = 0 \quad t^2 u_{tt} - x^2 u_{xx} = 0 \quad u_{xx} - 3y u_x + 2y^2 u = y$$
- Resolver los siguientes problemas:
 
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = u_t + u_x \\ u(x, 0) = x \\ u_t(x, 0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u(x, x) = f(x) \\ u_t(x, x) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \\ u(x, x) = 0 \\ u_t(x, x) = 0 \end{cases} \quad t, x \in \mathbb{R}$$
- Estudiar la unicidad de los problemas:
 
$$\begin{cases} u_t - k u_{xx} = F(x, t), x \in [0, L] \\ u(x, 0) = f(x) \quad t > 0 \\ u_x(0, t) + u(0, t) = u(L, t) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta u + k^2 u = F \text{ en } D \\ u = f \text{ en } \partial D \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta u = F \text{ en } D \\ u = f \text{ en } C_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ en } C_2 \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 \cup C_2 = \mathbb{R}^n \\ C_1 \cap C_2 = \emptyset \end{cases}$$
- Resolver los problemas
 
$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = a^{-t} \\ u(x, 0) = x^2 \\ u_t(x, 0) = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = \text{sen } \pi x \\ u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad x \in [0, 1] \\ u(x, 0) = 0 \quad t \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = 0, u(1, t) = \text{sen}^2 t \end{cases} \quad (\text{hallar } u(\sqrt{2}, 3/2))$$
- Dibujar las soluciones en los instantes  $u = 1/2$  y  $t = 1$ . Calcular  $u(1/2, 3/2)$ . Estudiar a partir de las características para qué valores de  $(x, t)$  la cuerda está en reposo:
 
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, x \in [0, 1], t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \begin{cases} \text{sen}^4 \pi x, x \in [1/2, 3/4] \\ 0, x \in [1/2, 3/4] \end{cases} \\ u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = \begin{cases} 1, |x| \leq \sqrt{2} \\ 0, |x| \geq \sqrt{2} \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, [0, \infty) \times \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \begin{cases} x(1-x), x \in [0, 1] \\ 0, x \in [1, \infty) \end{cases} \\ u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = 0 \end{cases} \quad (\text{cuerda semiacotada})$$
- Sea  $u_{tt} - e^{2t} u_{xx} - u_t = 0$ . Hallar su solución general. Hallar la solución particular que satisface  $u(x, 0) = f(x)$ ,  $u_t(x, 0) = 0$ . Si  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq \sqrt{2} \\ 1 - 2|x| & \text{si } |x| \leq \sqrt{2} \end{cases}$  dibujar la solución para  $t = 1$  y  $t = 2$ . Dibujar en el plano  $xt$  las características que pasan por  $(0, 0)$  y  $(0, 1)$ . ¿Cuál es el dominio de influencia sobre la solución del valor inicial  $f$  en  $x = 0$ ? ¿Cuál es el dominio de dependencia de  $u(0, 1)$  de los valores de  $f$ ?

1. Resolver los siguientes problemas:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & x \in [0, 1], t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1/2 \\ 1-x & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \\ u_t(x, 0) = u(0, t) = u(1, t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & x \in [0, \pi], t \geq 0 \\ u(x, 0) = 1 \\ u(0, t) = 0 \\ u(\pi, t) = \cos t \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{tt} + 4u_t - u_{xx} = 0 & x \in [0, \pi], t \geq 0 \\ u(x, 0) = \sin 2x \\ u_t(x, 0) = u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & x \in [0, \pi], t \geq 0 \\ u(x, 0) = 1 \\ u(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta u = -1 & \text{en } (0, \pi) \times (0, \pi) \\ u = 0 & \text{para } x=0, x=\pi, y=0, y=\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta u = 2x \cos^2 y & \text{en } (0, \pi) \times (0, \pi) \\ u_y(x, 0) = u_y(x, \pi) = u(0, y) = 0 \\ u(\pi, y) = 5 + \cos y \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2} = 0 & 1 < r < 2 \\ u_r(1, \theta) = 0 \\ u_r(2, \theta) = \cos 2\theta & \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2} = 0 & r < 2 \\ u_\theta(r, 0) = u_\theta(r, \pi) = 0 \\ u(2, \theta) = 3 & \theta \in [0, \pi] \end{cases}$$

2. Sea una varilla de aluminio ( $k = 0.86 \text{ cm}^2/\text{seg}$ ) de 20 cm de longitud, inicialmente con una temperatura uniforme de  $25^\circ$ . Supongamos que en el instante  $t=0$  el extremo  $x=0$  se enfría hasta  $0^\circ$  mientras que el extremo  $x=20$  se calienta hasta  $60^\circ$ , y ambos se mantienen posteriormente a esas temperaturas.

- Encontrar la distribución de temperaturas en cualquier tiempo  $t$ .
- Calcular la temperatura  $u(5, 30)$  utilizando uno, dos y tres términos de la serie solución.

3. Sea una placa circular homogénea de 1 cm de radio, inicialmente a  $0^\circ$ . Supongamos que en  $t=0$  todo su borde se calienta hasta  $1^\circ$  y luego se mantiene a esa temperatura. Determinar la distribución de temperaturas en la placa para  $t > 0$ . ¿Hacia que valor tenderá la temperatura de un punto situado a 0.5 cm del centro de la placa cuando  $t \rightarrow \infty$ ?

4. Resolver: 
$$\begin{cases} u_t - (u_{xx} + u_{yy}) = 0 & (x, y) \in (0, \pi) \times (0, \pi), t > 0 \\ u(x, y, 0) = 1 + \cos x \cos 2y \\ u_x(0, y, t) = u_x(\pi, y, t) = u_y(x, 0, t) = u_y(x, \pi, t) = 0 \end{cases}$$

1. Resolver: 
$$\begin{cases} u_{tt} - (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0 & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R} \\ u(x, y, z, 0) = x^2 + y^2 + z^2 \\ u_t(x, y, z, 0) = 0 \end{cases}$$

2. Sea el problema 
$$\begin{cases} u_{tt} - (u_{xx} + u_{yy}) = 0 & (x, y) \in \mathbb{R}^2, t \geq 0 \\ u(x, y, 0) = 0 \\ u_t(x, y, 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \in S \\ 0 & \text{si } (x, y) \notin S \end{cases} \end{cases}$$

donde  $S$  es el conjunto del plano que escrito en polares es  $\{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : r \in [1, 2], \theta \in [-\pi/2, \pi/2]\}$ . Hallar  $u(0, 0, t)$ .

3. Hallar la función de Green para la ecuación de Laplace en el semiplano  $\{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y > 0\}$  y utilizarla para hallar una solución de  $\begin{cases} \Delta u = F(x, y) & x \in \mathbb{R}, y > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$

Resolver el mismo problema con  $F \equiv 0$  mediante transformadas de Fourier.

4. Hallar la función de Green para la ecuación de Laplace en el semicírculo unidad  $r \in (0, 1), \theta \in (0, \pi)$ .

5. i. Probar que si 
$$I(a, x) = \int_0^\infty e^{-ak^2} \cos kx \, dk$$

entonces  $\frac{dI}{dx} = -\frac{x}{2a} I$  e  $I(a, 0) = \sqrt{\pi}/2\sqrt{a}$ ; hallar  $I(a, x)$ .

Deducir de i: ii.  $\int_0^\infty e^{-ak^2} = e^{-x^2/4a} / \sqrt{2a}$

iii.  $\int_0^\infty k e^{-ak^2} \sin kx \, dk = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^{3/2}} x e^{-x^2/4a}$ .

6. Resolver: 
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = e^{-x^2} \\ u \text{ acotada} \end{cases} \quad \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u_x(0, t) = g(t) \end{cases}$$

7. i. Sea  $h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq L \\ 0 & \text{si } |x| > L \end{cases}$ . Calcular  $\hat{h}$ .

ii. Definamos  $\hat{g}(x-a)$  como el "límite" de las funciones

$$P_h(x) = \begin{cases} 1/2h & x \in [a-h, a+h] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} \text{ cuando } h \rightarrow 0 \text{ y definamos } \hat{g} = \lim_{h \rightarrow 0} P_h. \text{ Calcular } \hat{g}.$$

Resolver el problema puro de valores iniciales para la cuerda vibrante mediante transformadas de Fourier (utilizar i y ii).