Apéndice

Repaso de EDOs

Algunas EDOs de primer orden $\boxed{\frac{dy}{dx}=f(x,y)}$ resolubles

[f , f_y continuas en un entorno de $(x_o,y_o) \Rightarrow$ existe una única solución con $y(x_o)=y_o$].

Separables: $\frac{dy}{dx}=\frac{p(x)}{q(y)} \rightarrow \int q(y)\,dy=\int p(x)\,dx+C$.

Se convierten en separables: $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$ con $z=\frac{y}{x}$. $\frac{dy}{dx}=f(ax+by)$ con $z=ax+by$.

Lineales: $\frac{dy}{dx}=a(x)y+f(x) \rightarrow y=Ce^{\int a(x)dx}+e^{\int a(x)dx}\int e^{-\int a(x)dx}f(x)\,dx$.

[solución general de la homogénea + solución y_p de la no homogénea].

Exactas: $M(x,y)+N(x,y)\frac{dy}{dx}=0$ con $\begin{matrix} M=U_x \\ N=U_y \end{matrix}$ $[\,M_y \equiv N_x\,] \rightarrow U(x,y)=C$ solución.

Ej. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{y-x}$ (solución única si $y\neq x$) se puede resolver por tres caminos:

$z=\frac{y}{x} \rightarrow xz'+z=\frac{z}{z-1} \rightarrow \int\frac{(2z-2)\,dz}{z^2-2z}=-2\int\frac{dx}{x}+C \rightarrow z^2-2z=\frac{y^2}{x^2}-2\frac{y}{x}=\frac{C}{x^2}$.

$y+(x-y)\frac{dy}{dx}$ con $M_y \equiv N_x=1 \rightarrow \begin{matrix} U_x=y \rightarrow U=xy+p(y) \\ U_y=x-y \rightarrow U=xy-\frac{1}{2}y^2+q(x) \end{matrix} \rightarrow y^2-2xy=C$.

$\frac{dx}{dy}=\frac{y-x}{y}=-\frac{x}{y}+1$ lineal (solución única si $y\neq 0$) . $x=\frac{C}{y}+\frac{1}{y}\int y\,dy=\frac{C}{y}+\frac{y}{2}$.

[Pasa una sola curva integral (solución de $\frac{dy}{dx}=\cdots$ o de $\frac{dx}{dy}=\cdots$) salvo por $(0,0)$].

EDOs lineales de orden 2: [n] $\boxed{y''+a(x)y'+b(x)y=f(x)}$, a , b , f continuas en I . $|W|(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$.

Si $x_o \in I$, tiene una sola solución (definida en todo I) con $y(x_o)=y_o$, $y'(x_o)=y_o'$.

Si y_1 , y_2 son soluciones de la homogénea ($f\equiv 0$) con wronskiano $|W|(s)\neq 0$ para algún $s\in I$, la solución general de la homogénea es: $y=c_1y_1+c_2y_2$.

Si y_p es una solución de [n], la solución general de [n] es: $y=c_1y_1+c_2y_2+y_p$.

Una solución particular de [n] es: $y_p=y_2\int\frac{y_1 f}{|W|}dx-y_1\int\frac{y_2 f}{|W|}dx$ **[fvc]**.

Coeficientes constantes: [h] $\boxed{y''+ay'+by=0}$, $\mu^2+a\mu+b=0$ (autovalores).

La solución general de [h] es:
- Si $\mu_1\neq\mu_2$ reales $\rightarrow y=c_1 e^{\mu_1 x}+c_2 e^{\mu_2 x}$
- Si μ doble (real) $\rightarrow y=(c_1+c_2x)\,e^{\mu x}$
- Si $\mu=p\pm iq \rightarrow y=(c_1\cos qx+c_2\,\mathrm{sen}\,qx)\,e^{px}$

Método de coeficientes indeterminados para [c] $\boxed{y''+ay'+by=f(x)}$:

Si $f(x)=e^{\mu x}p_m(x)$, con p_m polinomio de grado m , y μ no es autovalor, tiene [c] solución particular de la forma $y_p=e^{\mu x}P_m(x)$, con P_m del mismo grado. Si μ es autovalor de multiplicidad r , hay $y_p=x^r e^{\mu x}P_m(x)$.

Si $f(x)=e^{\mu x}\left[p_j(x)\cos qx+q_k(x)\,\mathrm{sen}\,qx\right]$, p_j , q_k de grados j , k , y $p\pm iq$ no es autovalor, hay $y_p=e^{px}\left[P_m(x)\cos qx+Q_m(x)\,\mathrm{sen}\,qx\right]$ con P_m y Q_m de grado $m=\max\{j,k\}$. Si $p\pm iq$ es autovalor hay $y_p=xe^{px}\left[P_m(x)\cos qx+Q_m(x)\,\mathrm{sen}\,qx\right]$.

Ej. $y''-y=e^x$. $\mu=\pm 1 \rightarrow$ solución general: $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+y_p$, con:

$y_p=Axe^x \rightarrow A(x+2)-Ax=1 \rightarrow y_p=\frac{1}{2}xe^x$. O más largo:

$|W|(x)=\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix}=-2$, $y_p=e^{-x}\int\frac{e^xe^x}{-2}-e^x\int\frac{e^{-x}e^x}{-2}=-\frac{1}{4}e^x+\frac{1}{2}xe^x$.

Euler: [u] $\boxed{x^2y''+axy'+by=0}$, $\mu(\mu-1)+a\mu+b=0$.

La solución general de [u] es:
Si $\mu_1\neq\mu_2$ reales $\to$ $y=c_1x^{\mu_1}+c_2x^{\mu_2}$
Si μ doble (real) $\to$ $y=[c_1+c_2\ln x]\,x^{\mu}$
Si $\mu=p\pm qi$ $\to$ $y=[c_1\cos(q\ln x)+c_2\,\mathrm{sen}(q\ln x)]\,x^p$

Una y_p de $x^2y''+axy'+by=h(x)$ se obtiene de la [**fvc**] (con $f(x)=h(x)/x^2$),
o utilizando que con $x=\mathrm{e}^s$ se convierte en $y''(s)+(a-1)y'(s)+by(s)=h(\mathrm{e}^s)$.

Si $\boxed{b(x)\equiv 0}$, $y'=v$ lleva [e] a lineal de primer orden en v .

Ej. $xy''-2y'=x$. Se puede ver como Euler: $x^2y''-2xy'=x^2$, $\mu(\mu-1)-2\mu=0$
$\to$ $y=c_1+c_2x^3+y_p$, con $y_p=Ax^2$ $\left(y_p=A\mathrm{e}^{2s}\right)$ $\to$ $y_p=-\frac{1}{2}x^2$.
$\left[\text{O bien, } |W|(x)=\begin{vmatrix}1 & x^3\\ 0 & 3x^2\end{vmatrix}=3x^2\ ,\ y_p=x^3\int\frac{1\cdot 1}{3x^2}+\int\frac{x^3\cdot 1}{3x^2}=-\frac{1}{2}x^2\right]$.

O de otra forma: $y'=v$ $\to$ $v'=\frac{2v}{x}+1$ $\to$ $v=Cx^2+x^2\int\frac{dx}{x^2}=Cx^2-x$ $\to$ $y=K+Cx^3-\frac{1}{2}x^2$.

Para otras ecuaciones lineales de segundo orden hay buscar:

Soluciones en forma de serie:

Si a, b son analíticas en $x=0$, es un punto **regular** de [e] $\boxed{y''+a(x)y'+b(x)y=0}$
y la solución de [e] es $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_kx^k=c_0y_1+c_1y_2$, con c_0 , c_1 arbitrarios.

$x=0$ es punto **singular regular** de [e*] $\boxed{x^2y''+xa^*(x)y'+b^*(x)y=0}$ si a^*, b^* son analíticas en $x=0$. Sean $r_1\geq r_2$ las raíces de $q(r)=r(r-1)+a_0^*r+b_0^*$.

Hay solución y_1 de [e*] de la forma $y_1=x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}c_kx^k,\ c_0\neq 0$.

La segunda solución y_2 linealmente independiente es:

a] Si $r_1-r_2\neq 0,1,\cdots$: $y_2=x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty}b_kx^k,\ b_0\neq 0$. b] Si $r_1=r_2$: $y_2=x^{r_1+1}\sum_{n=0}^{\infty}b_kx^k+x_1\ln x$.

c] Si $r_1-r_2\in\mathbf{N}$: $y_2=x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty}b_kx^k+dy_1\ln x$, $b_0\neq 0$, $d\in\mathbf{R}$.

EDOs importantes resolubles utilizando series:

Legendre $\boxed{(1-x^2)y''-2xy'+p(p+1)y=0}$. Tiene soluciones polinómicas si $p=n\in\mathbf{N}$:

$$P_0=1\ ,\ P_1=x\ ,\ P_2=\tfrac{3}{2}x^2-\tfrac{1}{2}\ ,\ P_3=\tfrac{5}{2}x^3-\tfrac{3}{2}x\ ,\ P_4=\tfrac{35}{8}x^4-\tfrac{15}{4}x^2+\tfrac{3}{8}\ ,\ \ldots$$

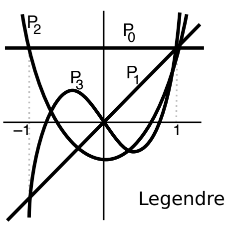
Se cumple que: $\int_{-1}^{1}P_nP_m\,dx=0$, si $m\neq n$; $\int_{-1}^{1}P_n^2\,dx=\frac{2}{2n+1}$.

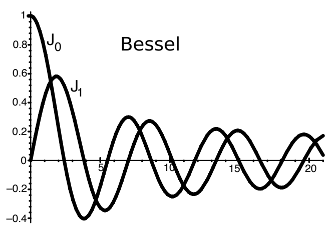
Bessel: $\boxed{x^2y''+xy'+[x^2-p^2]y=0}$ $\to$ $r=\pm p$. $r_1=p$ $\to$ $J_p(x)\equiv\left[\frac{x}{2}\right]^p\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\,[x/2]^{2m}}{m!\,\Gamma(p+m+1)}$.

J_p soluciones acotadas en $x=0$, con infinitos ceros [los de J_0 son: 2.4.., 5.5.., ...].
Las soluciones linealmente independientes de ellas son no acotadas en 0 .

Cuando $p=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\ldots$, la solución es expresable con funciones elementales
$\left[\text{por ejemplo, si } p=\frac{1}{2} \text{ es } y=c_1\frac{\mathrm{sen}\,x}{\sqrt{x}}+c_2\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right]$.

Recurrencia: $J_{p+1}=\frac{2p}{x}J_p-J_{p-1}$. Derivadas: $\left[x^pJ_p(x)\right]'=x^pJ_{p-1}(x)$, $J_0'(x)=-J_1$.



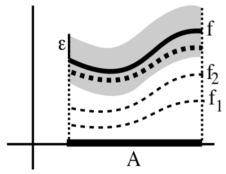


Repaso de convergencia uniforme

Sea la **sucesión de funciones** definidas en $A\subset\mathbf{R}$: $\{f_n(x)\}=f_1(x),f_2(x),\dots,f_n(x),\dots$.

> $\{f_n\}$ **converge puntualmente** f en A si para cada $x\in A$ es $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$.
>
> $\{f_n\}$ **converge uniformemente** hacia su límite puntal f en A si
> $\forall\varepsilon>0$ existe algún N tal que $\forall x\in A$, si $n\geq N$ entonces $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$.

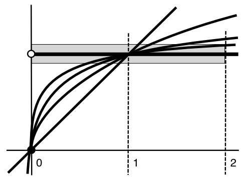
Gráficamente, si $\{f_n\}\to f$ uniformemente, a partir de un N todas las gráficas de las f_n quedan dentro de toda banda de altura 2ε alrededor de la de f. Si la convergencia es sólo puntual, para cada x el N es distinto y no se puede dar uno válido para todos los puntos de A.



Ej. $f_n(x)=x^{1/n}\to\begin{cases}0 & \text{si } x=0\\ 1 & \text{si } x\in(0,\infty)\end{cases}$ (puntualmente).

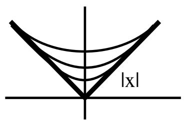
La convergencia es uniforme en $[1,2]$, pero no en $[0,1]$.

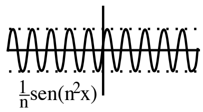
Para cada $x\in[0,1]$ existe N tal que si $n\geq N$ el punto $(x,x^{1/n})$ está dentro de la banda, pero hace falta elegir N mayores según nos acercamos a 0. En $[1,2]$ la convergencia es uniforme, pues el N que vale para $x=2$ claramente vale también para el resto de los x del intervalo.



> f_n continuas en un intervalo I y $\{f_n\}\to f$ uniformemente en $I\Rightarrow f$ continua en I.

Si las f_n son derivables, que $f_n\to f$ uniformemente no basta para que f sea derivable, o puede existir f' y no ser el límite de las f_n' (como en los ejemplos de la derecha); para que pasen ambas cosas, deben también converger las f_n' uniformemente.





Las **series de funciones** son un caso particular

> $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ **converge puntualmente** o **uniformemente** en A hacia f si lo hace la sucesión de sus **sumas parciales** $S_n=f_1+\cdots+f_n$.

Criterio de Weierstrass

> Sean $\{f_n\}$ definidas en A y $\{M_n\}$ una sucesión de números tal que $|f_n(x)|\leq M_n$ $\forall x\in A$ y tal que $\sum M_n$ converge. Entonces $\sum f_n$ converge uniformemente en A.

Ej. $\sum\frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}$ converge uniformemente en todo $\mathbf{R}$ pues $\left|\frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}\right|\leq\frac{1}{n^2}$ y $\sum\frac{1}{n^2}$ converge.

[Se tiene entonces, por ejemplo, que la suma $f(x)$ de esta serie es continua en todo $\mathbf{R}$].

La serie obtenida derivando término a término: $\sum\frac{\cos nx}{n}$ diverge, por ejemplo, si $x=0$.

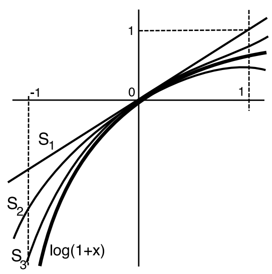
(Para otros x, como $x=\pi$, converge por Leibniz, y para casi todos es difícil decirlo).

Así pues, en general, no se pueden derivar término a término las sumas infinitas como las finitas. Aunque sí se puede hacer con las **series de potencias**:

> La serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_nx^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots$ converge uniformemente en todo intervalo cerrado $[a,b]\subset(-R,R)$ (R radio de convergencia). Para $|x|<R$ la función $f(x)$ definida por la serie es derivable y $f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_nx^{n-1}=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\cdots$

Ej. $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots$ con $R=1$, converge puntualmente si $x\in(-1,1]$ [hacia $\log(1+x)$] y uniformemente en cualquier intervalo $[a,1]$, $a>-1$, pero no lo hace en todo $(-1,1]$, pues las sumas parciales están acotadas en ese intervalo y el $\log$ no.

La serie derivada término a término $1-x+x^2+\cdots$ converge en $(-1,1)$ [hacia $\frac{1}{1+x}$].



Repaso de cálculo en varias variables

Sean $\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $A \subset \mathbf{R}^n$. **Entorno** de centro $\boldsymbol{\alpha}$ y radio r es $B_r(\boldsymbol{\alpha}) \equiv \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}-\boldsymbol{\alpha}\| < r\}$.
$\boldsymbol{\alpha}$ es **interior** a A si hay algún $B_r(\boldsymbol{\alpha}) \subset A$. A es **abierto** si $A = int\,A \equiv \{\mathbf{x}$ interiores a $A\}$.
Frontera de A es $\partial A \equiv \{\mathbf{x} : \forall r, B_r(\mathbf{x})$ tiene puntos de A y de $\mathbf{R}^n - A\}$. $\overline{A} = int\,A \cup \partial A$.

La **derivada según el vector v** de un campo escalar $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ en un punto $\boldsymbol{\alpha}$ es:

$$D_{\mathbf{v}} f(\boldsymbol{\alpha}) \equiv f_{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\alpha}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\boldsymbol{\alpha}+h\mathbf{v}) - f(\boldsymbol{\alpha})}{h} \underset{\text{si } f\in C^1}{=} \nabla f \cdot \mathbf{v}$$

[si $\mathbf{v}$ es unitario se llama direccional, si $\mathbf{v} = \mathbf{i}$ es la parcial $\partial f / \partial x(\boldsymbol{\alpha})$, ...].

Si $\left\{\begin{array}{l} y_1 = f_1(x_1,..,x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = f_n(x_1,..,x_n) \end{array}\right.$, el determinante **jacobiano** es $\dfrac{\partial(y_1,\ldots,y_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)} = \begin{vmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \cdots & \partial f_1/\partial x_n \\ \vdots & & \vdots \\ \partial f_n/\partial x_1 & \cdots & \partial f_n/\partial x_n \end{vmatrix}$.

Polares: $\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r \,\mathrm{sen}\,\theta \end{array}\right\} \to \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$. **Esféricas**: $\left.\begin{array}{l} x = r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi \\ z = r\cos\theta \end{array}\right\} \to \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} = r^2\,\mathrm{sen}\,\theta$.

Cambios de variable en integrales dobles:

Sea $\mathbf{g} : (u,v) \to \big(x(u,v), y(u,v)\big)$ de C^1, inyectiva en D^*, $\mathbf{g}(D^*) = D$ y f integrable.
Entonces: $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f\big(x(u,v), y(u,v)\big) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$.

Integrales de línea de campos escalares:

Sea C la curva C^1 descrita por una función vectorial $\mathbf{c}(t) : [a,b] \to \mathbf{R}^2$ y sea f un campo escalar tal que $f(\mathbf{c}(t))$ es continua. Entonces: $\int_C f\,ds \equiv \int_a^b f(\mathbf{c}(t))\,\|\mathbf{c}'(t)\|\,dt$.

[No depende de la $\mathbf{c}(t)$ elegida. Si C es C^1 a trozos, se divide $[a,b]$ y se suman las integrales].

Teorema de la divergencia (en el plano):

Sea $D \subset \mathbf{R}^2$ limitado por ∂D curva cerrada simple, $\mathbf{f} : D \to \mathbf{R}^2$ campo vectorial C^1, y $\mathbf{n}$ el vector normal unitario exterior a ∂D. Entonces $\iint_D \mathrm{div}\,\mathbf{f}\,dxdy = \oint_{\partial D} \mathbf{f}\,\mathbf{n}\,ds$.

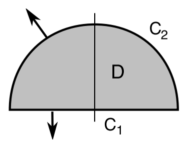
[Si ∂D viene descrita por $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$ un normal unitario es $\mathbf{n} = (y'(t), -x'(t)) / \|\mathbf{c}'(t)\|$].

Ej. Comprobemos el teorema para $\mathbf{f}(x,y) = (7, y^2-1)$ en el semicírculo $r \le 3$, $0 \le \theta \le \pi$:

$\iint_D 2y\,dxdy = \int_0^\pi\int_0^3 2r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,dr\,d\theta = 36$.

Para C_1, si $\mathbf{c}(x) = (x,0)$, $x \in [-3,3] \to \int_{C_1} (1-y^2)\,ds = \int_{-3}^3 dx = 6$.

Para C_2, si $\mathbf{c}(t) = (3\cos t, 3\,\mathrm{sen}\,t)$, $t \in [0,\pi] \to \|\mathbf{c}'(t)\| = 3$. Como $\mathbf{n} = (\cos t, \mathrm{sen}\,t)$, $\int_{C_2} \mathbf{f}\,\mathbf{n}\,ds = 3\int_0^\pi (7\cos t + 9\,\mathrm{sen}^3 t - \mathrm{sen}\,t)\,dt = 30$.



Integrales de superficie de campos escalares:

Sea S la superficie descrita por la función vectorial $\mathbf{r}(u,v) : T \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ y sea f tal que $f(\mathbf{r}(u,v))$ es continua. Entonces: $\iint_S f\,dS \equiv \iint_T f(\mathbf{r}(u,v)) \underbrace{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\|}_{\text{producto vectorial fundamental}} du\,dv$.

[Si S es del tipo $z = h(x,y)$ se puede describir $\mathbf{r}(x,y) = (x, y, h(x,y))$, con T proyección de S sobre $z=0$, y el producto vectorial fundamental adopta la forma $(-h_x, -h_y, 1)$].

Ej. Integremos $f(x,y,z) = z^2$ sobre la superficie esférica $\mathbf{x} = a$.

Eligiendo $\mathbf{r}(u,v) = (a\cos u\,\mathrm{sen}\,v, a\,\mathrm{sen}\,u\,\mathrm{sen}\,v, a\cos v)$,

$\iint_S z^2\,dS = \int_0^\pi\int_0^{2\pi} a^2\cos^2 v\, \underbrace{a^2\mathrm{sen}\,v}_{\text{pvf}}\,du\,dv = \frac{4\pi}{3}a^4$.

Con $\mathbf{r}(x,y) = \left(x, y, \sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)$, el pvf es $\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \to$

$\iint_S z^2 dS = 2\iint_{T^*} a\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy = 4\pi\int_0^a ar\sqrt{a^2-r^2}\,dr = \frac{4\pi}{3}a^4$.