problemas 4

1. Determinar los autovalores y autofunciones asociadas:

$$\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(0)=y'(1)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(0)=y(1)+y'(1)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y''-2y'+y+\lambda y=0 \\ y(0)=y(1)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^2y''+ty'+\lambda y=0 \\ y(e)=y(e^2)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(0)-y'(0)=0 \\ y(1)+y'(1)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} ((2+t)^2y')'+\lambda y=0 \\ y(-1)=y(1)=0 \end{cases}$$

2. Sea (P_s) con el significado y notación de la teoría (problema S-L con c.s.) y supongamos $q(t)\geq 0$ para todo t de $[a,b]$. Probar que si λ es autovalor e y es la autofunción correspondiente entonces $\lambda\int_a^b ry^2dt = \int_a^b (p(y')^2+qy^2)dt - \left[pyy'\right]_a^b$; deducir que si $\alpha'=\beta'=0$ todos los autovalores de (P_s) son estrictamente positivos. Más en general, dar condiciones sobre α, α', β y β' que aseguren que los autovalores sean mayores o iguales que cero.

3. Probar que para todo α el problema $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ \alpha y(0)+y'(0)=y(1)=0 \end{cases}$ posee una sucesión infinita de autovalores positivos. Discutir la existencia de autovalores negativos o cero. Estudiar la evolución del menor autovalor según aumenta α. Comprobar para $\alpha=0$ que la n-sima autofunción posee exactamente n-1 ceros en $(0,1)$.

4. Comprobar que el cambio $y=ue^{-\frac{1}{2}\int a(t)dt}$ convierte la ecuación $y''+a(t)y'+b(t)y=0$ en una ecuación de la forma $u''+g(t)u=0$. Utilizar lo anterior y el teorema de comparación de Sturm para probar que si y_p es cualquier solución de la ecuación de Bessel de orden p en $t>0$ y t_1,t_2 son dos ceros consecutivos de y_p entonces: i) si $0\leq p<1/2$, $t_2-t_1<\pi$; ii) si $p>1/2$, $t_2-t_1>\pi$. Probar además que en ambos casos t_2-t_1 tiende a π cuando $t_1\to\infty$.

5. Sea $\begin{cases} y''+(\lambda-V(t))y=0 \\ y(a)=y(b)=0 \end{cases}$ y supongamos $m<V(t)<M$ para todo $t\in[a,b]$. Hallar cotas superior e inferior para los autovalores del problema.

6. Hallar cotas superior e inferior para los autovalores de

$$\begin{cases} t^2y''-2ty'+(2+\lambda t^2)y=0 \\ y(\pi)=y(2\pi)=0 \end{cases}$$

comparando con una ecuación de coeficientes constantes. Con el cambio $y=xt$ resolver explícitamente el problema y comprobar la validez de las acotaciones anteriores.

7. Sea $\begin{cases} (1-t^2)y''-ty'+\lambda y=0 \quad \text{(ecuación de Tchebycheff)} \\ y,y' \text{ acotadas en } \pm 1 \end{cases}$

Calcular autofunciones y autovalores y demostrar que estas autofunciones son ortogonales respecto al peso.

8. Resolver el problema de contorno singular

$$\begin{cases} y''+(2p+1-t^2)y=0\ , \ p \text{ cte}\geq 0 \\ y\to 0 \text{ cuando } |t|\to\infty \end{cases}$$

(hacer el cambio $y=ue^{-t^2/2}$ para obtener la ecuación de Hermite).

9. Hallar la función de Green y las soluciones para $f(t)=t$:

$$\begin{cases} (ty')'=f(t) \\ y(1)=y(e)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (ty')'-\frac{y}{t}=f(t) \\ y(1)+y'(1)=y(2)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y''+y'-2y=f(t) \\ y(0)-y'(0)=0 \\ y(1)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y''=f(t) \\ y(0)=-y(1) \\ y'(0)=-y'(1) \end{cases}$$

10. Hallar una fórmula para la solución de $\begin{cases} y''=f(t) \\ y(1)=a,y(2)=b \end{cases}$ en términos de la función de Green, de la función f y de las constantes a y b. Calcular la solución si $f(t)=1$, $a=0$, $b=1$.

11. Calcular la función de Green $G(t,s)$ para $\begin{cases} y''+y=f(t) \\ y(0)=y(1)=0 \end{cases}$ utilizando que para cualquier s fijo $G(t,s)$ satisface el problema $\begin{cases} G''+G=\delta(t-s) \\ G(0)=G(1)=0 \end{cases}$.

12. Calcular la solución (si la hay) de

$$\begin{cases} t^2y''-ty'+\lambda y=t^3 \\ y(1)=y'(1) \\ y(2)=2y'(2) \end{cases} \qquad \text{para } \lambda=0,\ \lambda=1,$$

haciendo uso de la función de Green en el caso de que exista.

13. Sea $\begin{cases} y''+\lambda y=-4\pi^2t \\ y(0)=1,y(1)=0 \end{cases}$.
¿Para qué valores de λ tiene solución única? Estudiar lo que sucede para los otros valores de λ. Hallar la solución para los λ que exista.

14. Calcular para qué valores de α existe solución del problema

$$\begin{cases} y''=e^{-(t-1)^2} \\ \alpha y(0)+(1-\alpha)y'(0)=y(1)=0 \end{cases}.$$

15. Sea $t^2y''+ty'+(\lambda t^2-\frac{1}{4})y=t^{3/2}$
$y(1)=y(4)=0$.
Determinar para qué valores de λ tiene solución y para cuáles dicha solución es única.

16. Sea (P) $\begin{array}{l} y''\cos t-2y'\operatorname{sen} t=f(t) \\ y'(-\pi/4)=y'(\pi/4)-ay(\pi/4)=0 \end{array}$.
i) Determinar para qué valor de a el problema (P) no tiene solución única. Para dicho valor de a dar un ejemplo de $f(t)$ para el que (P) tenga infinitas soluciones. ii) Calcular la solución de (P) utilizando la función de Green si $a=2$ y $f(t)=1$.

17. Sea $\begin{cases} ty''+2y'+\lambda ty=f(t) \\ y(1)=y(2)=0 \end{cases}$.
Determinar autovalores y autofunciones del problema homogéneo (utilizar el cambio $x=ty$).
Calcular la función de Green para $\lambda=0$ y utilizarla para hallar la solución si $f(t)=1$. Escribir dicha solución en serie de autofunciones del problema homogéneo.
Determinar para qué enteros positivos n el problema con $\lambda=\pi^2$, $f(t)=\operatorname{sen} n\pi t$ tiene solución o soluciones, calculándolas en ese caso.

18. Desarrollar $f(t)=t^2$, $t\in[0,\pi]$ en serie de i) $\{\operatorname{sen} nt\}$, ii) $\{\cos nt\}$. Dibujar algunas sumas parciales de las series obtenidas.

19. Desarrollar en serie de senos y cosenos en $[-\pi,\pi]$, estudiando la convergencia puntual y uniforme de dicha serie:

$$f(t)=\operatorname{sen}^2 t\ ;\quad f(t)=|\operatorname{sen} t|\ ;\quad f(t)=\operatorname{sen}\tfrac{t}{2}\ ;\quad f(t)=\begin{cases} -\pi\ , & -\pi\leq t<0 \\ \operatorname{sen} t\ , & 0\leq t\leq\pi \end{cases}.$$

20. Desarrollar $f(t)=t$ en serie de autofunciones de cada uno de los tres primeros problemas del problema 1.

21. Escribir los tres primeros términos del desarrollo de $f(t)=1$ en serie de autofunciones del problema singular:

$$\begin{cases} ((1-t^2)y')'+\lambda y=0 \\ y(0)=0,\ y \text{ acotada en } 1. \end{cases}$$

22. Desarrollar la función $f(t)=1-t^2$ en serie de autofunciones del problema: $\begin{cases} (ty')'+\lambda ty=0 \\ u \text{ acotada en } 0,\ u(1)=0 \end{cases}$.

problemas 5

1. Hallar la solución que satisface la condición que se indica:

$$\begin{cases} u_x-u_y=\dfrac{x-y}{xy}u \\ u(x,1)=x \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x^2u_y+u_x=x^5 \\ u(x,0)=x^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} xu_y-yu_x=2xyu \\ u(x,0)=x \end{cases}$$

2. Demostrar que no existe solución de $u_x=0$ que contenga la curva Γ: $y=x^2, z=x^3$ y que esté definida en todo el semiplano $y\geq 0$. Estudiar en que entornos de Γ hay soluciones únicas locales.

3. Sea $u_t-2tu_x+\dfrac{2tu}{1+t^2}=0$.
Hallar la solución que satisface $u(x,0)=f(x)$. Dibujar $u(x,2)$ en el caso particular en que $f(x)=\begin{cases} \operatorname{sen}^2\pi x & \text{si } |x|\leq 1 \\ 0 & \text{si } |x|>1 \end{cases}$.
Escribir un problema de Cauchy que tenga infinitas soluciones.

4. Clasificar, reducir a forma canónica y, si es posible, encontrar la solución general:

$$u_{yy}+2u_{xy}+2u_{xx}=0 \qquad t^2u_{tt}-x^2u_{xx}=0 \qquad u_{xx}-3yu_x+2y^2u=y$$

$$x^2u_{xx}-2xyu_{xy}+y^2u_{yy}=e^x \qquad e^xu_{xx}+e^yu_{yy}=u \qquad u_{xx}+4u_{xy}-5u_{yy}+6u_x+3u_y=9u$$

5. Sea (E) $u_{tt}-x^2u_{xx}-u_t=0$. Hallar su solución general. Determinar la solución de (E) que satisface $u(x,0)=2x$, $u_t(x,0)=x$. Escribir (en caso de que exista) alguna solución de (E), distinta de la $u=0$, que satisfaga $u(e^t,t)=u_t(e^t,t)=0$.

6. Estudiar la unicidad de los problemas:

$$\begin{cases} u_t-ku_{xx}=F(x,t), & x\in[0,L],\ t>0 \\ u(x,0)=f(x) \\ u_x(0,t)+au(0,t)=0 \\ u_x(L,t)+bu(L,t)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta u=F \text{ en } D \\ u=f \text{ en } C_1 & C_1\cup C_2=\partial D \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}=g \text{ en } C_2 & C_1\cap C_2=\emptyset \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta u-k^2u=F \text{ en } D \\ u=f \text{ en } \partial D \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{tt}-(C(x)u_x)_x=F(x,t) & x\in[0,1],\ t\in\mathbb{R} \\ u(x,0)=f(x);\ u_t(x,0)=g(x) \\ u(0,t)=u(1,t)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_t-k\Delta u=F(x,y,t) \text{ en } D \\ u(x,y,0)=f(x,y) \text{ en } D \\ u(x,y,t)=0 \text{ en } \partial D \end{cases}$$

con C función C^1 positiva $\qquad$ D dominio acotado de $\mathbb{R}^2$

7. Estudiar la unicidad de la solución de la ecuación de Poisson en una dimensión $y''=f(t)$, con diferentes condiciones de contorno, utilizando técnicas empleadas en ecuaciones en derivadas parciales.

8. Si la distribución inicial de temperaturas en una varilla es $f(x)=2x^2-3x$, $x\in[0,2]$ y la temperatura para $t>0$ en los extremos es $h_0(t)=-t/(1+t^2)$, $h_2(t)=2\operatorname{sen}t/t$, y suponemos que no existen fuentes de calor en el interior de la varilla, determinar la máxima y mínima temperaturas alcanzadas en la varilla para $t\geq 0$.

9. Resolver los siguientes problemas:

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=u_t+u_x \\ u(x,0)=x \\ u_t(x,0)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=0 \\ u(x,x)=f(x) \\ u_t(x,x)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} u_{yy}-u_{xx}=0 \\ u(x,x)=0 \\ u_t(x,x)=0, \end{cases} \quad \begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=e^{-t} \\ u(x,0)=x^2 \\ u_t(x,0)=-1 \end{cases} \ x,t\in\mathbb{R}$$

10. Dado $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0 & x\in[0,1],\ t\in\mathbb{R} \\ \overline{u}(x,0)=u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=0,\ u(1,t)=\operatorname{sen}t \end{cases}$ hallar $u(1/2,3/2)$.

11. Sea $u_{tt}-e^{2t}u_{xx}-u_t=0$. Hallar su solución general. Hallar la solución particular que satisface $u(x,0)=f(x)$, $u_t(x,0)=0$. Escribir un problema de Cauchy para dicha ecuación que no tenga solución, y otro con infinitas soluciones. Si $f(x)=1-2|x|$ si $|x|\leq 1/2$ y 0 en el resto dibujar la solución para $t=1$ y $t=2$. Dibujar en el plano xt las características que pasan por $(0,0)$ y $(0,1)$. ¿Cuál es el dominio de influencia sobre la solución del valor inicial de f en $x=0$? ¿Cuál es el dominio de dependencia de $u(0,1)$ de los valores de f?

12. Dibujar $u(x,1/2)$ y $u(x,1)$. Hallar y dibujar $u(1/2,t)$. Estudiar con las características para qué valores de (x,t) la cuerda está en reposo:

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, \ x,t\in\mathbb{R} \\ u(x,0)=0 \\ u_t(x,0)=\begin{cases} 1, & |x|\leq 1/2 \\ 0, & |x|>1/2 \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0 \text{ en } [0,1]\times\mathbb{R} \\ u(x,0)=\begin{cases} \operatorname{sen}4\pi x, & x\in[\frac{1}{2},\frac{3}{4}] \\ 0, & \text{resto de } [0,1] \end{cases} \\ u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=u(1,t)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0 \text{ en } [0,1]\times\mathbb{R} \\ u(x,0)=\begin{cases} x/3, & 0\leq x\leq 3/4 \\ 1-x, & 3/4\leq x\leq 1 \end{cases} \\ u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=u(1,t)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=\operatorname{sen}\pi x, & x\in[0,1],\ t\in\mathbb{R} \\ u(x,0)=\operatorname{sen}\pi x \\ u_t(x,0)=\operatorname{sen}\pi x \\ u(0,t)=u(1,t)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, \ x\geq 0,\ t\in\mathbb{R} \\ u(x,0)=\begin{cases} x(1-x), & 0\leq x\leq 1 \\ 0, & x\geq 1 \end{cases} \\ u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, \ x\geq 0,\ t\in\mathbb{R} \\ u(x,0)=0 \\ u_t(x,0)=\begin{cases} \operatorname{sen}6\pi x, & \frac{1}{6}\leq x\leq \frac{1}{3} \\ 0, & \text{resto de } [0,\infty) \end{cases} \\ u(0,t)=0 \end{cases}$$

13. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, & x\in[0,L],\ t\in\mathbb{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=t,\ u(L,t)=0 \end{cases}$.

Hallar la expresión analítica de $u(x,T)$ con $T\in[0,L]$ utilizando la fórmula de d'Alembert. Describir y comentar a partir de esta expresión el comportamiento de la cuerda en el intervalo de tiempo $t\in[0,L]$. Hallar $u(x,kL)$ con k entero positivo.

14. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, \ x\geq 0,\ t\in\mathbb{R} \\ u(x,0)=\begin{cases} \operatorname{sen}x, & 2\pi\leq x\leq 3\pi \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} ; \ u_t(x,0)=\begin{cases} \cos x, & 2\pi\leq x\leq 3\pi \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} \\ u(0,t)=0 \end{cases}$

Demostrar que su solución es una onda que viaja inicialmente hacia la izquierda. Dibujar $u(x,\pi)$ y $u(x,10\pi)$.

15. Dado el problema $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=\delta(x), & x,t\in\mathbb{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 \end{cases}$

calcular su solución para $t\geq 0$ en la forma más simplificada posible y dibujar $u(x,2)$ y $u(3,t)$. Analizar la continuidad y diferenciabilidad de la solución; ¿qué se podía decir sin resolver el problema?

16. Calcular la solución del problema

$$\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=0, \ x\geq 0,\ t\in\mathbb{R} \\ u(x,0)=f(x),\ u_t(x,0)=g(x) \\ u_x(0,t)=0 \end{cases}$$

extendiendo las funciones f y g de forma adecuada a toda la recta y aplicando la fórmula de d'Alembert. ¿Qué tipo de condiciones deben cumplir f y g para que la solución sea clásica? ¿Se invierte la onda al reflejarse en $x=0$?

problemas 6

1. Resolver por separación de variables:

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\ , \ x\in[0,1],\ t\in\mathbb{R} \\ u(x,0)=\begin{cases} x\ , & x\in[0,1/2] \\ 1-x, & x\in[1/2,1] \end{cases} \\ u_t(x,0)=u(0,t)=u(1,t)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_{tt}+4u_t-u_{xx}=0\ ,\ x\in[0,\pi],\ t\geq 0 \\ u(x,0)=\operatorname{sen}2x \\ u_t(x,0)=u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}=0\ ,\ x\in[0,\pi]\ ,\ t>0 \\ u(x,0)=1 \\ u(0,t)=0;\ u(\pi,t)=\cos t \end{cases} \qquad \begin{cases} u_t-u_{xx}=0\ ,\ x\in[0,\pi]\ ,\ t>0 \\ u(x,0)=0 \\ u(0,t)=1;\ u_x(\pi,t)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta u=-1 \ \text{ en } \ (0,\pi)x(0,\pi) \\ u=0 \ \text{ en } x=0,\ x=\pi\ , \\ \qquad\qquad y=0,\ y=\pi\ . \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta u=2x\cos^2 y \ \text{ en } \ (0,\pi)x(0,\pi); \\ u(\pi,y)=5+\cos y \\ u_y(x,0)=u_y(x,\pi)=u(0,y)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta u=\cos\theta\ ,\ 1<r<2 \\ u_r(1,\theta)=0 \\ u_r(2,\theta)=\cos 2\theta \quad \theta\in[0,2\pi) \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta u=r\ ,\ r<2 \\ u_\theta(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0 \quad \theta\in[0,\pi] \\ u(2,\theta)=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=4\operatorname{sen}6x\cos 3x,\ x\in[0,\frac{\pi}{2}],\ t\in\mathbb{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=u_x(\frac{\pi}{2},t)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_t-u_{xx}-4u_x-4u=0\ ,\ x\in[0,\pi],t>0 \\ u(x,0)=e^{-2x} \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{rr}-\frac{2}{r}u_r=0\ ,\ r<1,\ t>0 \\ u(1,t)=0 \\ u(r,0)=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta u=0\ ,\ r<b \\ u(b,\theta)=\begin{cases} V_1, & \theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \\ V_2, & \theta\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}) \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta u=y\cos x \text{ en } (0,\pi)x(0,1) \\ u_x(0,y)=u_x(\pi,y)=0 \\ u_y(x,0)=u_y(x,1)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta u=\cos\frac{3\theta}{2}\ ,\ r<1,\ \theta\in(0,\frac{\pi}{3}) \\ u(1,\theta)=0 \\ u_\theta(r,0)=u(r,\frac{\pi}{3})=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta u=0\ ,\ 1<r<2,\ \theta\in(0,\frac{\pi}{4}) \\ u(r,0)=u(r,\frac{\pi}{4})-u_\theta(r,\frac{\pi}{4})=0 \\ u(1,\theta)=0,\ u_r(2,\theta)=\operatorname{sen}\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta u+u=0\ ,\ r<1,\ \theta\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}) \\ u(1,\theta)=\operatorname{sen}2\theta,\ u \text{ acotada en } r=0 \\ u(r,\frac{\pi}{2})=u(r,\frac{3\pi}{2})=0 \end{cases}$$

y dar interpretación física a los problemas y soluciones que se pueda.

2. Sea una varilla de aluminio ($k=0.86\ cm^2/seg$) de 20 cm de longitud, inicialmente con una temperatura uniforme de 25 grados. Supongamos que en el instante $t=0$ el extremo $x=0$ se enfría hasta 0 grados mientras que el extremo $x=20$ se calienta hasta 60 grados, y ambos se mantienen posteriormente a esas temperaturas.
i. Encontrar la distribución de temperaturas en cualquier tiempo t.
ii. Calcular la temperatura $u(5,30)$ utilizando uno, dos y tres términos de la serie solución.

3. Sean los problemas para la ecuación del calor en una varilla finita

$$\begin{cases} u_t-ku_{xx}=0\ ,\ x\in[0,1]\ ,\ t>0 \\ u(x,0)=f(x) \\ u_x(0,t)-au(0,t)=0\ ,\ a>0 \\ u_x(1,t)=1 \end{cases}$$

Determinar para cada $a>0$ la distribución estacionaria hacia la que tienden las temperaturas.

4. Resolver: $\begin{cases} u_t-u_{xx}=A\ ,\ x\in[0,1]\ ,\ t>0 \\ u(x,0)=B \\ u_x(0,t)=C \\ u_x(1,t)=D \end{cases}$

Determinar para qué relación entre constantes existe solución estacionaria. Interpretar desde el punto de vista de la ecuación del calor el problema y la existencia de solución estacionaria.

5. Resolver $\begin{cases} u_t-u_{xx}=F(t)\ ,\ x\in[-\pi,\pi]\ ,\ t>0 \\ u(x,0)=f(x) \\ u_x(-\pi,t)=u_x(\pi,t)=0\ . \end{cases}$

Determinar la distribución estacionaria si $f(x)=\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}$ y $F(t)=e^{-t}$.

6. Sea una placa circular homogénea de 1 cm de radio, inicialmente a 0 grados. Supongamos que en $t=0$ todo su borde se calienta hasta 1 grado y luego se mantiene a esa temperatura. Determinar la distribución de temperaturas en la placa para $t>0$. ¿Hacia qué valor tenderá la temperatura de un punto situado a 0.5 cm del centro de la placa cuando $t\to\infty$?

7. Sea el problema para la ecuación de ondas con simetría radial entre dos esferas concéntricas:

$$\begin{cases} u_{tt}-(u_{rr}+\frac{2}{r}u_r)=F(r) \quad r\in(1,2)\ ,\ t\in\mathbb{R} \\ u(1,t)=u(2,t)=0 \\ u(r,0)=0,\ u_t(r,0)=g(r) \end{cases}$$

a) Hallar la solución del problema homogéneo ($F(r)=0$) i)por separación de variables, ii)utilizando la fórmula de d'Alembert tras un cambio adecuado.
b) Resolver el problema no homogéneo si $F(r)=g(r)=\frac{1}{r}\operatorname{sen} r$.

8. Resolver a) $\begin{cases} \Delta u=0\ ,\ r<1,\ \theta\in(0,\alpha)\ ,\ \alpha\in(0,2\pi) \\ u(r,0)=u(r,\alpha)=0 \\ u(1,\theta)=\operatorname{sen}\frac{k\pi\theta}{\alpha} \end{cases}$ para $k=1$ y $k=2$.

b) $\begin{cases} \Delta u=0\ ,\ r<1 \\ u(1,\theta)=\operatorname{sen}\frac{k\theta}{2} \end{cases}$ para $k=1$ y $k=2$.

Comparar las soluciones de b) con las de a) cuando $\alpha\to 2\pi$.
Hallar cotas superiores e inferiores para cada una de las soluciones anteriores.

9. Demostrar que para que el problema de Neumann $\begin{cases} \Delta u=F \text{ en } D \\ u_n=f \text{ en } \partial D \end{cases}$ tenga solución es necesario que $\iint_D F\,dxdy=\oint_{\partial D} f\,ds$.

10. Resolver $\begin{cases} \Delta u=\cos^2\theta-a\ ,\ r\in(0,1),\ \theta\in(0,\pi) \\ u_r(1,\theta)=0 \\ u_\theta(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0 \end{cases}$

para los valores de a que se pueda.

11. Resolver el problema exterior para la ecuación de Laplace en el círculo y en la esfera con simetría, es decir, resolver:

$$\begin{cases} \Delta u=0 \text{ si } r>R \\ u(R,\theta)=f(\theta)\ ,\ \theta\in[0,2\pi) \\ u \text{ acotada cuando } r\to\infty \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \Delta u=0 \ \text{ si } \ r>R \\ u(R,\theta)=f(\theta)\ ,\ \theta\in(0,\pi) \\ u\to 0 \ \text{ cuando } \ r\to\infty \end{cases}.$$

Hallar la solución en ambos casos para $f(\theta)=a$ constante y para $f(\theta)=\cos^3\theta$.

12. Sea el problema para la ecuación de Laplace en la semiesfera:

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{2}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{\cos\theta}{r^2 \operatorname{sen}\theta} u_\theta = 0 & , \ r<1, \ \theta \in [0, \frac{\pi}{2}) \\ u_r(1,\theta) = f(\theta) & , \ u_\theta(r, \frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

Resolverlo por separación de variables ¿Qué condición ha de satisfacer $f(\theta)$ para que exista solución? Determinar para qué valor de a el problema con $f(\theta) = \cos^2\theta - a$ tiene solución y resolverlo en ese caso.

13. Resolver:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, \ (x,y) \in (0,\pi) \times (0,\pi) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad t>0 \\ u(x,y,0) = 1 + \cos x \cos 2y \\ u_x(0,y,t) = u_x(\pi,y,t) = 0 \\ u_y(x,0,t) = u_y(x,\pi,t) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_t - \Delta u = 0, \ 1 \le r \le 2 \ , \ 0 \le z \le 1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad t>0 \\ u(r,z,0) = \operatorname{sen} \pi z \\ u(1,z,t) = u(2,z,t) = 0 \\ u(r,0,t) = u(r,1,t) = 0 \end{cases}$$

problemas 7

1. Resolver

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0 \\ u(x,y,z) = f(x,y,z) \\ u_t(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

si $f(x,y,z)$ es a) $x+y+z$ b) $x+y$ c) x

2. Hallar $u(0,t)$ para $t \geq 0$ en todos los casos y $u(r,t)$ cuando se pueda para los seis problemas siguientes:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 \\ u(r,0) = f(r) \\ u_t(r,0) = g(r) \end{cases} \quad \text{con a) } f(r) = g(r) = r^2, \text{ b) } f(r) = 0, \ g(r) = \begin{cases} 1-r^2, & r \le 1 \\ 0 & , \ r \geq 1 \end{cases}$$

considerados como problemas en i) una, ii) dos y iii) tres dimensiones (r representa la distancia de un punto (de la recta, del plano, del espacio) al origen).

3. Sea

$$\begin{cases} u_{tt} - (u_{rr} + \frac{2u_r}{r}) = 0 \ , \ r \geq 0 \\ u(r,0) = 0, \ u_t(r,0) = e^{-r^2} \end{cases}$$

Hallar $u(r,t)$ para $r>0$. Hallar $u(0,t)$. Dibujar u para algunos valores de t.

4. Sean los problemas:

$$(P_v) \begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = 0, \ x>0, \ t \in \mathbb{R} \\ v(x,0) = x f(x) \\ v_t(x,0) = v(0,t) = 0 \end{cases} \qquad (P_u) \begin{cases} u_{tt} - (u_{rr} + \frac{2}{r} u_r) = 0 \ , \ r \geq 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad t \in \mathbb{R} \\ u(r,0) = f(r) \\ u_t(r,0) = 0 \end{cases}$$

donde $f(x) = (x-2)(x-4)$ si $x \in [2,4]$ y 0 en el resto de $[0,\infty)$. Dibujar $v(x,3)$, $v(x,6)$, $u(r,3)$ y $u(r,6)$. Comentar la evolución a lo largo del tiempo de las soluciones de ambos problemas.

5. Hallar una fórmula para la solución de $\begin{cases} y'' = f(t) \\ y(1) = a, \ y(2) = b \end{cases}$ siguiendo el camino de la teoría para el cálculo de la función de Green para la ecuación de Laplace en el plano. (Dato: la función $v(s) = |s-t|/2$ satisface $v''(s) = \delta(s-t)$ para cada t fijo).

6. Hallar la función de Green para la ecuación de Laplace en el semiplano $\{(x,y): x \in \mathbb{R}, y>0\}$ y utilizarla para hallar la solución de

$$\begin{cases} \Delta u = F(x,y), \ x \in \mathbb{R}, \ y>0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

Resolver el mismo problema para $F \equiv 0$ con transformadas de Fourier.

7. Hallar la función de Green para la ecuación de Laplace i) en el semicírculo $r<1$, $\theta \in (0,\pi)$; ii) en el dominio $r>1$, $\theta \in (0,\pi/2)$.

8. i) Resolver

$$(P_a) \begin{cases} \Delta u = 0 \ \text{ en } r<a, \ \theta \in (0,\pi/2), \ a>0 \\ u(r,0) = 0 = u(a,\theta) \\ u(r,\pi/2) = 1 \end{cases}$$

ii) Utilizando la función de Green adecuada resolver

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } (0,\infty) \times (0,\infty) \\ u(x,0) = 0 \ , \ u(0,y) = 1 \end{cases}$$

y comprobar que su solución coincide con el límite cuando a tiende a ∞ de la solución de (P_a).

9. a) Hallar la función de Green en el semiespacio $z>0$ para la ecuación de Laplace.
b) En un plano infinito ($z=0$) el potencial es V_0 dentro de un círculo de radio a, centrado en el origen, y 0 fuera de ese círculo; usando a) expresar mediante una integral el potencial en un punto de coordenadas cilíndricas (r,θ,z); demostrar que a lo largo del eje del círculo ($r=0$) el potencial es $V=V_0(1-z(z^2+a^2)^{-1/2})$.

10. i) Probar que si
$I(a,x)=\int_0^\infty e^{-ak}\cos kx\,dk$ entonces $\frac{dI}{dx}=-\frac{x}{2a}I$ e $I(a,0)=\sqrt{\pi}/2\sqrt{a}$; hallar $I(a,x)$.
Deducir de i): ii) $\mathcal{F}(e^{-ak^2})=\mathcal{F}^{-1}(e^{-ak^2})=(2a)^{-1/2}e^{-x^2/4a}$.
iii) $\int_0^\infty k e^{-ak^2}\operatorname{sen} kx\,dk=\frac{\sqrt{\pi}}{4}a^{-3/2}\,x\,e^{-x^2/4a}$.

11. Resolver mediante transformadas de Fourier:

$\begin{cases} u_t-u_{xx}=0,\ x\in\mathbb{R},\ t>0\\ u(x,0)=e^{-x^2}\end{cases}$ $\begin{cases} u_t-u_{xx}=0 & x\geq 0\\ u(x,0)=f(x) & t>0\\ u_x(0,t)=g(t)\end{cases}$ $\begin{cases} u_t-u_{xx}+u=0,\ x\in\mathbb{R},\ t>0\\ u(x,0)=e^{-x^2/2}\end{cases}$

12. Resolver utilizando transformadas de Laplace en la variable t:

$$\begin{cases} w_t-w_{xx}=0\ ,\ x\geq 0,\ t>0\\ w(x,0)=0,\ w(0,t)=1\end{cases}$$

(dato $L(1-\phi(x/2\sqrt{t}))=\frac{1}{s}e^{-\sqrt{s}\,x}$, ϕ función error).

13. Sea $h(x)=\begin{cases}1 \text{ si } x\in[a,b]\\ 0 \text{ en el resto}\end{cases}$; calcular $\hat{h}$. Calcular $\mathcal{F}[\delta(x-a)]$.
Utilizando las transformadas anteriores resolver el problema puro de valores iniciales para la cuerda vibrante.

14. Resolver el problema 15 de p5 usando transformadas de Fourier.

15. Sea $(P)\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\ ,\ t\geq 0,\ x\geq 0\\ u(x,0)=u_t(x,0)=0\\ u(0,t)=\operatorname{sen} t\end{cases}$
i) Hallar y describir $u(x,t)$ para cada $t>0$ fijo (dato: $v=\operatorname{sen}t\cos x$ satisface la condición de contorno y también la ecuación).
ii) Hallar $\hat{u}_s$, transformada seno de la solución u hallada en i).
Hallar $\hat{u}_s$ resolviendo directamente (P) por transformada seno.

16. Comprobar que si $f(x)\to 0$ cuando $|x|\to\infty$ entonces $\widehat{f'(x)}=-ik\hat{f}(k)$.
Resolver $\begin{cases} u_t+u_x=g(x)\\ u(x,0)=f(x)\end{cases}$ por Fourier y por las características.

17. Sea (E) $u_t+(\cos t)u_x=u$, $x\in\mathbb{R}$, $t\geq 0$.
i) Resolver (E) por Fourier y a partir de las características con $u(x,0)=f(x)$.
ii) Si $f(x)=\cos^2 x$ en $[-\pi/2,\pi/2]$ y $f(x)=0$ en el resto, describir la evolución de $u(x,t)$ para $t\geq 0$.
iii) Estudiar si existe más de una solución de (E) satisfaciendo $u(0,t)=0$.

18. Hallar la solución de $\begin{cases} u_{tt}+2u_{tx}+u_{xx}=0\ ,\ x,t\in\mathbb{R}\\ u(x,0)=0\ ,\ u_t(x,0)=g(x)\end{cases}$
a) reduciéndolo a su forma canónica,
b) utilizando transformadas de Fourier.

problemas 8

1. Hallar las extremales que se indican:

$\int_0^{\pi/2}(y^2-y'^2)dx$; $y(0)=0,\ y(\frac{\pi}{2})=1$ $\int_1^2 x^2y'^2dx$; $y(1)=2,\ y(2)=1$

$\int_0^1(y^2+2xyy')dx$; $y(0)=0,\ y(1)=0$ $\int_0^1[(1-x^2)y'^2-2y^2]dx$; $y(0)=0,y(1)=2$

$\int_0^3(y+y'^2+y'^3)dx$; $y(0)=0,y(3)=5$ $\int_4^5\frac{1}{x}\sqrt{1+y'^2}\,dx$; $y(4)=3,\ y(5)=0$

$\int_0^\pi(2yz-2y^2+y'^2-z'^2)dx$; $y(0)=0,\ y(\pi)=0,\ z(0)=0,\ z(\pi)=0$

$\int_0^1(y'^2+y''^2)dx$; $y(0)=1,\ y'(0)=1,\ y(1)=2,\ y'(1)=1$

2. Hallar las extremales que se indican y precisar si minimizan o maximizan el funcional:

$\int_0^2(xy'-y'^2)dx$; $y(0)=0,\ y(2)=1$ $\int_0^1 x^2y^2dx$; $y(0)=0,\ y(1)=1$

$\int_0^1 x^3y^2\,dx$; $y(0)=y(1)=0$ $\int_0^1 y'\,dx$; $y(0)=0,\ y(1)=1$

$\int_0^1 yy'^2dx$; $y(0)=y(1)=0$ $\int_0^1 y^2y'^2dx$; $y(0)=y(1)=0$

3. Hallar la curva de menor longitud que une dos puntos fijos de un plano minimizando el funcional adecuado i) en cartesianas, ii) en polares ($r=r(\theta)$), iii) en polares ($\theta=\theta(r)$).

4. El problema de la braquistócrona (curva de descenso más rápido) conduce a minimizar el funcional $V(y)=\int_a^b\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}\,dx$
Comprobar que las extremales son arcos de cicloides: $x(\theta)=C(\theta-\operatorname{sen}\theta)$, $y(\theta)=C(1-\cos\theta)$.

5. Demostrar que las geodésicas en un cilindro son hélices o generatrices.

6. Hallar la trayectoria de los rayos luminosos en un medio en el que la velocidad de propagación es proporcional a la altura.

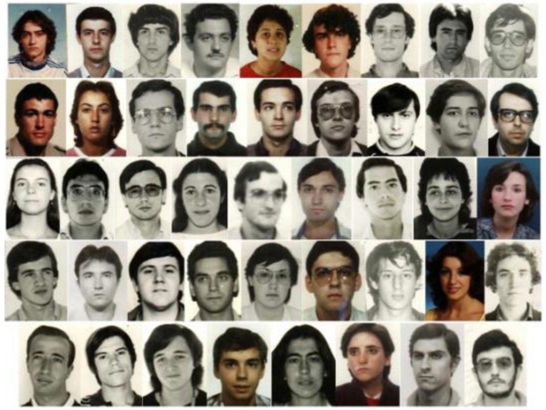
7. Hallar las extremales de $\int_0^1(x^2+y'^2)dx$ con $y(0)=y(1)=0$, $\int_0^1 y^2dx=2$
y las de $\int_1^2(x^2y'^2+2y^2)dx$ con $y(1)=-1,\ y(2)=1$, $\int_1^2 y\,dx=0$.

8. Una curva en el primer cuadrante une (0,0) con (1,0) y tiene un área dada bajo ella. Demostrar que la curva más corta de este tipo es un arco de circunferencia.

9. Una cadena flexible uniforme de longitud dada cuelga entre dos puntos. Encontrar su forma. (Imponer que el centro de gravedad ocupe la posición más baja posible).

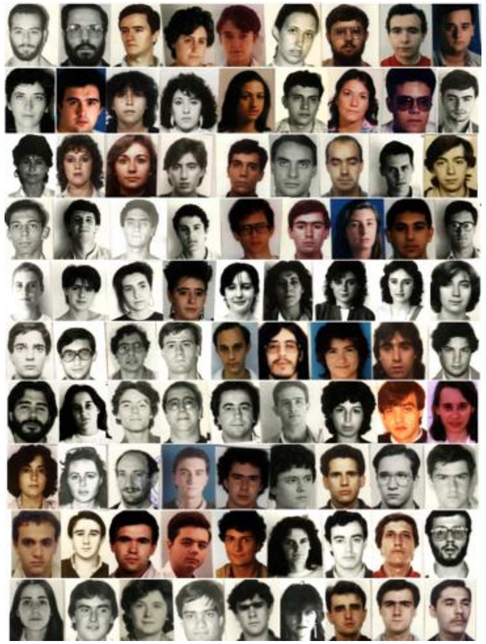
10. Hallar las extremales del funcional $v(y)=\int_a^b y^2(y'-1)^2dx$.
Estudiar si existen mínimos del funcional v con las condiciones:
i) $y(0)=y(1)=0$; ii) $y(1)=0,\ y(2)=1$; iii) $y(0)=0,\ y(2)=1$.

Estudiantes de MII (parte EDPs) desde 83-84 a 88-89 ligados a estos problemas:

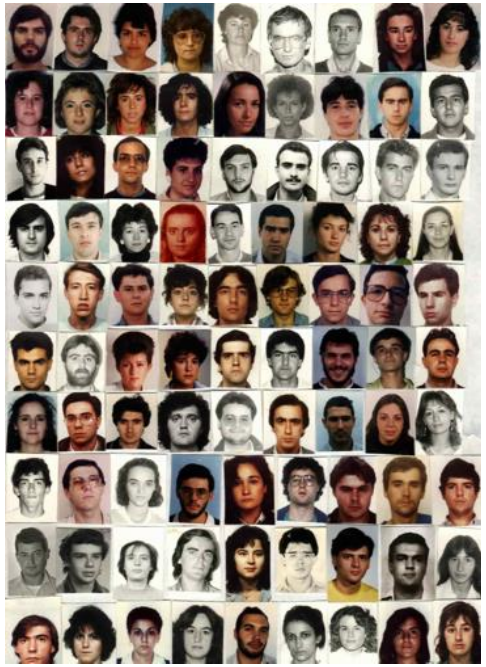


83-84

84-85

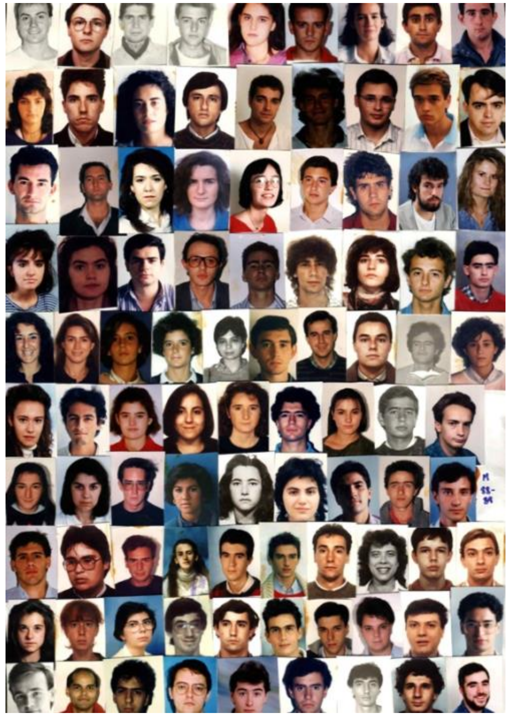


85-86



86-87

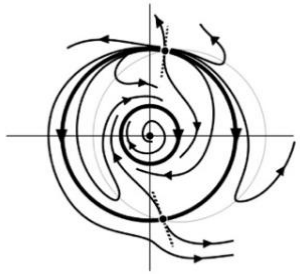
87-88 sólo EDOs (+AIbort)



88-89

89-90, 90-91, 91-92 sólo EDOs (+JChinea)

En el 90-91 primeros apuntes a ordenador.



92-93 sólo EDOs (+LMartínez)

Vuelvo a dar MII completo en el 93-94.
Otros completos serán el 96-97
y el residual final del 97-98.