Introducción

Estos apuntes están dedicados al estudio de las **ecuaciones en derivadas parciales** (EDPs), aunque también se estudiarán los problemas de contorno para las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs). Una ecuación en derivadas parciales es una ecuación en la que aparece una función incógnita de varias variables y algunas de sus derivadas parciales. Todas las EDPs que veremos serán **lineales**. Más en concreto, salvo un breve estudio de las lineales de primer orden, trataremos de EDPs **lineales de segundo orden**, del tipo:

$$[1]\ L[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} B_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + Cu = F$$

donde u, A_{ij}, B_j, C y D son funciones de $(x_1, \ldots, x_n)$. Una **solución** de [1] será una función $u(x_1, \ldots, x_n)$ de clase C^2 en una región Ω de $\mathbf{R}^n$ que sustituida en la ecuación la convierte en una identidad.

Entre las EDPs lineales de segundo orden se encuentran muchas ecuaciones de la física. Entre ellas las tres clásicas:

ecuación de ondas	$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$
ecuación del calor	$u_t - k\Delta u = 0$
y **ecuación de Laplace**	$\Delta u = 0$

que son ejemplos, respectivamente, de los tres grandes tipos en que se clasifican: **hiperbólicas**, **parabólicas** y **elípticas**. La teoría avanzada de EDPs viene a ser la generalización del estudio de estas tres ecuaciones. Sus propiedades son tan diferentes que no existen teorías generales como la de las EDOs lineales.

En el **capítulo 1** se verá que, normalmente, no se puede hallar la solución general de una EDP. Sólo la tendremos para algunas de **primer orden** en dos variables (y aparecerá una función arbitraria en esa solución) y para muy pocas de segundo (en particular, para la de ondas, con dos funciones arbitrarias). Además veremos qué condiciones adicionales (iniciales o de contorno) hay que imponer a las EDPs clásicas para que tengan **solución única** que dependa de forma continua de los datos. En la búsqueda de soluciones generales y en la unicidad será importante el concepto de **curva característica**, solución de una EDO muy ligada a la EDP.

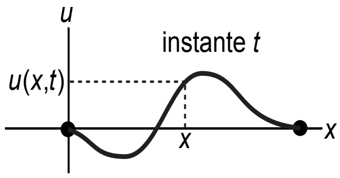
El **capítulo 3** trata el viejo método de **separación de variables** para resolver las ecuaciones clásicas (homogéneas y no homogéneas y en 2 o más variables) en recintos sencillos (y acotados, al menos, en una de las variables). Se supone la solución como producto de funciones de cada una de las variables, lo que lleva a resolver EDOs en cada una de ellas, alguna con condiciones de contorno. Resueltas todas, las soluciones quedan expresadas en términos de **series de Fourier**. La necesaria teoría de **problemas de contorno para EDOs** (muy diferente de la de los de valores iniciales) y una descripción de dichas series se dará previamente en el **capítulo 2**. En ambos capítulos hablaremos brevemente de las **funciones de Green**.

El **capítulo 4** estudia varios temas independientes. Analizaremos y dibujaremos las soluciones de la ecuación de **ondas** a partir de fórmulas integrales, primero para una $u(x,t)$ (ecuación de la cuerda vibrante) y luego, con menos detalles, para tres y dos dimensiones espaciales. También utilizaremos la **transformada de Fourier** para resolver algunas EDPs en recintos no acotados (en particular, la del calor en la recta infinita).

Los apuntes acaban con un **apéndice** en el que se repasan algunos conocimientos matemáticos previos (de EDOs, de cálculo en varias variables y de convergencia uniforme) que se utilizan en los capítulos anteriores.

Para acabar esta introducción, describamos el significado físico de las ecuaciones clásicas. Interpretémoslas únicamente en sus versiones más sencillas (que son las más tratadas en los apuntes): cuando la u es función de dos variables.

Empecemos con la ecuación de ondas unidimensional o ecuación de la **cuerda vibrante**. Consideremos las oscilaciones de una cuerda totalmente elástica, tensa y fija en sus extremos. Se supone que sus oscilaciones son siempre transversales y de pequeña amplitud. En esas condiciones se puede ver que si $u(x,t)$ representa el desplazamiento vertical del punto de abscisa x en el instante t, la función $u(x,t)$ satisface la EDP:



$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t)$$

donde $c^2 = T_o/\rho$, con T_o fuerza de tensión en los extremos, ρ masa por unidad de longitud (densidad lineal) y $F(x,t)$ fuerza externa por unidad de masa que actúa en dirección vertical sobre el punto x en el instante t. Para determinar la evolución de una cuerda concreta, se verá que debemos fijar la posición de la cuerda y la distribución de velocidades verticales en el instante inicial, es decir, $u(x,0)$ y $u_t(x,0)$. También se deberá de tener en cuenta que permanece fija en los extremos $x=0$ y $x=L$, o sea, que $u(0,t)=u(L,t)=0$. No olvidemos que el modelo matemático de esta cuerda ideal es sólo una simplificación de la realidad; lo mismo ocurre con las siguientes.

La distribución de temperaturas a lo largo del tiempo en una varilla delgada (que podemos suponer unidimensional) viene regida por la **ecuación del calor**:

$$u_t - k u_{xx} = 0$$

donde $u(x,t)$ representa la temperatura del punto x en el instante t y $k>0$ es una constante proporcional a la conductibilidad e inversamente proporcional a la densidad y al calor específico. Si existiesen fuentes de calor en el interior de la varilla deberíamos escribir una $F(x,t)$ en el segundo miembro de la ecuación. A diferencia de la de ondas, aquí bastará dar sólo la distribución inicial de temperaturas $u(x,0)$ (junto con las condiciones de contorno) para determinar la solución.

La **ecuación de Laplace**:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

puede describir, entre otras situaciones físicas, la distribución estacionaria de temperaturas en una placa bidimensional. La existencia de fuentes de calor en el interior de la superficie aportaría una F en el segundo miembro (ecuación de Poisson). Frente a las dos ecuaciones anteriores que describían la evolución de un sistema a lo largo del tiempo, ésta describe situaciones estacionarias y los problemas que se plantean para ella son siempre con condiciones de contorno.

1. Características; problemas clásicos

En las EDOs se planteaban problemas de valores iniciales, que casi siempre tenían solución única. Para resolverlos (las pocas veces que se podía) se solía hallar primero la solución general e imponer después una o varias condiciones, dependiendo del orden de la ecuación, en un t_o dado. En este capítulo intentamos ver cuáles son los problemas análogos para las EDPs. La variedad y complicación será mucho mayor que en las ordinarias.

Comenzamos en la sección 1.1 tratando las EDPs **lineales de primer orden en dos variables**, es decir, ecuaciones del tipo:

$$[1] \quad A(x,y)\,u_y + B(x,y)\,u_x = C(x,y)\,u + D(x,y) \ ,$$

que no tienen muchas aplicaciones físicas, pero que plantean de forma sencilla los problemas de las de segundo orden. Veremos que pueden resolverse si es posible integrar una EDO de primer orden, cuyas curvas integrales son llamadas **características** de [1]. En la solución general de [1] aparecerá una función p arbitraria (como en el sencillo ejemplo $u_x=0$, de solución $u(x,y)=p(y)$, para cualquier p). Para precisar esta p fijaremos el valor de la solución a lo largo de una curva G del plano xy (**problema de Cauchy**) y la solución quedará determinada de forma única si G no es tangente a las curvas características.

En 1.2 abordamos las EDPs **lineales de segundo orden en dos variables**:

$$[2] \quad Au_{yy} + Bu_{xy} + Cu_{xx} + Du_y + Eu_x + Hu = F$$

con u y los coeficientes funciones de x e y. Para intentar resolverlas, buscaremos escribirlas, mediante cambios de variables, en la forma más sencilla posible (**forma canónica**). Esto nos llevará a la clasificación de [2] en **hiperbólicas, parabólicas y elípticas**. Otras curvas características volverán a jugar un papel esencial. En unos pocos casos, a partir de la forma canónica, se podrá calcular la solución general, que dependerá de dos funciones arbitrarias. Uno de esos casos será la ecuación de **ondas**.

Para aislar una única solución de [2] podrían darse unos datos de Cauchy análogos a los de [1]. Pero esto sólo funciona para algunos problemas ligados la ecuación de ondas (para ella deduciremos la **fórmula de D'Alembert** que expresa sus soluciones en términos de la posición y velocidad iniciales) y carece de sentido físico y plantea problemas matemáticos para las otras ecuaciones clásicas. Las condiciones iniciales y de contorno ligadas a un problema físico real son muy diferentes para cada ecuación. Incluso a una misma ecuación aparecen asociadas condiciones de diferentes tipos. No existe una teoría general de EDPs que pueda abarcar todas las posibilidades. En cada caso habrá que comprobar que el problema está '**bien planteado**', es decir, que tiene **solución única que depende continuamente de los datos** (lo que era en las EDOs de comprobación trivial). La sección 1.3 se dedica a describir diferentes problemas asociados a las ecuaciones clásicas y a estudiar su unicidad.

1.1. EDPs lineales de primer orden

Sea [E] $\boxed{A(x,y)\,u_y + B(x,y)\,u_x = C(x,y)\,u + D(x,y)}$, $u = u(x,y)$.

Para resolverla consideramos la EDO de primer orden:

$$[\mathrm{e}]\ \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{A(x,y)}{B(x,y)}} \qquad \textbf{ecuación característica}$$

Suponemos A y B de C^1 y que no se anulan simultáneamente en una región del plano. Entonces [e] tendrá en ella unas curvas integrales:

$$\boxed{\xi(x,y) = K} \qquad \textbf{curvas características} \text{ de [E]}$$

(se podrán hallar explícitamente si [e] es separable, lineal, exacta. . .)

Veamos que el cambio de variable

$$\begin{cases} \xi = \xi(x,y) \\ \eta = y \qquad \text{(o bien } \eta = x \text{)} \end{cases}$$

lleva [E] a una ecuación en las nuevas variables (ξ,η) en la que no aparece u_ξ y que es resoluble elementalmente. En efecto:

$$\begin{cases} u_y = u_\xi\,\xi_y + u_\eta \\ u_x = u_\xi\,\xi_x \end{cases} \to\ Au_\eta + [A\xi_y + B\xi_x]u_\xi = Cu + D$$

Como sobre las soluciones $y(x)$ definidas por $\xi(x,y) = K$ se tiene:

$$\xi(x,y(x)) = K \quad \to \quad \xi_x + \xi_y \tfrac{dy}{dx} = \tfrac{1}{B}[A\xi_y + B\xi_x] = 0\ ,$$

deducimos que [1] se convierte en:

$$[\mathrm{E}^*]\ \boxed{A(\xi,\eta)\,u_\eta = C(\xi,\eta)\,u + D(\xi,\eta)}\ ,\ u = u(\xi,\eta)\ .$$

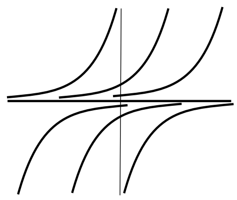
(Si hubiésemos escogido $\eta = x$ habríamos llegado a $[\mathrm{E}_*]$ $\boxed{Bu_\eta = Cu + D}$; se observa que queda tras el cambio el término con la variable elegida).

$[\mathrm{E}^*]$ (o $[\mathrm{E}_*]$) es una **EDO lineal de primer orden** en η si consideramos la ξ constante (y, por tanto, es resoluble). En su solución aparecerá una constante arbitraria para cada ξ, es decir, una función arbitraria de ξ:

$$[\bullet]\ u(\xi,\eta) = p(\xi)\,\mathrm{e}^{\int \frac{C}{A}d\eta} + \mathrm{e}^{\int \frac{C}{A}d\eta} \int \tfrac{D}{A}\,\mathrm{e}^{-\int \frac{C}{A}d\eta}\,d\eta\ , \quad \text{con } p \text{ arbitraria de } C^1.$$

Deshaciendo el cambio queda resuelta [E] en función de x e y. En la solución, como se observa, **aparece una función arbitraria de las características**.

Ej 1. $\boxed{y^2u_y + u_x = 2xu}$ $\ \frac{dy}{dx} = y^2$, $\frac{1}{y} = K - x \ \to$ $x + \frac{1}{y} = K$ características

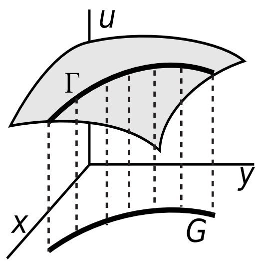


$$\begin{cases} \xi = x + \frac{1}{y} \\ \eta = x \ \text{[mejor]} \end{cases} \to u_\eta = 2xu = 2\eta u \to u = p(\xi)\,\mathrm{e}^{\eta^2} = \boxed{p\big(x + \tfrac{1}{y}\big)\,\mathrm{e}^{x^2}}\ ,\ p \in C^1.$$

$$\begin{cases} \xi = x + \frac{1}{y} \\ \eta = y \ \text{[peor]} \end{cases} \to y^2u_\eta = 2xu \overset{x=\xi-\frac{1}{\eta}}{\to} u_\eta = \big(\tfrac{2\xi}{\eta^2} - \tfrac{2}{\eta^3}\big)u \ \to\ u = p^*(\xi)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{\eta^2} - \frac{2\xi}{\eta}} = p^*\big(x + \tfrac{1}{y}\big)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{y^2} - \frac{2x}{y}}.$$

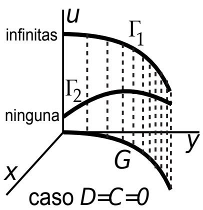
[Aunque no lo parezca, las expresiones con p y p^* definen la misma solución general, pues, $\mathrm{e}^{-\frac{1}{y^2} - \frac{2x}{y}} = \mathrm{e}^{-\left(x + \frac{1}{y}\right)^2}\mathrm{e}^{x^2}$, y $p^*(x + \frac{1}{y})\,\mathrm{e}^{-\left(x + \frac{1}{y}\right)^2}$ es otra función arbitraria de $x + \frac{1}{y}$].

¿Cómo determinar una única solución de [E]? Cada solución describe una superficie en el espacio. Generalizando el problema de valores iniciales para EDOs definimos:



> El **problema de Cauchy** para [E] consiste en hallar la solución $u(x,y)$ que contenga una curva dada Γ del espacio, o lo que es lo mismo, que tome unos valores dados sobre una curva G del plano xy.

En particular, si G es una recta x ó $y=cte$ [por ejemplo, si se pide $u(x,0)=f(x)$], se tiene lo que se llama un **problema de valores iniciales**.



Un problema de Cauchy puede no tener solución única.

Por ejemplo, **la solución general de** $Au_y+Bu_x=0$ **es** $u(x,y)=p(\xi(x,y))$ y cada solución toma valor constante sobre cada $\xi(x,y)=K$. Si buscamos una solución que contenga una curva Γ cuya proyección G sea una de las características se debe exigir que Γ esté en un plano horizontal $z=C$. Entonces hay infinitas soluciones [una para cada función p con $p(K)=C$]. Si Γ no tiene z constante, no hay solución que contenga a Γ.

En general, supongamos que Γ es una curva suave dada paramétricamente por $\Gamma(s)=(g(s),h(s),f(s))$, o sea, que buscamos la solución con $\boxed{u(g(s),h(s))=f(s)}$.

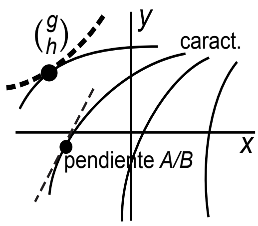
Sustituyendo en [•] y despejando p: $p\big(\xi(g(s),h(s))\big)=F(s)$, con F conocida.

Llamemos $v=\xi\big(g(s),h(s)\big)$. Si es posible despejar s en función de v de forma única $s=s(v)$, la $p(v)=F\big(s(v)\big)$ queda determinada y, por tanto, hay una única solución de [E] conteniendo a Γ. Sabemos que esta función inversa existe seguro en un entorno de cada s_o para el que sea:

$$\frac{dv}{ds}\Big|_{s=s_o}=\frac{d}{ds}\big[\xi\big(g(s),h(s)\big)\big]_{s=s_o}=\nabla\xi\big(g(s_o),h(s_o)\big)\cdot\big(g'(s_o),h'(s_o)\big)\neq 0$$

Como es $\nabla\xi$ perpendicular a las características y (g',h') tangente a G, tenemos:

> Si la curva G no es tangente en ningún punto a ninguna característica el problema de Cauchy tiene solución única, al menos local.



La tangencia se puede ver sin resolver la EDO [e], con su campo de direcciones: el vector (B,A) es tangente a sus soluciones y $(A,-B)$ es perpendicular. Por tanto:

> G es tangente a alguna característica en un punto $(g(s_o),h(s_o))$ si y sólo si
> $$\Delta(s_o)\equiv g'A(g,h)-h'B(g,h)\Big|_{s=s_o}=0\ .$$
> Si $\Delta(s)\neq 0\ \forall s$ el problema de Cauchy tiene solución única.

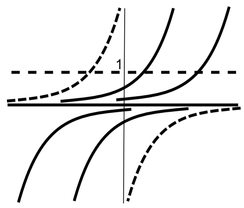
[Si $\Delta(s)\equiv 0\ \forall s$, G es tangente en cada punto, es decir, es una característica].

Ej 1*. Imponemos datos a $\boxed{y^2u_y+u_x=2xu}$, de solución general $\boxed{u=p(x+\frac{1}{y})\,e^{x^2}}$.

$\boxed{u(x,1)=1}$. Como $y=1$ nunca es tangente a las características, según muestra el dibujo o asegura

$$\Delta(x)=1\cdot 1^2-0\cdot 1=1\neq 0\,,$$

el problema de valores iniciales tendrá solución única:



$$p(x+1)e^{x^2}=1\ \overset{x+1=v}{\to}\ p(v)=e^{-(v-1)^2}$$
$$\to\ u=e^{x^2-\left(x+\frac{1}{y}-1\right)^2}=e^{2x-\frac{2x}{y}+\frac{2}{y}-\frac{1}{y^2}-1}$$

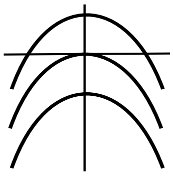
Los datos $\boxed{u(x,-\frac{1}{x})=0}$ y $\boxed{u(x,-\frac{1}{x})=1}$ traerán problemas (datos sobre característica).

Para el primero: $p(0)e^{x^2}=0$. Lo cumple toda $p\in C^1$ con $p(0)=0$. Infinitas soluciones.

Para el segundo: $p(0)e^{x^2}=1$, $p(0)=e^{-x^2}$. Imposible. No tiene solución.

Aquí el Δ es: $\Delta(x)=1\cdot\big(-\frac{1}{x}\big)^2-\frac{1}{x^2}\cdot 1\equiv 0$, lo que confirma que G es una característica.

Ej 2. $\boxed{2xu_y - u_x = 4xy}$ $\frac{dy}{dx} = -2x \to\ y+x^2 = K$ características.



$\begin{cases} \xi = y + x^2 \\ \eta = y \end{cases} \to 2xu_\eta = 4xy\ ;\ u_\eta = 2\eta\ \to\ u = p(\xi) + \eta^2 = p(y+x^2) + y^2$

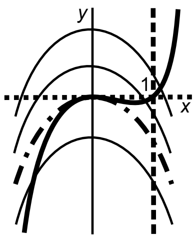
$\begin{cases} \xi = y + x^2 \\ \eta = x \end{cases} \to -u_\eta = 4xy = 4\xi\eta - 4\eta^3 \to$

$$u = p^*(\xi) + \eta^4 - 2\xi\eta^2 = p^*(y+x^2) - 2yx^2 - x^4$$

Imponemos diferentes datos de Cauchy a la ecuación y analizamos la unicidad:

$\boxed{u(1,y)=0} \to p(y+1) + y^2 = 0 \to p(v) = -(v-1)^2 \to u = 2y + 2x^2 - 2yx^2 - x^4 - 1$

[o bien, $p^*(y+1) - 2y - 1 = 0 \to p^*(v) = 2v - 1$]



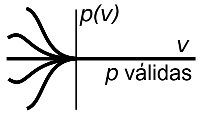
[p ó p^* fijadas $\forall v$, pues $x=1$ no es tangente a las características].

$\boxed{u(x,-x^2) = 0} \to\ p(0) + x^4 = 0$. Imposible, no hay solución.

$\boxed{u(x,-x^2) = x^4} \to\ p(0)=0$. Cada $p \in C^1$ con $p(0)=0$ nos da una solución diferente: hay infinitas.

Datos sobre características dan siempre 0 o ∞ soluciones
[pues se acaba en p(cte)=algo, que puede ser constante o no].

$\boxed{u(x,0)=0} \to\ p(x^2)=0$. Sólo queda fijada $p(v)=0$ para $v \geq 0$, pero no hay ninguna condición sobre p si $v<0$.



Podemos elegir cualquier $p \in C^1$ que valga 0 para $v \geq 0$.
Existen infinitas soluciones en un entorno de $(0,0)$:

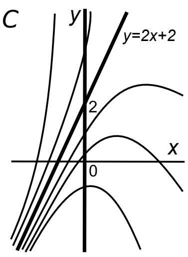
$u(x,y) = y^2$ si $y \geq -x^2$, pero está indeterminada si $y < -x^2$.

$\big[$En $(0,0)$ es $y=0$ tangente a las características. Lo confirma $\Delta = 1 \cdot 2x - 0 \cdot (-1)\big]$.

$\boxed{u(x, x^3 - x^2) = x^4 - 2x^5} \to p(x^3) = -x^6 \to p(v) = -v^2\ \forall v \to u = -2x^2y - x^4$ para todo (x,y).

Hay solución única a pesar de ser la curva de datos tangente a una característica en el punto $(0,0)$ $\big[$es $\Delta = 1 \cdot 2x - (3x^2 - 2x) \cdot (-1) = -3x^2\big]$. Algunas veces puede haber tangencia y existir solución única. La no tangencia es suficiente pero no necesaria.

Ej 3. $\boxed{\begin{array}{l} (y-2x)\,u_y + u_x = y \\ u(0,y) = y-2 \end{array}}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{y-2x}{1}$, $y = Ce^x + 2x + 2\ \to\ (y-2x-2)e^{-x} = C$



$\begin{cases} \xi = (y-2x-2)e^{-x} \\ \eta = x \text{ (parece mejor)} \end{cases} \to\ u_\eta = y = \xi e^\eta + 2\eta + 2\ \to\ u = p(\xi) + \xi e^\eta + \eta^2 + 2\eta$,

$$u = p\big([y-2x-2]e^{-x}\big) + y + x^2 - 2 .$$

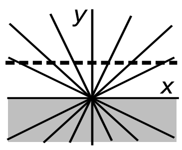
$\big[$Escogiendo $\eta = y$ no se podría despejar la x de $\xi = (\eta - 2x - 2)e^{-x}\big]$.

$p(y-2) + y - 2 = y - 2$, $p(y-2) = 0 \to p(v) = 0\ \forall v$, $u = y + x^2 - 2$.

Solución única porque $x=0$ nunca es tangente a las características:

$\Delta = 0 \cdot (y - 2 \cdot 0) - 1 \cdot 1 = -1 \neq 0\ \forall x$ [o está claro en el dibujo].

Ej 4. $\boxed{\begin{array}{l} yu_y + xu_x = 2u \\ u(x,1) = x^3 \end{array}}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\ \to\ y = Cx \to \begin{cases} \xi = y/x \\ \eta = y \end{cases} \to \eta u_\eta = 2u \to$



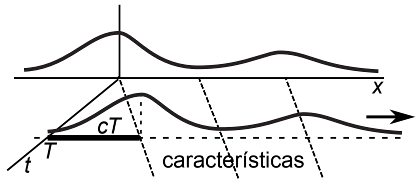
$u = p(\xi)\eta^2 = p(\frac{y}{x})y^2$; $u(x,1) = p(\frac{1}{x}) = x^3 \to p(v) = \frac{1}{v^3}$; $u = \frac{x^3}{y}$

[sólo si $y>0$; la solución de un problema de Cauchy, en principio, sólo es local].

Ej 5. $\boxed{\begin{array}{l} u_t + cu_x = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{array}}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{c} \to$ $\underset{\text{características}}{x - ct = K}$ $\to u = p(x-ct)$ solución general.

$u(x,0) = p(x) = f(x) \to u(x,t) = f(x-ct)$, solución única del problema de valores iniciales.

Para dibujar la gráfica de u en función de x para cada $t=T$ fijo basta trasladar la de $f(x)$ una distancia cT (hacia la derecha si $c>0$). Se puede interpretar la solución como una onda que viaja a lo largo del tiempo. [Situación similar se dará en la ecuación de ondas].



1.2. EDPs lineales de segundo orden; clasificación

Consideremos [E] $L[u] \equiv \boxed{A\,u_{yy} + B\,u_{xy} + C\,u_{xx} + D\,u_y + E\,u_x + H\,u = F}$,

con u y los coeficientes funciones de (x,y). Suponemos que los coeficientes son C^2 y que A, B y C no se anulan simultáneamente en una región Ω del plano.

Como ocurría en las EDPs de primer orden, quizás un cambio de variable adecuado haga desaparecer algunos términos de [E], de forma que nos quede una ecuación resoluble elementalmente. Hagamos el cambio genérico:

$\begin{cases} \xi = \xi(x,y) \\ \eta = \eta(x,y) \end{cases}$, con $\xi, \eta \in C^2$ y con jacobiano $J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \neq 0$ en Ω. Entonces:

$$u_y = u_\xi\, \xi_y + u_\eta\, \eta_y$$
$$u_x = u_\xi\, \xi_x + u_\eta\, \eta_x$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}\, \xi_y^2 + 2\, u_{\xi\eta}\, \xi_y\, \eta_y + u_{\eta\eta}\, \eta_y^2 + u_\xi\, \xi_{yy} + u_\eta\, \eta_{yy}$$
$$u_{xy} = u_{\xi\xi}\, \xi_y\, \xi_x + u_{\xi\eta}\, [\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x] + u_{\eta\eta}\, \eta_y\, \eta_x + u_\xi\, \xi_{xy} + u_\eta\, \eta_{xy}$$
$$u_{xx} = u_{\xi\xi}\, \xi_x^2 + 2\, u_{\xi\eta}\, \xi_x\, \eta_x + u_{\eta\eta}\, \eta_x^2 + u_\xi\, \xi_{xx} + u_\eta\, \eta_{xx}$$

Con lo que [E] queda en función de las nuevas variables:

$$\left[A\,\xi_y^2 + B\,\xi_y\,\xi_x + C\,\xi_x^2\right] u_{\xi\xi} + \left[2A\,\xi_y\,\eta_y + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + 2C\,\xi_x\,\eta_x\right] u_{\xi\eta}$$
$$+ \left[A\,\eta_y^2 + B\,\eta_y\eta_x + C\,\eta_x^2\right] u_{\eta\eta} + \cdots = A^* u_{\xi\xi} + B^* u_{\xi\eta} + C^* u_{\eta\eta} + \cdots = F(\xi,\eta)$$

donde los puntos representan los términos en u_ξ , u_η y u.

Intentemos hacer $A^* = C^* = 0$ eligiendo ξ y η adecuados. Para ello debe cumplirse la EDP de primer orden (no lineal):

$$A\,\xi_y^2 + B\,\xi_y\,\xi_x + C\,\xi_x^2 = 0 \qquad (C^* = 0 \text{ tiene la misma forma})$$

Si conseguimos hallar dos soluciones distintas (con Jacobiano no nulo) de esta EDP podemos hacer desaparecer los términos en $u_{\xi\xi}$ y $u_{\eta\eta}$.

Cuando $B^2 - 4AC > 0$ podemos separarla en dos EDPs diferentes de primer orden lineales (de las estudiadas en la sección anterior):

$$[1] \quad \xi_y = \tfrac{1}{2A}\left[-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}\right] \xi_x$$

$\big[$si es $A \neq 0$; si $A = 0$ y $C \neq 0$ es $\xi_x = 0$ o $\xi_x = -\frac{B}{C}\xi_y$; $A = C = 0$ es caso trivial$\big]$.

Si $B^2 - 4AC = 0$, [1] se convierte en una única EDP. Y si es < 0, la descomposición anterior en EDPs de primer orden con coeficientes reales es imposible.

Por otra parte, es fácil verificar que $(B^*)^2 - 4A^*C^* = [B^2 - 4AC]\, J^2$, J jacobiano del cambio, y, por tanto, el signo de $B^2 - 4AC$ no varía al hacer cambios de coordenadas. Todo lo anterior nos lleva a definir:

> Si en cada punto (x,y) de una región del plano se cumple que la expresión $B(x,y)^2 - 4A(x,y)C(x,y)$ es mayor que 0, igual a 0 o menor que 0, se dice, respectivamente, que la EDP [E] es **hiperbólica**, **parabólica** o **elíptica** en dicha región.

Sigamos con la simplificación de [E]. Precisemos cuál es el cambio adecuado a cada tipo y encontremos la forma más sencilla en que podemos escribir la ecuación (**forma canónica**) en cada caso.

Si [E] es **hiperbólica**, las EDPs de [1] tienen por ecuaciones características:

$$\boxed{\frac{dx}{dy}=\frac{1}{2A}\Big[B-\sqrt{B^2-4AC}\,\Big]\ ,\ \ \frac{dx}{dy}=\frac{1}{2A}\Big[B+\sqrt{B^2-4AC}\,\Big]} \quad \text{[e]}$$

Se llaman **curvas características de** [E] **a las curvas integrales** $\xi(x,y)=K$, $\eta(x,y)=K$ **de estas dos ecuaciones ordinarias**

(son las características de las ecuaciones de primer orden [1]).

Como $\xi(x,y)$ y $\eta(x,y)$ son soluciones de [1] [vimos en 1.1 que $u=p\big(\xi(x,y)\big)$ y $u=q\big(\eta(x,y)\big)$, con p , q arbitrarias, eran sus soluciones generales], el cambio

$\boxed{\begin{cases}\xi=\xi(x,y)\\ \eta=\eta(x,y)\end{cases}}$ lleva [E] a $B^*u_{\xi\eta}+\cdots=F$. Como $(B^*)^2>0$ podemos escribir la

forma canónica de las hiperbólicas: $\boxed{u_{\xi\eta}+\cdots=F^*}$.

Si [E] es **parabólica**, [1] es una sola EDP $\xi_y+\frac{B}{2A}\xi_x=0$, de ecuación característica

$\boxed{\frac{dx}{dy}=\frac{B}{2A}}$ → $\xi(x,y)=K$ **curvas características** de [E]

(las parabólicas sólo tienen una familia de características).

Escogiendo $\xi=\xi(x,y)$ hacemos $A^*=0$ (y como $(B^*)^2-4A^*C^*=0$ también es $B^*=0$). Como η podemos tomar cualquier función de x e y tal que el jacobiano no sea nulo. Se suele tomar $\eta=y$. Así haciendo

$\boxed{\begin{cases}\xi=\xi(x,y)\\ \eta=y\end{cases}}$ y dividiendo por C^* se obtiene la

forma canónica de las parabólicas: $\boxed{u_{\eta\eta}+\cdots=F^*}$.

Si es **elíptica**, los segundos miembros de [e] son funciones complejas conjugadas:

$\boxed{\frac{dx}{dy}=\frac{1}{2A}\Big[B\pm i\sqrt{4AC-B^2}\,\Big]}$ (no hay, pues, características reales).

Es fácil ver que las soluciones de este par de ecuaciones son también complejas conjugadas: $\xi(x,y)=\alpha(x,y)\pm i\beta(x,y)=K$. También es fácil probar que el cambio

$\boxed{\begin{cases}\xi=\alpha(x,y)\\ \eta=\beta(x,y)\end{cases}}$ lleva [E] a la **forma canónica de las elípticas**:

$\boxed{u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\cdots=F^*}$.

En general, [E] puede ser de diferente tipo en diferentes regiones del plano y tener una forma canónica distinta en cada una. Observemos también que las EDOs de primer orden que dan las características normalmente no serán resolubles.

Pero **en el caso de que** A **,** B **y** C **sean constantes**, B^2-4AC también lo es y así [E] **es del mismo tipo en todo el plano**. Además los cambios de variable [ahora válidos para todo (x,y)] se hallan aquí fácilmente:

$$\boxed{\begin{array}{ccc}\begin{cases}\xi=x-\frac{B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}\,y\\ \eta=x-\frac{B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}\,y\end{cases} & \begin{cases}\xi=x-\frac{B}{2A}\,y\\ \eta=y\end{cases} & \begin{cases}\xi=\frac{2Ax-By}{\sqrt{4AC-B^2}}\\ \eta=y\end{cases}\\ \text{si [E] hiperbólica} & \text{si [E] parabólica} & \text{si [E] elíptica}\end{array}} \quad \text{[c]}$$

[En este caso con coeficientes constantes, las hiperbólicas tienen dos familias de rectas características, las parabólicas una única familia de rectas características y las elípticas no tienen; la expresión dada para la elíptica se deduce de que

$\xi=\frac{2Ax-By}{2A}\pm i\frac{\sqrt{4AC-B^2}}{2A}y=K$ equivale a $\xi=\frac{2Ax-By}{\sqrt{4AC-B^2}}\pm iy=K$].

Ej 1. $\boxed{u_{yy} - y\,u_{xx} = 0}$ (ecuación de Tricomi) $\rightarrow B^2 - 4AC = 4y \rightarrow$ hiperbólica si $y>0$, elíptica si $y<0$

(sobre $y=0$ es parabólica, pero las EDPs se plantean sobre conjuntos abiertos).

$y>0$: $\frac{dx}{dy} = \pm y^{1/2}$; características $x \pm \frac{2}{3}y^{3/2} = K$. Hacemos pues:

$$\begin{cases} \xi = x+\frac{2}{3}y^{3/2} \\ \eta = x-\frac{2}{3}y^{3/2} \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} u_y = y^{1/2}[u_\xi - u_\eta] \\ u_x = u_\xi + u_\eta \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} u_{yy} = \frac{1}{2}y^{-1/2}[u_\xi - u_\eta] + y[u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}] \\ u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \end{array}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}y^{-1/2}[u_\xi - u_\eta] - 4y u_{\xi\eta} = 0 \rightarrow \boxed{u_{\xi\eta} - \frac{1}{6}\frac{u_\xi - u_\eta}{\xi-\eta} = 0}, \text{ pues } \xi-\eta = \frac{4}{3}y^{3/2} .$$

$y<0$: $\frac{dx}{dy} = \pm i\,[-y]^{1/2} \rightarrow \xi = x \pm i\,\frac{2}{3}[-y]^{3/2} = K$. Hacemos ahora:

$$\begin{cases} \alpha = x \\ \beta = \frac{2}{3}[-y]^{3/2} \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} u_y = -[-y]^{1/2}u_\beta \\ u_x = u_\alpha \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} u_{yy} = \frac{1}{2}[-y]^{-1/2}u_\beta + [-y]u_{\beta\beta} \\ u_{xx} = u_{\alpha\alpha} \end{array}$$

$$\rightarrow u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} + \frac{1}{2}[-y]^{-3/2}u_\beta = 0 \rightarrow \boxed{u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} + \frac{1}{3\beta}u_\beta = 0} .$$

Ej 2. $\boxed{4u_{yy} - 4u_{xy} + u_{xx} = 0}$ $\rightarrow B^2 - 4AC = 0 \rightarrow$ parabólica en todo $\mathbf{R}^2$.

Como A, B y C son constantes, basta copiar el cambio [c]: $\xi = x + \frac{y}{2}$, o mejor

$$\begin{cases} \xi = 2x+y \\ \eta = y \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} u_y = u_\xi + u_\eta \\ u_x = 2u_\xi \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \\ u_{xy} = 2u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} \\ u_{xx} = 4u_{\xi\xi} \end{array}$$

Llevándolo a la ecuación se llega a $\boxed{u_{\eta\eta} = 0}$.

Esta forma canónica que se resuelve fácilmente: $u_\eta = p(\xi) \rightarrow u = \eta\,p(\xi) + q(\xi)$.

Por tanto, la **solución general** de la ecuación es:

$\boxed{u(x,y) = y\,p(2x+y) + q(2x+y)}$, con p y q funciones C^2 arbitrarias.

Como en el ejemplo 2, en ocasiones será posible hallar elementalmente la solución general de [E] tras escribirla en forma canónica (pero en la mayoría seguirá siendo imposible; como en las dos regiones del ejemplo 1).

Identifiquemos las **formas canónicas resolubles**:

Si sólo hay derivadas respecto a una variable: $\boxed{u_{\eta\eta} + E^*u_\eta + H^*u = F^*}$

Esta ecuación lineal de segundo orden, ordinaria si la vemos como función de η, se integra considerando la otra variable como un parámetro. Un par de constantes para cada ξ dan lugar a dos funciones arbitrarias de ξ en la solución. La ecuación, como vemos, debe ser parabólica.

Si sólo aparece $u_{\xi\eta}$ y una de las derivadas primeras: $\boxed{u_{\xi\eta} + D^*u_\xi = F^*}$

Se resuelve haciendo $u_\xi = v$: la lineal de primer orden $v_\eta + D^*v = F^*$ es integrable viendo ξ como parámetro. La v contiene, pues, una función arbitraria de ξ. Al integrarla para hallar la u aparece otra función arbitraria (de η). Las cosas serían análogas si en vez de la u_ξ apareciese la u_η. La ecuación es hiperbólica.

[En las EDOs de segundo orden salen dos constantes arbitrarias; aquí hay, en los dos casos, dos funciones arbitrarias (evaluadas en las características como ocurría en las EDPs de primer orden). Se ve que ninguna ecuación elíptica, ni la del calor $u_t - u_{xx}$ son resolubles por este camino].

[En los problemas veremos que otras pocas ecuaciones más con coeficientes constantes pueden llevarse a estas formas haciendo cambios de variable del tipo $u = e^{py}e^{qx}w$ que hacen desaparecer alguna derivada de menor orden].

Ej 3. $\boxed{u_{yy}+5u_{xy}+4u_{xx}+u_y+u_x=3}$ $\to B^2-4AC=9$, hiperbólica.

$$\frac{B\mp\sqrt{B^2-4AC}}{2A}=\begin{matrix}1\\4\end{matrix} \to \begin{cases}\xi=x-y\\ \eta=x-4y\end{cases} \to \begin{matrix}u_y=-u_\xi-4u_\eta\\ u_x=u_\xi+u_\eta\end{matrix} \to \begin{matrix}u_{yy}=u_{\xi\xi}+8u_{\xi\eta}+16u_{\eta\eta}\\ u_{xy}=-u_{\xi\xi}-5u_{\xi\eta}-4u_{\eta\eta}\\ u_{xx}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\end{matrix}$$

Entonces: $u_{\xi\eta}+\frac{1}{3}u_\eta=-\frac{1}{3}$, del segundo de los tipos citados. Para resolverla:

$$u_\eta=v \to v_\xi=-\tfrac{1}{3}v-\tfrac{1}{3} \to v=q^*(\eta)\mathrm{e}^{-\xi/3}-1 \to u(\xi,\eta)=q(\eta)\mathrm{e}^{-\xi/3}+p(\xi)-\eta$$

La solución general es, pues:

$$\boxed{u(x,y)=q(x-4y)\,\mathrm{e}^{(y-x)/3}+p(x-y)+4y-x}\ ,\quad q \text{ y } p \text{ arbitrarias.}$$

Ej 4. $\boxed{y^2u_{yy}+2xyu_{xy}+x^2u_{xx}+y^2u_y+xyu_x=0}$ $\to$ $\begin{matrix}B^2-4AC\equiv 0\\ \text{parabólica en } \mathbf{R}^2\end{matrix}$

$\frac{dx}{dy}=\frac{2xy}{2y^2}=\frac{x}{y}\to\begin{cases}\xi=y/x\\ \eta=y\end{cases}$. Operando se llega a su forma canónica: $u_{\eta\eta}+u_\eta=0$.

Es una EDO lineal de segundo orden en η con autovalores dados por $\lambda(\lambda+1)=0$ $\to$

$$u(\xi,\eta)=p(\xi)+q(\xi)\,\mathrm{e}^{-\eta}\ .\quad \text{Es decir,}\quad \boxed{u(x,y)=p\big(\tfrac{y}{x}\big)+q\big(\tfrac{y}{x}\big)\,\mathrm{e}^{-y}}\ .$$

Acabamos la sección aplicando las técnicas anteriores para hallar la solución general de la única de las ecuaciones clásicas que se puede abordar por este camino: la **ecuación de ondas** en una dimensión espacial (cuerda vibrante):

$$\boxed{u_{tt}-c^2u_{xx}=0} \to B^2-4AC=4c^2 \to \text{hiperbólica en todo el plano.}$$

Las expresiones de [c] se convierten aquí en:

$$\begin{cases}\xi=x+ct\\ \eta=x-ct\end{cases} \to \begin{cases}u_{xx}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\\ u_{tt}=c^2[u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}]\end{cases}$$

y, por tanto, en las nuevas variables:

$$-4c^2u_{\xi\eta}=0 \to \boxed{u_{\xi\eta}=0}\ \begin{matrix}\text{forma}\\ \text{canónica}\end{matrix} \to u_\xi=p^*(\xi) \to u=p(\xi)+q(\eta)$$

Luego la **solución general de la ecuación de ondas** es:

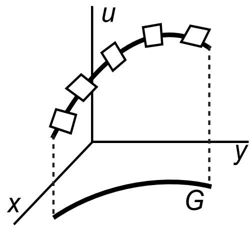
$$\boxed{u(x,t)=p(x+ct)+q(x-ct)}\ ,\quad p \text{ y } q \text{ funciones arbitrarias de } C^2.$$

[Observemos que la solución resulta ser la suma de dos ondas que viajan a velocidad c, una hacia las x crecientes y otra hacia las decrecientes. En la siguiente sección hallaremos una fórmula para la única solución que satisface una pareja de 'datos iniciales'].

1.3. Los problemas clásicos; unicidad

Sea [E] $L[u]=F$ una EDP lineal de segundo orden en dos variables. ¿Qué datos adicionales nos proporcionan problemas bien planteados para [E]? Para una EDO de segundo orden era necesario fijar el valor de la solución y de su derivada en el instante inicial para tener solución única. En una EDP lineal de primer orden fijábamos los valores de la solución en toda una curva G (no tangente a las características). Acabamos de ver que en los pocos casos en que [E] era resoluble aparecían dos funciones arbitrarias en la solución.

Todo ello lleva a plantear el **problema de Cauchy** para [E]:



> Hallar la solución que tome unos valores dados de u y u_y a lo largo de una curva dada G del plano xy.

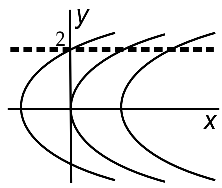
(geométricamente, hallar la superficie solución que contenga una curva dada y tenga a lo largo de ella una familia de planos tangentes también dados). Alternativamente se podrían fijar sobre G los valores de u_x o de la derivada normal $u_{\mathbf{n}}$.

En particular, al tomar como G el eje x se tiene el **problema de valores iniciales** que consiste en hallar la solución de [E] que cumple $u(x,0)=f(x)$, $u_y(x,0)=g(x)$.

Como ocurría en las de primer orden se puede probar que:

> Si los datos son regulares y G no es tangente a las características en ningún punto, el problema de Cauchy tiene solución única en las proximidades de G.

Ej 1. Sea $\boxed{[\mathrm{P}] \begin{cases} yu_{yy}+2y^2u_{xy}+y^3u_{xx}-u_y=0 \\ u(x,2)=x,\ u_y(x,2)=0 \end{cases}}$.



$B^2-4AC\equiv 0$, parabólica en $\mathbf{R}^2$. $\frac{dx}{dy}=y \to x-\frac{y^2}{2}=K$ características.

Como $y=2$ nunca es tangente a ellas, el problema de Cauchy [P] tiene solución única. Es resoluble y podemos comprobarlo:

$$\begin{cases} \xi=x-\frac{y^2}{2} \\ \eta=y \end{cases} \to \eta u_{\eta\eta}-u_\eta=0 \underset{\text{Euler ó } u_\eta=v}{\longrightarrow} u=p(\xi)+q(\xi)\,\eta^2=p(x-\tfrac{y^2}{2})+q(x-\tfrac{y^2}{2})\,y^2$$

Imponiendo los datos de Cauchy ($u_y=-yp'-y^3q'+2yq$):

$$\left.\begin{array}{l} u(x,2)=p(x-2)+4q(x-2)=x \\ u_y(x,2)=-2p'(x-2)-8q'(x-2)+4q(x-2)=0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} p'(x-2)+4q'(x-2)=1 \\ p'(x-2)+4q'(x-2)=2q(x-2) \end{array}\right\}$$

[p' y q' representan la misma derivada ordinaria en ambas ecuaciones]

$$\to q(x-2)=\tfrac{1}{2} \to q(v)=\tfrac{1}{2}\ \forall v \to p(x-2)=x-2 \to p(v)=v\ \forall v \to\ u=x-\frac{y^2}{2}+\frac{y^2}{2}=\boxed{x}\ ,$$

solución determinada de forma única por los cálculos anteriores.

¿Es este problema el adecuado a todas las EDPs de segundo orden? No lo es. En los problemas reales aparecen condiciones mucho más variadas que las de Cauchy: en unos casos hay que imponer condiciones iniciales y de contorno a la vez, en otros sólo de contorno... Además un dato de Cauchy puede originar problemas mal planteados (sin la necesaria dependencia continua) para EDPs no hiperbólicas, como éste para Laplace (cuya solución será única por no tener características reales):

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 \\ u(x,0)=0,\ u_y(x,0)=\frac{\operatorname{sen} nx}{n} \end{cases} .\ \text{ Su solución (única) es } u(x,y)=\frac{\operatorname{sh} ny\ \operatorname{sen} nx}{n^2}\ ,$$

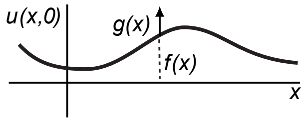
pero aunque el dato $\frac{\operatorname{sen} nx}{n}\to 0$ uniformemente, u es muy grande (si $y\neq 0$) para n grande, y se parece poco a la solución $u\equiv 0$ asociada a $u(x,0)=u_y(x,0)=0$.

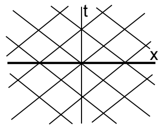
Veamos los principales problemas asociados a las **ecuaciones clásicas** en dos variables [sólo (P_1) será de Cauchy]. Para cada uno habría que probar que 'está bien planteado'. Para más variables las cosas son análogas y poco más complicadas.

Ondas. Tiene solución única dependiente continuamente de los datos el

problema puro de valores iniciales:

$$(\mathrm{P}_1)\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=F(x,t)\,,\ x,t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=f(x)\\ u_t(x,0)=g(x)\end{cases}$$





para la **cuerda infinita** (tiene sentido real cuando t es pequeño y estamos lejos de los extremos). Como damos los datos sobre $t=0$ no característica (eran $x\pm ct=K$) hay solución única.

En el caso de la **ecuación homogénea** ($F\equiv 0$) hallemos su solución y deduzcamos de ella la dependencia continua. Vimos en la sección anterior su solución general:

$$u_{tt}-c^2u_{xx}=0\ \to\ u(x,t)=p(x+ct)+q(x-ct)\,,\ p\,,\ q\ \text{ arbitrarias.}$$

Imponiendo los datos:

$$\begin{cases} p(x)+q(x)=f(x)\\ cp'(x)-cq'(x)=g(x)\end{cases}\ \to\ \begin{cases} p'(x)+q'(x)=f'(x)\\ p'(x)-q'(x)=\frac{1}{c}g(x)\end{cases}\ \to\ 2p'(x)=f'(x)+\tfrac{1}{c}g(x)$$

$$\to\ p(x)=\tfrac{1}{2}f(x)+\tfrac{1}{2c}\int_0^x g(s)\,ds+k\ \to\ q(x)=\tfrac{1}{2}f(x)-\tfrac{1}{2c}\int_0^x g(s)\,ds-k\ \to$$

$$\boxed{u(x,t)=\tfrac{1}{2}\big[f(x+ct)+f(x-ct)\big]\ +\ \tfrac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)\,ds}$$ **fórmula de D'Alembert**

que da la solución única de (P_1) si $F\equiv 0$. Para que u sea C^2, debe $f\in C^2$ y $g\in C^1$.

Comprobemos que datos iniciales próximos ocasionan soluciones $u(x,t)$ y $u^*(x,t)$ cercanas en intervalos de tiempo finitos (es decir, la dependencia continua):

$$\text{si } |f(x)-f^*(x)|<\delta \text{ y } |g(x)-g^*(x)|<\delta\ \forall x\,;\ \text{ entonces para } t\in[0,T] \text{ se tiene:}$$

$$|u-u^*|\le\tfrac{1}{2}|f(x+ct)-f^*(x+ct)|+\tfrac{1}{2}|f(x-ct)-f^*(x-ct)|+\tfrac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}|g(s)-g^*(s)|\,ds$$

$$<\delta+\tfrac{\delta}{2c}\int_{x-cT}^{x+cT}ds=\delta(1+T)<\epsilon\ \ \forall x \text{ y } \forall t\in[0,T]\ ,\ \text{ si }\ \delta<\tfrac{\epsilon}{1+T}\ .$$

Consideremos ahora la **cuerda acotada** cuyos extremos se mueven verticalmente según $h_0(t)$ y $h_L(t)$ dadas (que estén fijos es un caso particular). Hay entonces dos **condiciones de contorno** adicionales:

$$\boxed{(\mathrm{P}_2)\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=F(x,t)\,,\ x\in[0,L],\ t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=f(x)\,,\ u_t(x,0)=g(x)\\ u(0,t)=h_0(t)\,,\ u(L,t)=h_L(t)\end{cases}}$$

Demostremos su unicidad (veremos que la solución existe, como en otros casos, hallándola explícitamente [en 3.1 por separación de variables ó en 4.1 a través de extensiones]; la dependencia continua, que se cumple, no la probamos).

Sean u_1 y u_2 soluciones cualesquiera de (P_2) y sea $u=u_1-u_2$. Entonces u cumple:

$$(\mathrm{P}_0)\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=0\,,\ x\in[0,L]\,,\ t\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=u_t(x,0)=u(0,t)=u(L,t)=0\end{cases}$$

Queremos ver que $u\equiv 0$. Integremos la identidad:

$$u_t[u_{tt}-c^2u_{xx}]=\tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial t}[u_t^2+c^2u_x^2]-c^2\tfrac{\partial}{\partial x}[u_tu_x]$$

para x entre 0 y L y t entre 0 y T cualquiera, suponiendo u solución de (P_o):

$$\tfrac{1}{2}\int_0^L\big[u_t^2+c^2u_x^2\big]_{(x,0)}^{(x,T)}dx-c^2\int_0^T\big[u_tu_x\big]_{(0,t)}^{(L,t)}dt=\tfrac{1}{2}\int_0^L\big[u_t(x,T)^2+c^2u_x(x,T)^2\big]dx=0$$

$$\text{pues }\ u_{tt}-c^2u_{xx}=u_t(x,0)=u_x(x,0)=u_t(0,t)=u_t(L,t)=0\,.$$

El último corchete es ≥ 0 y es función continua de x. Para que la integral se anule debe ser $u_t(x,T)=u_x(x,T)=0$ si $0\le x\le L$ y para cualquier T. Por tanto $u(x,t)$ es constante y como $u(x,0)=0$ debe ser $u=u_1-u_2\equiv 0$. Hay unicidad.

Calor. Para la **varilla infinita** se prueba que está bien planteado:

$$\boxed{(\mathrm{P}_3)\ \begin{cases} u_t - ku_{xx} = F(x,t)\,,\ x\in\mathbf{R},\ t>0 \\ u(x,0)=f(x)\,,\ u \text{ acotada} \end{cases}}$$

Basta un solo dato, la distribución inicial de temperaturas, para fijar las posteriores.

[No podemos dar arbitrariamente la $u_t(x,0)$ pues debe ser $u_t(x,0)=kf''(x)+F(x,0)$ si u es solución ($t=0$ es característica y (P$_3$) no es buen problema de valores iniciales)].

Para la **varilla acotada** hay condiciones de contorno, que pueden ser de varios tipos, con diferentes significados físicos cada uno. Si los extremos toman a lo largo del tiempo las **temperaturas dadas** $h_0(t)$ y $h_L(t)$ se tiene:

$$\boxed{(\mathrm{P}_4)\ \begin{cases} u_t - ku_{xx} = F(x,t)\,,\ x\in(0,L),\ t>0 \\ u(x,0)=f(x) \\ u(0,t)=h_0(t)\,,\ u(L,t)=h_L(t) \end{cases}}$$

Si lo que fijamos es el **flujo de calor** en los extremos obtenemos:

$$\boxed{(\mathrm{P}_5)\ \begin{cases} u_t - ku_{xx} = F(x,t)\,,\ x\in(0,L),\ t>0 \\ u(x,0)=f(x) \\ u_x(0,t)=h_0(t)\,,\ u_x(L,t)=h_L(t) \end{cases}}$$

[En particular, si $h_0(t)=h_L(t)=0$, los extremos están **aislados**].

Un tercer tipo de condiciones de contorno combina u y u_x :

$$\boxed{u(0,t)-au_x(0,t)=h_0(t) \text{ ó } u(L,t)+bu_x(L,t)=h_L(t)\,, \text{ con } a,b>0} \ .$$

Expresan la **radiación libre** de calor hacia un medio a temperatura dada (si el extremo $x=L$ está más (menos) caliente que h_L entonces irradia (chupa) calor pues $u_x=(h_L-u)/b<0$ (>0) y el flujo de calor es siempre en sentido opuesto al gradiente de las temperaturas; lo mismo sucede con el otro extremo).

Probemos que (P$_4$) ó (P$_5$) (o cualquiera de los otros 7 problemas que aparecen combinando los 3 tipos de condiciones descritos) poseen solución única. Sean u_1 y u_2 soluciones. Entonces $u=u_1-u_2$ satisface el problema con $F=f=h_0=h_L=0$.

Multiplicando la ecuación por u e integrando respecto a x entre 0 y L se tiene:

$$\int_0^L uu_t dx - k\int_0^L uu_{xx}dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L u^2dx - k\big[uu_x\big]_{(0,t)}^{(L,t)} + k\int_0^L u_x^2 dx = 0$$

$$\Rightarrow\ \frac{d}{dt}\int_0^L \big[u(x,t)\big]^2dx \le 0$$

[si $u=0$ ó $u_x=0$ en los extremos la última implicación es clara, ya que $k>0$; es también fácil verlo si $u-au_x=0,\ a>0$ ó si $u+bu_x=0,\ b>0$; no se puede dar ese paso ni probar la unicidad para $a<0$ ó $b<0$ (físicamente inadmisible)].

La última integral es una función $U(t)$ no creciente ($U'\le 0$), que cumple $U(0)=0$ (pues $u(x,0)=0$) y es $U(t)\ge 0$ (integrando positivo). De las tres cosas se sigue que $U(t)\equiv 0 \Rightarrow u\equiv 0$. Unicidad.

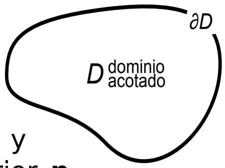
Una forma alternativa de probar la unicidad de algunos problemas (que además permite atacar la dependencia continua) es utilizar un **principio del máximo** que se ajuste a ese problema. Por ejemplo, es cierto este principio que no demostramos:

Si u es continua en $[0,T]\times[0,L]$ y satisface $u_t-ku_{xx}=0$ en $(0,T)\times(0,L)$, los valores máximo y mínimo de u se alcanzan o bien en $t=0$ o bien en $x=0$ ó bien en $x=L$.

[Si ni la temperatura inicial en la varilla ni la de los extremos supera un valor M , no se puede crear en su interior una temperatura mayor que M (si no hay fuentes externas); la prueba a partir de esto de la unicidad y la dependencia continua de (P$_4$) sería parecida a la que veremos para Laplace y no la hacemos; si quisiéramos demostrar la unicidad para los otros problemas de la ecuación del calor, necesitaríamos otros principios del máximo diferentes].

Laplace. Los problemas son de contorno. Los dos más importantes son:

Problema de Dirichlet: $(\mathrm{P}_D)\ \begin{cases} \Delta u = F \text{ en } D \\ u = f \text{ en } \partial D \end{cases}$ **Problema de Neumann:** $(\mathrm{P}_N)\ \begin{cases} \Delta u = F \text{ en } D \\ u_{\mathbf{n}} = f \text{ en } \partial D \end{cases}$



Donde D es un abierto conexo acotado de $\mathbf{R}^2$, ∂D es su frontera y $u_{\mathbf{n}}$ es la derivada en la dirección del vector normal unitario exterior $\mathbf{n}$.

Si vemos la ecuación describiendo una distribución estacionaria de temperaturas en una placa, en (P_D) fijamos las temperaturas en el borde y en (P_N) el flujo de calor en dirección normal al borde.

Si F, f y ∂D son regulares, el (P_D) es un problema bien planteado. Lo resolveremos en recintos sencillos en el capítulo 3. Probemos ahora su unicidad por dos caminos.

Mediante la **fórmula de Green** (generaliza la integración por partes a $\mathbf{R}^2$):

$$\boxed{\text{Sea } u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D}) \text{. Entonces } \iint_D u\,\Delta u\,dxdy = \oint_{\partial D} u\,u_{\mathbf{n}}\,ds - \iint_D \|\nabla u\|^2\,dxdy}$$

[Identidad $u\Delta u = \mathrm{div}[u\nabla u] - \|\nabla u\|^2$ y teorema de la divergencia $\iint_D \mathrm{div}\,\mathbf{f}\,dxdy = \oint_{\partial D} \mathbf{f}\,\mathbf{n}\,ds$].

Si u_1 y u_2 son soluciones de (P_D), $u = u_1 - u_2$ verifica el problema con $F = f = 0$. La fórmula de Green dice entonces que:

$$\iint_D \|\nabla u\|^2\,dxdy = 0 \Rightarrow \nabla u = \mathbf{0} \Rightarrow u = cte \Rightarrow u \equiv 0 \ \text{(pues } u = 0 \text{ en } \partial D\text{)}.$$

Probamos de otra forma la unicidad de (P_D), y también la dependencia continua, con el siguiente **principio del máximo** para Laplace (intuitivamente claro: la temperatura de una placa no supera la máxima de su borde) que no demostramos:

Si u satisface $\Delta u = 0$ en un dominio acotado D y es continua en $\overline{D}$ entonces u alcanza su máximo y su mínimo en la ∂D.

Como $u = u_1 - u_2$, con u_1, u_2 soluciones, verifica $\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } D \\ u = 0 \text{ en } \partial D \end{cases}$, se tiene:

$$0 = \min_{\partial D} u \le \min_D u \le \max_D u \le \max_{\partial D} u = 0 \Rightarrow u \equiv 0$$

Si u^* es solución de (P_D) con $u = f^*$ en ∂D y sea $|f - f^*| < \epsilon$ en ∂D. Entonces:

$$v = u - u^* \to \begin{cases} \Delta v = 0 \text{ en } D \\ v = f - f^* \text{ en } \partial D \end{cases} \Rightarrow -\epsilon < \min_{\partial D} v \le v \le \max_{\partial D} v < \epsilon \Rightarrow |u - u^*| < \epsilon \text{ en } D.$$

Si la diferencia entre datos es pequeña, lo es la diferencia entre soluciones.

Para el (P_N) la situación es más complicada. En primer lugar, **para que** (P_N) **pueda tener solución es necesario que** F **y** f **satisfagan la relación**:

$$\boxed{\iint_D F\,dxdy = \oint_{\partial D} f\,ds}$$

[basta aplicar el teorema de la divergencia a ∇u para verlo].

Además, si (P_N) tiene solución, esta contiene una constante arbitraria [lo que era esperable, ya que ecuación y condición de contorno sólo contienen derivadas]. También se ve que si queremos repetir la prueba de la unicidad con la fórmula de Green, podemos dar todos los pasos excepto la última implicación. Se dice que el **problema de Neumann** (P_N) **tiene unicidad salvo constante**.

[Además se imponen a Laplace condiciones de contorno del tipo $u + a u_{\mathbf{n}} = f$, $a > 0$, y también tienen interés los problemas en que en parte de ∂D hay condiciones tipo Dirichlet, en otra tipo Neumann... (todos son problemas bien planteados). También se tratan problemas en D no acotados. Para tener unicidad, además de los datos en ∂D, hay que exigir un 'adecuado comportamiento' en el infinito].