

2. Problemas de contorno para EDOs

Un problema de valores iniciales para una ecuación ordinaria con coeficientes continuos tenía solución única. En concreto, la solución de una ecuación lineal de segundo orden queda determinada fijando el valor de la solución y de su derivada en un punto dado. Las cosas cambian si imponemos las condiciones en los dos extremos de un intervalo $[a, b]$. Estos **problemas de contorno** presentan propiedades muy diferentes. Por ejemplo, un problema tan sencillo y regular como

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = 0 \\ y(0) = 0, y(\pi) = 0 \end{cases}$$

tiene infinitas soluciones: $y = C \sin x$, con C constante arbitraria.

Los problemas de contorno que nos aparecerán al utilizar el método de **separación de variables** del capítulo 3 dependerán de un parámetro λ . Para analizar sus propiedades convendrá escribir la ecuación de la siguiente forma:

$$(P) \begin{cases} (py')' - qy + \lambda ry = 0 \\ \alpha y(a) - \alpha' y'(a) = 0 \\ \beta y(b) + \beta' y'(b) = 0 \end{cases}$$

Ante un problema como (P) nuestro objetivo será **hallar los valores de λ para los que hay soluciones no triviales (autovalores de (P))** y esas **soluciones no triviales** correspondientes a cada λ (**autofunciones de (P)** asociadas a λ). Observemos que $y=0$ es siempre solución trivial de (P) y que, por ser lineales y homogéneas la ecuación y las condiciones de contorno, si $y(x)$ es solución de (P) también lo es $Cy(x)$ para cualquier C .

Comenzaremos en 2.1 estudiando varios ejemplos para la ecuación $y'' + \lambda y = 0$ (la más sencilla y la que más veces aparece separando variables). En ellos existirá una sucesión infinita de autovalores y las autofunciones asociadas a λ distintos serán **ortogonales** entre sí. Después precisaremos para qué tipo de problemas de contorno (P) se mantienen esas propiedades. Serán los que se llaman **problemas de Sturm-Liouville separados**. Hablaremos también brevemente de los problemas **periódicos** y de los **singulares**.

En la sección 2.2 veremos que cualquier función f continua y derivable a trozos se puede escribir como una **serie de autofunciones** de un problema de Sturm-Liouville, lo que será muy útil en la resolución de EDPs. Este resultado generaliza los desarrollos de Fourier en **series de senos y cosenos**, cuyas propiedades básicas también veremos. Aunque la convergencia natural de estas series sea la llamada 'convergencia en media', nosotros nos limitaremos a tratar la convergencia puntual y uniforme.

Por último, en 2.3, estudiaremos problemas en que la ecuación (o alguna condición de contorno) sea **no homogénea**. Para ellos, ni $y=0$ es solución, ni lo son los múltiplos de una solución dada. La existencia de soluciones dependerá de si existen o no soluciones no triviales del homogéneo. Tendrán solución única en el último caso, e infinitas o ninguno si el homogéneo tiene infinitas. Cuando haya solución única daremos una fórmula para las soluciones del no homogéneo en términos de la llamada **función de Green**.

La notación en todo este capítulo será $y(x)$, pero en separación de variables las funciones de nuestros problemas de contorno serán $X(x), Y(y), R(r), \Theta(\theta), \dots$

2.1. Problemas de Sturm-Liouville homogéneos

Antes de dar la teoría general, hallemos los **autovalores** y **autofunciones** de dos problemas de contorno homogéneos para la sencilla EDO lineal $y'' + \lambda y = 0$.

Como su polinomio característico es $\mu^2 + \lambda = 0 \rightarrow \mu = \pm\sqrt{-\lambda}$, la solución general de la ecuación será diferente según λ sea menor, igual ó mayor que 0.

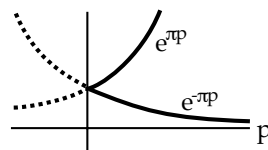
Ej 1. $(P_1) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0, y(\pi) = 0 \end{cases}$ Imponemos las condiciones de contorno en cada caso:

Si $\lambda < 0$ la solución general es $y = c_1 e^{px} + c_2 e^{-px}$, con $p = \sqrt{-\lambda} > 0$.

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 = 0 \\ y(\pi) = c_1 e^{\pi p} + c_2 e^{-\pi p} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_2 = -c_1 \\ c_1 [e^{\pi p} - e^{-\pi p}] = 0 \end{cases}$$

Por tanto $c_1 = c_2 = 0$ (pues $e^{\pi p} \neq e^{-\pi p}$ si $p > 0$).

Ningún $\lambda < 0$ es autovalor.



Si $\lambda = 0$ es $y = c_1 + c_2 x \rightarrow \begin{cases} y(0) = c_1 = 0 \\ y(\pi) = c_1 + c_2 \pi = 0 \end{cases} \rightarrow y \equiv 0$. $\lambda = 0$ tampoco es autovalor.

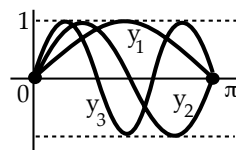
Y para $\lambda > 0$ es $y = c_1 \cos wx + c_2 \sin wx$, con $w = \sqrt{\lambda} > 0 \rightarrow \begin{cases} y(0) = c_1 = 0 \\ y(\pi) = c_2 \sin w\pi = 0 \end{cases}$

Para tener solución no trivial debe ser $c_2 \neq 0$.

Para ello, $w\pi = \pi\sqrt{\lambda} = n\pi \rightarrow \lambda_n = n^2, n = 1, 2, \dots$

Para cada uno de estos λ_n hay soluciones no triviales

$$y_n = c_2 \sin nx \equiv \{\sin nx\}.$$



Observemos que se cumple si $m \neq n$: $\int_0^\pi \sin nx \sin mx \, dx = 0$,

$$\text{pues } \frac{1}{2} \int_0^\pi [\cos(n-m)x - \cos(n+m)x] \, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n-m)x}{n-m} - \frac{\sin(n+m)x}{n+m} \right]_0^\pi = 0.$$

Resumiendo: (P_1) **tiene una sucesión infinita de autovalores** $\lambda_n = n^2, n = 1, 2, \dots$. **Las autofunciones** $y_n = \{\sin nx\}$ **asociadas a cada** λ_n **forman un espacio vectorial de dimensión 1. La** n -**sima autofunción posee** $n-1$ **ceros en** $(0, \pi)$. **Las autofunciones distintas son ortogonales en** $[0, \pi]$ [respecto del producto escalar $(u, v) = \int_0^\pi u v \, dx$].

Ej 2. $(P_2) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = 0, y'(\pi) = 0 \end{cases}$ Imponemos estas nuevas condiciones:

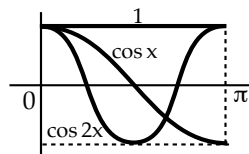
$\lambda < 0 \rightarrow \begin{cases} y'(0) = p[c_1 - c_2] = 0 \\ y'(\pi) = p[c_1 e^{\pi p} - c_2 e^{-\pi p}] = 0 \end{cases} \rightarrow c_2 = c_1 \rightarrow c_1 [e^{\pi p} - e^{-\pi p}] = 0 \rightarrow y \equiv 0$.

$\lambda = 0 \rightarrow \begin{cases} y'(0) = c_2 = 0 \\ y'(\pi) = c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda = 0$ autovalor con autofunción $y_0 = c_1$.

$\lambda > 0 \rightarrow \begin{cases} y'(0) = wc_2 = 0 \\ y'(\pi) = -wc_1 \sin w\pi = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = n^2, y_n = c_1 \cos nx$.

Los $\lambda_n = n^2$ y las $y_n = \{\cos nx\}, n = 0, 1, 2, \dots$

tienen las mismas propiedades resaltadas para el problema anterior. Por ejemplo, la autofunción que ocupa el lugar n se anula $n-1$ veces y sigue habiendo ortogonalidad:



$$\int_0^\pi \cos nx \cos mx \, dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi [\cos(n-m)x + \cos(n+m)x] \, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n-m)x}{n-m} + \frac{\sin(n+m)x}{n+m} \right]_0^\pi = 0.$$

Pasemos a tratar ya el problema general. Sea la ecuación lineal de segundo orden dependiente de un parámetro real λ :

$$y'' + a(x)y' + b(x)y + \lambda c(x)y = 0, \text{ con } a, b, c \in C[a, b], \text{ } c(x) > 0 \text{ en } [a, b].$$

La reescribimos de otra forma, que se suele denominar '**autoadjunta**' o '**Sturm-Liouville**'. Multiplicando por $e^{\int a}$ se tiene

$$[e^{\int a} y']' + b e^{\int a} y + \lambda c e^{\int a} y \equiv [p y']' - q y + \lambda r y = 0, \text{ con } p \in C^1, q, r \in C, p, r > 0.$$

Las condiciones que más nos van a interesar son las condiciones **separadas** (cada una afecta a los valores de y o de y' sólo en uno de los extremos del intervalo):

Se llama **problema de Sturm-Liouville separado regular** a uno del tipo:

$$(P_s) \begin{cases} [p y']' - q y + \lambda r y = 0 \\ \alpha y(a) - \alpha' y'(a) = 0, \beta y(b) + \beta' y'(b) = 0 \end{cases} \text{ (condiciones separadas)}$$

donde $p \in C^1[a, b], q, r \in C[a, b], p, r > 0$ en $[a, b], |\alpha| + |\alpha'|, |\beta| + |\beta'| \neq 0$.

[Las últimas condiciones lo que dicen es que α y $|\alpha'|, |\beta|$ y $|\beta'|$ no se anulan a la vez].

Los ejemplos 1 y 2 eran unos (P_s) . Este teorema generaliza sus propiedades:

Teor 1.

Los autovalores de (P_s) son una sucesión infinita $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$ que tiende a ∞ . Las autofunciones $\{y_n\}$ forman un espacio vectorial de dimensión 1 y cada y_n posee exactamente $n-1$ ceros en (a, b) . Las autofunciones asociadas a autovalores distintos son ortogonales en $[a, b]$ respecto al peso r , es decir:

$$\langle y_n, y_m \rangle \equiv \int_a^b r y_n y_m dx = 0, \text{ si } y_n, y_m \text{ están asociadas a } \lambda_n \neq \lambda_m.$$

Si $\alpha \alpha' \geq 0, \beta \beta' \geq 0$ y $q(x) \geq 0$ en $[a, b]$ entonces todos los $\lambda_n \geq 0$. En particular, para $y(a) = y(b) = 0$ [o sea, si $\alpha' = \beta' = 0$] todos los $\lambda_n > 0$.

No probamos la primera afirmación y la de los ceros que son difíciles. Sí el resto.

Si y cumple (P_s) : $y'(a) = \frac{\alpha}{\alpha'} y(a), \alpha' \neq 0; y'(b) = -\frac{\beta}{\beta'} y(b), \beta' \neq 0$

[y es $y(a) = 0$, si $\alpha' = 0$; $y(b) = 0$, si $\beta' = 0$].

Si y, y^* están asociadas al mismo λ , se deduce que dependen linealmente, pues su wronskiano se anula en a (o también en b):

$$|W|(y, y^*)(a) = y y^{*'} - y' y^* \Big|_{x=a} = 0, \text{ si } \alpha' = 0 \text{ o si } \alpha' \neq 0.$$

Sean ahora y_n, y_m asociadas, respectivamente, a λ_n y λ_m :

$$\left. \begin{aligned} \lambda_n r y_n &= -[p y_n']' + q y_n \\ \lambda_m r y_m &= -[p y_m']' + q y_m \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Multiplicando por } y_m \text{ e } y_n, \\ \text{restando e integrando:} \end{array}$$

$$[\lambda_n - \lambda_m] \int_a^b r y_n y_m dx = \int_a^b [y_n (p y_m')' - y_m (p y_n')'] dx \stackrel{\text{partes}}{=} [p (y_n y_m' - y_m y_n')] \Big|_a^b = 0$$

pues $|W|(y_n, y_m) = 0$ en a y en b . Por tanto, si $\lambda_n \neq \lambda_m$ se tiene que $\langle y_n, y_m \rangle = 0$.

Si y es la autofunción asociada a λ y $\alpha \alpha' \geq 0, \beta \beta' \geq 0, q \geq 0$ entonces

$$\lambda \int_a^b r y^2 dx = \int_a^b [-y (p y')' + q y^2] dx = \int_a^b [p (y')^2 + q y^2] dx - [p y y'] \Big|_a^b \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq 0,$$

pues $\int_a^b r y^2 dx > 0$ ($r > 0$), $\int_a^b [p (y')^2 + q y^2] dx \geq 0$ ($p > 0, q \geq 0$),

$$-[p y y'] \Big|_a^b = \begin{cases} \frac{\beta}{\beta'} p(b) [y(b)]^2 \geq 0 & \text{si } \beta' \neq 0 \\ 0 & \text{si } \beta' = 0 \end{cases}, \quad [p y y'] \Big|_a^b = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha'} p(a) [y(a)]^2 \geq 0 & \text{si } \alpha' \neq 0 \\ 0 & \text{si } \alpha' = 0 \end{cases}.$$

Si $y(a) = y(b) = 0, y = \{1\}$ no es autofunción $\Rightarrow y' \neq 0 \Rightarrow \int_a^b p (y')^2 > 0 \Rightarrow \lambda > 0$.

Ej 3. $(P_3) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = y(1) = 0 \end{cases}$ (casi en forma autoadjunta: $[y']' + \lambda y = 0$; es $r \equiv 1$).

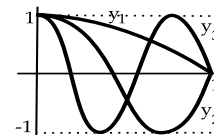
Tendrá las propiedades del teorema 1. Busquemos sus λ_n . Como $\alpha\alpha' = \beta\beta' = 0$, $q \equiv 0$, nos limitamos a los $\lambda \geq 0$. [Ahora ya sabemos que podíamos haber hecho esto en el ejemplo 2, y que en el 1 hubieran bastado los $\lambda > 0$; que conste que **hay problemas con $\lambda < 0$**].

$\lambda = 0$: $y = c_1 + c_2 x \rightarrow \begin{cases} y'(0) = c_2 = 0 \\ y(1) = c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow y \equiv 0$. $\lambda = 0$ no es autovalor.

$\lambda > 0$: $y = c_1 \cos wx + c_2 \sin wx$. $y'(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0 \rightarrow y(1) = c_1 \cos w = 0$

$\rightarrow w_n = \frac{2n-1}{2} \pi$, $\lambda_n = \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4}$, $y_n = \left\{ \cos \frac{2n-1}{2} \pi x \right\}$, $n = 1, 2, \dots$

El teorema asegura que las $\{y_n\}$ son ortogonales: $\int_0^1 y_n y_m dx = 0$, $n \neq m$ (sería fácil comprobarlo), y que la autofunción n -sima (como le ocurre a las tres dibujadas) tiene $n-1$ ceros en $(0, 1)$.



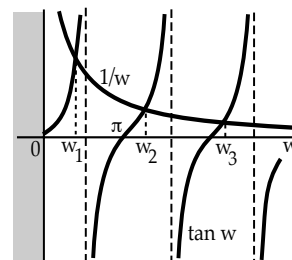
Ej 4. $(P_4) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = y'(1) + y(1) = 0 \end{cases}$ Como $\alpha\alpha' = 0$, $\beta\beta' > 0$, $q \equiv 0$, volvemos mirar sólo los $\lambda \geq 0$.

$\lambda = 0$: $y = c_1 + c_2 x \rightarrow \begin{cases} y'(0) = c_2 = 0 \\ y'(1) + y(1) = c_1 + 2c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow y \equiv 0$. $\lambda = 0$ no autovalor.

$\lambda > 0$: $y = c_1 \cos wx + c_2 \sin wx$. $y'(0) = -wc_1 = 0 \rightarrow c_1 = 0 \rightarrow y'(1) + y(1) = c_2 [w \cos w + 1] = 0$.

No podemos hallar exactamente los λ_n , pero tan $w_n = \frac{1}{w_n}$ lo cumplen infinitos w_n (anulan el corchete infinitos w_n), que sólo se pueden hallar aproximadamente. La y_n para cada $\lambda_n = w_n^2$ es $\{ \cos w_n x \}$. Estas y_n serán ortogonales.

[La mayoría de los problemas de S-L no son resolubles, pues pocas lineales de segundo orden lo son elementalmente (las de coeficientes constantes y pocas más), y aunque lo sean puede ocurrir lo que en este ejemplo].



Ej 5. $(P_5) \begin{cases} y'' - 2y' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = y'(1) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mu^2 - 2\mu + \lambda = 0 \\ \mu = 1 \pm \sqrt{1 - \lambda} \end{cases}$ $[e^{-2x} y']' + \lambda e^{-2x} y = 0$

Sabemos que los $\lambda \geq 0$, pero esto no ahorra cálculos, pues y hay que mirar $\lambda <, =, > 1$:

$\lambda < 1$: $y = c_1 e^{(1+p)x} + c_2 e^{(1-p)x}$, $y' = c_1(1+p)e^{(1+p)x} + c_2(1-p)e^{(1-p)x}$, $p = \sqrt{1-\lambda} \rightarrow \begin{cases} c_1[1+p] + c_2[1-p] = 0 \\ c_1[1+p]e^{1+p} + c_2[1-p]e^{1-p} = 0 \end{cases} \rightarrow c_2(1-p)e[e^{-p} - e^p] = 0 \rightarrow p = 1$ ($\lambda = 0$), $y_0 = \{1\}$.

$\lambda = 1$: $y = [c_1 + c_2 x] e^x$, $y' = [c_1 + c_2 + c_2 x] e^x \rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + 2c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow y \equiv 0$. $\lambda = 1$ no autovalor.

$\lambda > 1$: $y = [c_1 \cos wx + c_2 \sin wx] e^x$, $w = \sqrt{\lambda - 1}$
 $y' = [(c_1 + c_2 w) \cos wx + (c_2 - c_1 w) \sin wx] e^x \rightarrow \begin{cases} y'(0) = c_1 + c_2 w = 0 \rightarrow \\ y'(1) = c_2 e(1 + w^2) \sin w = 0 \rightarrow \end{cases}$

$w = n\pi$, $n = 1, 2, \dots \rightarrow \lambda_n = 1 + n^2 \pi^2$, $y_n = \{e^x [\sin n\pi x - n\pi \cos n\pi x]\}$, $n = 1, 2, \dots$

Las autofunciones serán ortogonales respecto al peso $r(x) = e^{-2x}$:

$$\int_0^1 e^{-x} [\sin n\pi x - n\pi \cos n\pi x] dx = 0$$

$$\int_0^1 [\sin n\pi x - n\pi \cos n\pi x] [\sin m\pi x - m\pi \cos m\pi x] dx = 0 \quad (m \neq n)$$

Ej 6. $(P_6) \begin{cases} x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0 \\ y(1) = y(e) = 0 \end{cases}$ $p(x) = e^{\int \frac{dx}{x}} = x \rightarrow [xy']' + \lambda \frac{y}{x} = 0$. Es $r(x) = \frac{1}{x}$. Es problema separado regular ($p, r > 0$ en $[1, e]$).

Ecuación de Euler: $r(r-1) + r + \lambda = 0 \rightarrow r = \pm \sqrt{-\lambda}$. Basta mirar los $\lambda > 0$:

$y = c_1 \cos(w \ln x) + c_2 \sin(w \ln x)$, $\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 \sin w = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = n^2 \pi^2$, $y_n = \{\sin(n\pi \ln x)\}$, $n = 1, 2, \dots$

Como siempre, las autofunciones son ortogonales: $\int_1^e \frac{\sin(n\pi \ln x) \sin(m\pi \ln x)}{x} dx = 0$, $m \neq n$.

Separando variables nos aparecerán también problemas de contorno como el siguiente, que no es separado, pues sus condiciones de contorno mezclan valores en los dos extremos del intervalo. En concreto, este es un **problema periódico**:

Ej 7. $(P_7) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(-\pi) = y(\pi), y'(-\pi) = y'(\pi) \end{cases}$ [Estas condiciones equivalen a pedir que y sea 2π -periódica].

$\lambda < 0 \rightarrow \begin{cases} c_1[e^{\pi p} - e^{-\pi p}] - c_2[e^{\pi p} - e^{-\pi p}] = 0 \\ c_1[e^{\pi p} - e^{-\pi p}] + c_2[e^{\pi p} - e^{-\pi p}] = 0 \end{cases}$ Como el determinante de los coeficientes

$$\begin{vmatrix} e^{\pi p} - e^{-\pi p} & e^{-\pi p} - e^{\pi p} \\ e^{\pi p} - e^{-\pi p} & e^{\pi p} - e^{-\pi p} \end{vmatrix} = 2(e^{\pi p} - e^{-\pi p})^2 \neq 0 \text{ si } p > 0,$$

el sistema sólo tiene la solución trivial $c_1 = c_2 = 0$. No hay autovalores negativos.

$\lambda = 0 \rightarrow \begin{cases} c_1 - c_2\pi = c_1 + c_2\pi \\ c_2 = c_2 \end{cases}$ se satisface para $c_2 = 0$ y cualquier c_1 : $y_0 = c_1 = \{1\}$.

$\lambda > 0 \rightarrow \begin{cases} 2c_2 \operatorname{sen} \pi w = 0 \\ 2c_1 w \operatorname{sen} \pi w = 0 \end{cases} \rightarrow \operatorname{sen} \pi w = 0 \rightarrow \lambda_n = n^2, n = 1, 2, \dots$

Para esos λ_n las condiciones de contorno se cumplen para todo c_1 y todo c_2 .

Las autofunciones son, pues: $y_n = c_1 \cos nx + c_2 \operatorname{sen} nx \equiv \{\cos nx, \operatorname{sen} nx\}$.

[Es claro que exigir simplemente que y sea 2π -periódica lleva directamente a los mismos autovalores y autofunciones].

Las propiedades de (P_7) son algo distintas de las los problemas separados: sigue habiendo una **sucesión infinita de autovalores** $\lambda_n = n^2, n = 1, 2, \dots$ tendiendo a ∞ , pero **las autofunciones** $y_0 = \{1\}, y_n = \{\cos nx, \operatorname{sen} nx\}$ forman, si $n > 0$, un **espacio vectorial de dimensión 2**. Utilizando $\operatorname{sen} a \cos b = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)]$ (y las relaciones ya vistas para $\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$ y $\cos a \cos b$ y las fórmulas del ángulo doble) se comprueba que sigue siendo cierto que **autofunciones diferentes son ortogonales** entre sí.

Los problemas de Sturm-Liouville pueden generalizarse. En la demostración del teorema se aprecia que lo esencial para la ortogonalidad es que $[p|W|(y_n, y_m)]_a^b = 0$; esto sucede para otros tipos de condiciones de contorno (y para otros muchos no) además de las separadas.

Por ejemplo ocurre en los llamados problemas **periódicos** que generalizan el (P_7) :

$(P_p) \begin{cases} [py']' - qy + \lambda ry = 0, \text{ con } p(a) = p(b), p \in C^1[a, b], q, r \in C[a, b], p, r > 0 \text{ en } [a, b] \\ y(a) = y(b), y'(a) = y'(b) \text{ (condiciones periódicas)} \end{cases}$

Para (P_p) no se anula el wronskiano de dos soluciones ni en a ni en b (y por eso hay espacios de autofunciones de dimensión 2), pero es claro que $[p|W|(y_n, y_m)](b) = [p|W|(y_n, y_m)](a)$.

Más en general, se llaman problemas **autoadjuntos** aquellos tales que $[p|W|(u, v)]_a^b = 0$ para todo par de funciones u, v que cumplan sus condiciones de contorno.

Las autofunciones de estos problemas más generales (que en libros avanzados de ecuaciones se ve que tienen propiedades similares a las de los separados) son, pues, ortogonales. Pero no nos ocupamos más de ellos, pues los problemas que nos aparecerán en el capítulo siguiente serán todos separados (o el (P_7) de arriba).

[El término 'autoadjunto' se debe a que llamando $L[y] = -[py']' + qy$ y $(u, v) = \int_a^b uv dx$, se tiene que $(L[u], v) = (u, L[v])$ para todo par de funciones u, v que cumplan las condiciones de contorno: el operador L es 'autoadjunto' en ese conjunto de funciones].

Ej 8. $(P_8) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(\pi), y'(0) = -y'(\pi) \end{cases}$ Se tiene $[p|W|(u, v)](\pi) = -[p|W|(u, v)](0)$.

El problema, pues, no es autoadjunto. Operando como en el ejemplo 7 es fácil ver que las cosas son muy diferentes: cualquier λ (menor, igual o mayor que 0) es autovalor

(asociado, respectivamente, a $\left\{ \operatorname{ch} \left[p \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\}, \{1\}$ ó $\left\{ \cos \left[w \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\}$)

y en general es falso que las autofunciones asociadas a λ distintos sean ortogonales.

Resolviendo algunas EDPs aparecerán **problemas singulares** de Sturm-Liouville que no reúnen todas las condiciones de los regulares: p ó r se anulan o no son continuas en algún extremo del intervalo, el intervalo es infinito... Resolvamos tres de ellos (el 9 surge, por ejemplo, tratando ondas o calor en el espacio, el 10 si esas ecuaciones son en el plano y el 11 para Laplace en la esfera), en los que en uno o ambos extremos es $p=0$. En esos extremos las condiciones de contorno de un (P_s) son demasiado fuertes para tener autovalores y autofunciones como en los regulares y se sustituyen por **acotación**, de forma que siga habiendo ortogonalidad, es decir, según vimos en la demostración del teorema 1, que se cumpla:

$$0 = [p(y_n y'_m - y_m y'_n)]_a^b = (\lambda_n - \lambda_m) \langle y_n, y_m \rangle .$$

Ej 9. $(P_9) \begin{cases} xy'' + 2y' + \lambda xy = 0 \\ y \text{ acotada en } x=0, y(1)=0 \end{cases} \quad y'' + \frac{2}{x}y' + \lambda y = 0 \xrightarrow{e^{\int a = x^2}} [x^2 y']' + \lambda x^2 y = 0 .$

Haciendo el cambio $u = xy$ la ecuación se convierte en $u'' + \lambda u = 0 \rightarrow$

la solución general de la inicial para $\lambda > 0$ es $y = c_1 \frac{\cos wx}{x} + c_2 \frac{\sen wx}{x} .$

y acotada $\rightarrow c_1 = 0$; $y(1) = 0 \rightarrow \sen w = 0 \rightarrow \lambda_n = n^2 \pi^2, n = 1, 2, \dots, y_n = \left\{ \frac{\sen n\pi x}{x} \right\}$

[ortogonales, como es fácil comprobar, respecto al peso $r(x) = x^2$].

Es fácil ver directamente que no hay $\lambda \leq 0$, o podemos evitar las cuentas pues la prueba de esa parte del teorema se puede adaptar a este problema singular, con lo que $\lambda > 0$.

[También se podría haber observado que las condiciones que quedan tras el cambio son $u(0) = 0 \cdot y(0) = 0, u(1) = 1 \cdot 0 = 0 \rightarrow u_n = \{\sen n\pi x\}$, y haber deshecho el cambio].

[Si hubiésemos impuesto $y(0) = 0, y(1) = 0$ la única solución sería $y \equiv 0 \forall \lambda$; las condiciones para este problema singular habrían sido demasiado fuertes].

Ej 10. $(P_{10}) \begin{cases} xy'' + y' + \lambda xy = 0 \\ y \text{ acotada en } x=0, y(1)=0 \end{cases} \quad \rightarrow [xy']' + \lambda xy = 0 .$

Se puede probar que $\lambda > 0$. Haciendo el cambio de variable independiente $s = \sqrt{\lambda} x$ la ecuación se convierte en la de Bessel de orden 0:

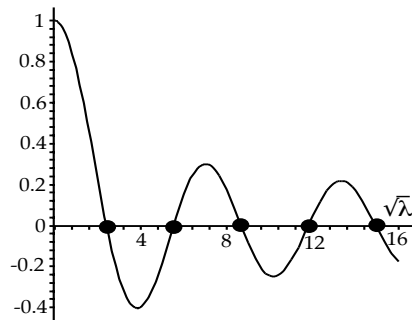
$$s \frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{dy}{ds} + sy = 0 \rightarrow y = c_1 J_0(s) + c_2 K_0(s) = c_1 J_0(\sqrt{\lambda} x) + c_2 K_0(\sqrt{\lambda} x)$$

La primera condición de contorno impone que $c_2 = 0$ (K_0 no está acotada en $x = 0$). De la otra se deduce que $c_1 J_0(\sqrt{\lambda}) = 0$. Así pues, los autovalores son los $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ cuyas raíces son los infinitos ceros de J_0 [están tabulados y si n grande es $\sqrt{\lambda_n} \approx (n - \frac{1}{4})\pi$].

Para esos λ_n las autofunciones asociadas son

$$y_n = \{J_0(\sqrt{\lambda_n} x)\} ,$$

que son ortogonales respecto al peso $r(x) = x$.



Ej 11. $(P_{11}) \begin{cases} [(1-x^2)y']' + \lambda y = 0 \\ y \text{ acotada en } x = \pm 1 \end{cases} \quad \text{La ecuación es la de Legendre si } \lambda = p(p+1) .$

Se sabe que sus únicas soluciones acotadas en 1 y -1 son los polinomios de Legendre $P_n(x)$, que aparecen cuando $p = n, n = 0, 1, 2, \dots$

Los autovalores son $\lambda_n = n(n+1), n = 0, 1, 2, \dots$ y las autofunciones son los P_n , que cumplen, como se ve en los cursos de EDOs: $\int_{-1}^1 P_n P_m dx = 0$ si $m \neq n$ [$r(x) = 1$].

2.2. Series de Fourier

Consideremos el problema de Sturm-Liouville separado regular:

$$(P_s) \begin{cases} [py']' - qy + \lambda ry = 0 \\ \alpha y(a) - \alpha' y'(a) = 0, \beta y(b) + \beta' y'(b) = 0 \end{cases}$$

y sean $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ sus autofunciones asociadas a los $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$

La importante propiedad que veremos en esta sección es que **cualquier función f suficientemente regular en $[a, b]$ puede ser desarrollada en serie de dichas autofunciones**, es decir:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x)$$

Supongamos que este desarrollo es válido y que la serie puede ser integrada término a término. Entonces, por ser las y_n ortogonales:

$$\int_a^b r f y_m dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b r y_n y_m dx = c_m \int_a^b r y_m y_m dx$$

Por tanto, si representamos el producto escalar respecto al peso $r(x)$:

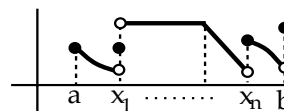
$$\langle u, v \rangle = \int_a^b r u v dx \quad \text{debe ser} \quad c_n = \frac{\langle f, y_n \rangle}{\langle y_n, y_n \rangle}, \quad n=1, 2, \dots$$

[El r es el de la ecuación en forma autoadjunta; en la mayoría de los problemas que aparecerán separando variables en el capítulo 3 dicho peso será 1, pero no siempre].

El problema (nada elemental) reside en precisar para qué funciones f la serie con esos coeficientes (**serie de Fourier de f**) converge realmente hacia f en $[a, b]$. Aunque se le pueden exigir condiciones más débiles, nosotros pediremos a f que sea C^1 a trozos, condición que será satisfecha por las funciones que nos aparecerán en problemas prácticos.

[Recordamos que f es C^1 a trozos en $[a, b]$ si podemos dividir el intervalo en subintervalos $[a, b] = [a, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_n, b]$ de modo que:

- f y f' son continuas en cada (x_k, x_{k+1}) ,
- los límites laterales de f, f' en cada x_k existen y son finitos].



Teor 1.

Si f es C^1 a trozos en $[a, b]$ entonces su serie de Fourier:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, y_n \rangle}{\langle y_n, y_n \rangle} y_n(x)$$

converge hacia $f(x)$ en los $x \in (a, b)$ en que f es continua y hacia $\frac{1}{2} [f(x^-) + f(x^+)]$ en los $x \in (a, b)$ en que es discontinua.

El teorema no dice nada sobre la convergencia en los extremos a y b .

[La demostración es difícil y la omitimos. En lenguaje de 'análisis funcional', las $\{y_n\}$ son una 'base de Fourier' del espacio de funciones de dimensión infinita (similar a una base ortonormal de uno de dimensión finita). La cuestión principal es ver que la base es 'completa', es decir, que no hay otras funciones ortogonales a las $\{y_n\}$. El espacio 'natural' para estudiar las series de Fourier es L^2 (funciones de cuadrado integrable) y la convergencia más ligada a ellas es la 'convergencia en media cuadrática':

$$\int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=1}^n c_k y_k(x) \right|^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Caso particular de los desarrollos en serie de Fourier son los **desarrollos en series trigonométricas**, que, al ser los que más utilizaremos, estudiamos con detalle.

Los autovalores y autofunciones de:

$$(P_1) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(L) = 0 \end{cases} \quad \text{son } \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \quad \text{e } y_n = \left\{ \sin \frac{n\pi x}{L} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

[Es fácil verlo directamente, o también podemos hacer $s = \pi x/L \rightarrow$

$$y'' + \frac{L^2}{\pi^2} \lambda y = 0, \quad y(0) = y(\pi) = 0 \quad \text{en la variable } s, \text{ que es casi el ejemplo 1 de 2.1;}$$

también se trasladaría haciendo $s = x - a$ un problema en $[a, b]$ al (P_1) (con $L = b - a$), sin necesidad de estudiarlo desde el principio].

Llamaremos **serie de Fourier en senos** de f en $[0, L]$ al desarrollo en estas autofunciones:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad \text{con } b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad [s]$$

Ya que el peso es $r(x) \equiv 1$ y se tiene que $(y_n, y_n) = \int_0^L [\sin \frac{n\pi x}{L}]^2 dx = \frac{L}{2}$.

[Hemos escrito impropriadamente $f = \Sigma$; la igualdad sólo se da en los $x \in (0, L)$ en que f es continua; en 0 y L aún no sabemos, pero pronto lo sabremos].

Para este segundo problema de contorno:

$$(P_2) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = y'(L) = 0 \end{cases} \quad \text{son } \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad y_n = \left\{ \cos \frac{n\pi x}{L} \right\}, \quad n = 0, 1, \dots \quad [y_0 = \{1\}]$$

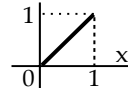
Y se llamará **serie de Fourier en cosenos** de una f dada en $[0, L]$ a:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad \text{con } a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad [c]$$

Pues $(y_0, y_0) = \int_0^L 1^2 dx = L$ e $(y_n, y_n) = \int_0^L [\cos \frac{n\pi x}{L}]^2 dx = \frac{L}{2}$, si $n \geq 1$.

[Ponemos $\frac{a_0}{2}$ en la serie para que la fórmula del a_n valga también para a_0].

Ej 1. Sea $f(x) = x, x \in [0, 1]$. Desarrollémosla en senos y en cosenos:



$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\pi x, \quad \text{pues } b_n = 2 \int_0^1 x \sin n\pi x dx = -\frac{2}{n\pi} \cos n\pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \cos n\pi x = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} \cos(2m-1)\pi x,$$

ya que $a_0 = 2 \int_0^1 x dx = 1$, $a_n = 2 \int_0^1 x \cos n\pi x dx = \frac{2}{n^2 \pi^2} [\cos n\pi - 1]$, $n = 1, 2, \dots$

Ambas series, según el teorema 1, convergen hacia $f(x)$ para todo $x \in (0, 1)$. Lo mismo sucedería con el desarrollo en autofunciones de cualquier otro problema de Sturm-Liouville que considerásemos. Cuando nos encontremos estas series resolviendo EDPs no tendremos la libertad de elegir en qué autofunciones desarrollar: nos las impondrá el problema.

Otras dos familias de autofunciones sencillas en las que vamos a desarrollar funciones muchas veces son las de estos problemas fáciles de resolver:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y'(L) = 0 \end{cases} \quad \text{con } \lambda_n = \frac{[2n-1]^2 \pi^2}{2^2 L^2}, \quad y_n = \left\{ \sin \frac{[2n-1]\pi x}{2L} \right\}, \quad (y_n, y_n) = \frac{L}{2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = y(L) = 0 \end{cases} \quad \text{con } \lambda_n = \frac{[2n-1]^2 \pi^2}{2^2 L^2}, \quad y_n = \left\{ \cos \frac{[2n-1]\pi x}{2L} \right\}, \quad (y_n, y_n) = \frac{L}{2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

A los desarrollos en estas autofunciones los llamaremos, respectivamente, series en **senos impares** y en **cosenos impares** en $[0, L]$.

La teoría de series de Fourier puede ser extendida para incluir autofunciones de problemas con condiciones periódicas. Así para:

$$(P_3) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(-L) = y(L) \\ y'(-L) = y'(L) \end{cases}, \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, n=0, 1, \dots, y_0 = \{1\}, y_n = \left\{ \cos \frac{n\pi x}{L}, \sin \frac{n\pi x}{L} \right\}$$

se deduce la siguiente **serie de Fourier en senos y cosenos** en $[-L, L]$:

$$[p] \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right], \text{ con coeficientes:}$$

$$[1] \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, n=0, 1, 2, \dots, \text{ y}$$

$$[2] \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, n=1, 2, \dots, \text{ ya que se cumple:}$$

$$\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 0 \text{ para todo } m \text{ y } n; \int_{-L}^L 1^2 dx = 2L;$$

$$\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ L & m = n \end{cases}; \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ L & m = n \end{cases}.$$

[Las fórmulas [1]-[2] también valen para desarrollar una f definida inicialmente en cualquier otro intervalo $[a, a+2L]$ (cambiando los límites a la integral) pues

$$\int_a^{a+2L} \cos^2 = \int_a^{a+2L} \sin^2 = L].$$

Como en el teorema 1, la serie [p] converge hacia $f(x)$ en los x en los que f es continua. Pero además se puede decir lo que sucede en los extremos $-L$ y L (observando que [p] define de hecho una función en todo \mathbf{R} que es $2L$ -periódica). Podemos hablar también sobre la **convergencia uniforme** de [p] (sin demostrar nada, como en toda la sección):

Teor 2.

Suponemos que f es C^1 a trozos en $[-L, L]$ y extendemos f fuera de $[-L, L]$ de forma $2L$ -periódica. Entonces la serie [p] con a_n y b_n dados por [1] y [2] converge hacia $f(x)$ en todos los puntos en que su extensión es continua (y hacia $\frac{1}{2}[f(x^-)+f(x^+)]$ en los puntos de discontinuidad). Además [p] converge uniformemente en todo intervalo cerrado que no contenga discontinuidades de la f extendida. Por tanto, si f es continua y $f(-L)=f(L)$ entonces [p] converge uniformemente hacia f en todo el intervalo $[-L, L]$.

Las fórmulas [s] y [c] para los coeficientes de las series en senos y de las series en cosenos se pueden ver como casos particulares de [1] y [2]:

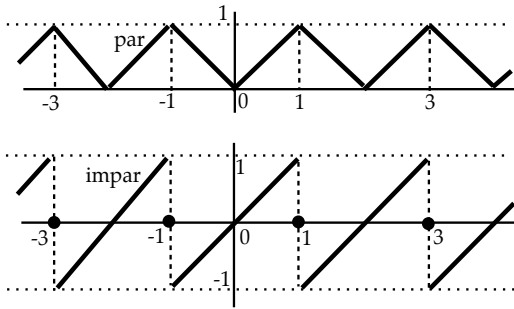
Dada una f inicialmente definida en $[0, L]$ podemos extenderla de forma **impar** o de forma **par** a $[-L, L]$. En el primer caso es impar $f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}$ y par $f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}$. En el segundo $f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}$ es par y $f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}$ es impar. Por tanto, $a_n = 0$ y [1] se convierte en [s] en el primero, y en el segundo $b_n = 0$ y [2] pasa a ser [c].

[Si definiésemos la f de cualquier otra forma en $[-L, 0]$, la serie en senos y cosenos también convergería hacia $f(x)$ en los x de $(0, L)$ en que fuese continua].

Como consecuencia de lo anterior y del teorema 2 se tiene que:

La serie de cosenos de una f continua en $[0, L]$, con f' continua a trozos, converge uniformemente hacia f en todo el intervalo.
Si f satisface además que $f(0)=f(L)=0$ la serie en senos de f también converge uniformemente hacia f en todo $[0, L]$.

[Si no fuese $f(0)=0$ ó $f(L)=0$ la f extendida primero de forma impar a $[-L, L]$ y luego de forma $2L$ -periódica no sería continua en 0 o en L ; además está claro que todas las series en senos se anulan en 0 y L , pues lo hace cada sumando].



En particular, la serie en senos del **Ej 1** no converge uniformemente hacia f en $[0, 1]$ (sí lo hace en cualquier intervalo de la forma $[0, b]$, $b < 1$). La serie en cosenos sí converge uniformemente en $[0, 1]$.

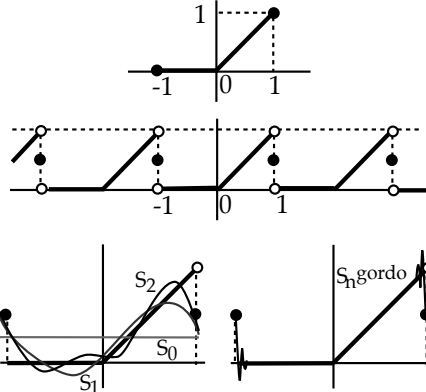
[Aunque las series en cosenos se comporten mejor, resolviendo EDPs no podremos elegir, como ya hemos dicho, el tipo de series en que desarrollar las funciones].

Ej 2. Sea $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$.

Su serie en senos y cosenos está casi calculada:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos n\pi x - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin n\pi x.$$

La suma de esta serie es 0 en $(-1, 0]$, x en $[0, 1)$ y $1/2$ en -1 y 1 . En todo cerrado que no contenga estos puntos la convergencia es uniforme. Cerca de ellos la convergencia es mala y lenta. [Se produce el 'fenómeno de Gibbs': aparecen 'picos' cerca de las discontinuidades].



Ej 3. Hallemos otro par de desarrollos de $f(x) = x, x \in [0, 1]$, en las autofunciones de los ejemplos 3 y 4 de 2.1: $\left\{ \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2} \right\}$ y $\{ \cos w_n x \}$ con $\tan w_n = \frac{1}{w_n}$. [$r(x) = 1$].

$$c_n = 2 \int_0^1 x \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2} dx \rightarrow x = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(2n-1)} - \frac{8}{\pi^2(2n-1)^2} \right] \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2}.$$

$$\langle \cos w_n x, \cos w_n x \rangle = \int_0^1 \cos^2 w_n x dx = \frac{1}{2} + \frac{\sin w_n \cos w_n}{2w_n} = \frac{w_n^2 + \cos^2 w_n}{2w_n^2} = \frac{2 + w_n^2}{2(1 + w_n^2)},$$

$$\langle x, \cos w_n x \rangle = \int_0^1 x \cos w_n x dx = \frac{\sin w_n}{w_n} + \frac{\cos w_n - 1}{w_n^2} = \frac{2 \cos w_n - 1}{w_n^2} \rightarrow$$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(2 \cos w_n - 1)}{w_n^2 + \cos^2 w_n} \cos w_n x \quad [\text{usando el ordenador: } c_1 \approx 0.52, c_2 \approx -0.46 \dots].$$

Ej 4. Nuevo desarrollo de $f(x) = x$, ahora en $[1, e]$, en las autofunciones del Ej 6 de 2.1.

Esta vez el peso no es 1, sino $r(x) = \frac{1}{x}$. Como $\int_1^e \frac{\sin^2(n\pi \ln x) dx}{x} = \int_0^1 \sin^2(n\pi s) ds = \frac{1}{2}$,

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin(n\pi \ln x), \text{ si } c_n = 2 \int_1^e \sin(n\pi \ln x) dx = 2 \int_0^1 e^s \sin(n\pi s) ds = \frac{2n\pi [1 - e(-1)^n]}{1 + n^2 \pi^2}.$$

Observemos para acabar que también se pueden hacer desarrollos de Fourier en serie de autofunciones de diversos problemas de Sturm-Liouville singulares, en particular en las de los tres que vimos en la sección anterior.

Ej 5. Desarrollemos una $f \in C^1$ a trozos en las autofunciones del (P_{10}) de esa sección:

$$(P_{10}) \begin{cases} xy'' + y' + \lambda xy = 0 \\ y \text{ acotada en } x=0, y(1)=0 \end{cases} \rightarrow f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_n J_0(\sqrt{\lambda_n} x), \text{ peso } r(x) = x.$$

$$\rightarrow c_n = \frac{\int_0^1 x f(x) J_0(\sqrt{\lambda_n} x) dx}{\int_0^1 x J_0^2(\sqrt{\lambda_n} x) dx} = \frac{2}{J_1^2(\sqrt{\lambda_n})} \int_0^1 x f(x) J_0(\sqrt{\lambda_n} x) dx$$

$$\text{pues } \int_0^1 x J_0^2(\sqrt{\lambda_n} x) dx = \frac{1}{\lambda_n} \int_0^{\sqrt{\lambda_n}} u J_0^2(u) du = \frac{1}{2\lambda_n} [u^2 (J_0^2(u) + J_1^2(u))]_0^{\sqrt{\lambda_n}} = \frac{1}{2} J_1^2(\sqrt{\lambda_n})$$

$$\text{ya que las } J_n \text{ satisfacen } [x^n J_n]' = x^n J_{n-1} \rightarrow [x J_1]' = x J_0, J_0' = -J_1$$

$$\rightarrow \int u J_0^2 du = \frac{u^2}{2} J_0^2 + \int u J_0 u J_1 du = \frac{u^2}{2} J_0^2 + \frac{1}{2} [u J_1]^2$$

2.3. Problemas no homogéneos; función de Green

Separando variables en la ecuación de Laplace y similares aparecerán, además de problemas de Sturm-Liouville homogéneos, otros problemas de contorno con la ecuación o las condiciones no homogéneas (para calor y ondas serán de valores iniciales). Antes de dar su teoría general, veamos un ejemplo.

Ej 1. Discutamos cuántas soluciones tiene $\begin{cases} y'' = x - d \\ y(1) = y(2) + by'(2) = 0 \end{cases}$, d, b constantes.

La solución general es: $y = c_1 + c_2x + \frac{x^3}{6} - \frac{dx^2}{2}$ (con $y' = c_2 + \frac{x^2}{2} - dx$). Imponiendo datos:

$$\begin{cases} y(1) = c_1 + c_2 + \frac{1}{6} - \frac{d}{2} = 0 \\ y(2) + by'(2) = c_1 + 2c_2 + \frac{4}{3} - 2d + bc_2 + 2b - 2bd = 0 \end{cases}, \text{ es decir: } \begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{d}{2} - \frac{1}{6} \\ c_1 + (2+b)c_2 = 2bd + 2d - 2b - \frac{4}{3} \end{cases}.$$

Este sistema lineal tendrá solución única en c_1 y c_2 si el sistema homogéneo tiene sólo la solución trivial (si el determinante de los coeficientes es no nulo). Cuando el homogéneo tenga infinitas soluciones, el no homogéneo tendrá infinitas o ninguna.

Por tanto, si $b \neq -1$, podemos despejar de forma única c_1 y c_2 , y la solución queda determinada, cualquiera que sea d . Pero si $b = -1$:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{d}{2} - \frac{1}{6} \\ c_1 + c_2 = \frac{2}{3} \end{cases}, \text{ este sistema sólo tiene solución cuando } \frac{d}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow d = \frac{5}{3},$$

y en ese caso una de las dos constantes queda libre. Si $b = -1$, $d \neq \frac{5}{3}$, no hay solución.

Veamos ya el problema general. Consideremos el problema para la **ecuación no homogénea** con condiciones separadas homogéneas:

$$(P_f) \begin{cases} [p(x)y']' + g(x)y = f(x) \\ \alpha y(a) - \alpha'y'(a) = \beta y(b) + \beta'y'(b) = 0 \end{cases}, \quad p \in C^1, g, f \in C, p > 0 \text{ en } [a, b].$$

y llamemos (P_h) al problema homogéneo asociado ($f \equiv 0$). Luego consideraremos condiciones de contorno no homogéneas y el caso en que la ecuación depende de un parámetro. Este teorema generaliza lo que ocurría en el ejemplo 1 de arriba:

Teor 1. El problema (P_f) tiene solución única si y sólo si (P_h) tiene sólo la solución $y \equiv 0$. Si (P_h) tiene soluciones no triviales $\{y_h\}$ entonces (P_f) tiene infinitas soluciones o no tiene ninguna según sea igual o distinta de cero, respectivamente, la integral: $\int_a^b f(x)y_h(x) dx$.

$$\begin{matrix} 1 \rightarrow 1 \\ \infty \rightarrow \infty \\ 0 \end{matrix}$$

Se deduce gran parte del teorema imponiendo las condiciones de contorno a la solución general de la ecuación $y = c_1y_1 + c_2y_2 + y_p$, y usando las propiedades de los sistemas algebraicos. Además si hay soluciones y de (P_f) debe ser:

$$\int_a^b f y_h = \int_a^b [[py']' + gy] y_h = [p(y_h y' - y y_h')]_a^b + \int_a^b [[py_h']' + g y_h] y = 0$$

y se prueba que esta condición necesaria es también suficiente.

[La f del teorema 1 es, desde luego, la de la ecuación en forma autoadjunta $[py']' + gy = f$; para aplicarlo habrá, en ocasiones, que reescribir la ecuación].

Ej 1*. Hagamos la discusión del Ej 1, ahora utilizando el teorema. El (P_h) [para $y'' = 0$] tiene sólo la solución $y \equiv 0$ si $b \neq -1$. Y si $b = -1$ son soluciones $y_h = \{1 - x\}$.

El (P_f) [para $[y']' = x - d$], tendrá entonces solución única si $b \neq -1$, e infinitas ó 0, para $b = -1$, según se anule o no la integral: $\int_1^2 (x-d)(1-x) dx = \frac{d}{2} - \frac{5}{6} \Leftrightarrow d = \frac{5}{3}$.

Si en vez de la $x-d$ concreta tuviésemos una $f(x)$ general, el teorema daría rápidamente:

única solución si $b \neq -1$, e infinitas / ninguna, según $\int_1^2 f(x)(1-x) dx \stackrel{=0}{\neq 0}$, para $b = -1$.

Costaría bastante más concluirlo hallando la solución: $c_1 + c_2x + x \int_1^x f(s) ds - \int_1^x s f(s) ds$.

Sea ahora el problema con **condiciones de contorno no homogéneas**:

$$(P_{AB}) \begin{cases} [p(x)y']' + g(x)y = f(x) \\ \alpha y(a) - \alpha' y'(a) = A, \beta y(b) + \beta' y'(b) = B \end{cases}, p \in C^1, g, f \in C, p > 0 \text{ en } [a, b],$$

y sea (P_h) el homogéneo obtenido tomando $f(x) \equiv 0, A=B=0$ (el mismo de antes). Hallando una función v que satisfaga sus condiciones de contorno el (P_{AB}) se puede reducir a otro con condiciones homogéneas, pues el cambio $w=y-v$ (gracias a la linealidad de la ecuación y las condiciones de contorno) lleva al problema:

$$(P_w) \begin{cases} [p(x)w']' + g(x)w = f(x) - [p(x)v']' - g(x)v \\ \alpha w(a) - \alpha' w'(a) = 0, \beta w(b) + \beta' w'(b) = 0 \end{cases}$$

que es del tipo (P_f) ya analizado. Deducimos, por ejemplo, que:

Teor 2. (P_{AB}) tiene solución única $\Leftrightarrow (P_h)$ tiene sólo la solución $y \equiv 0$

[y si (P_h) tiene infinitas soluciones, (P_{AB}) puede tener infinitas o ninguna].

La idea de encontrar una v que satisfaga las condiciones de contorno para convertirlas en homogéneas se utilizará en las EDPs de los próximos capítulos. Para encontrar dicha v normalmente trabajaremos por tanteo. Si no es una constante, probaremos una recta; si no vale, funciones más complicadas...

Está claro que aunque en (P_{AB}) sea $f(x) \equiv 0$, **si (al menos) una condición de contorno es no homogénea, las propiedades son las típicas de uno no homogéneo**. Esto es lo que ocurre en el siguiente ejemplo.

Ej 2. Discutamos cuántas soluciones tiene: $(P_a) \begin{cases} xy'' - y' = 0 \\ y'(1) + ay(1) = 0, y(2) = 1 \end{cases}$

Comenzamos analizando cuántas soluciones tiene el homogéneo: $y = c_1 + c_2x^2 \rightarrow$

$$\begin{cases} y'(1) + ay(1) = 2c_2 + ac_1 + ac_2 = 0 & [2-3a]c_2 = 0 \\ y(2) = c_1 + 4c_2 = 0 & \rightarrow c_1 = -4c_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \equiv 0 & \text{si } a \neq \frac{2}{3} \\ y = x^2 - 4 & \text{si } a = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Si $a \neq \frac{2}{3}$, (P_a) tiene solución única. Para $a = \frac{2}{3}$ vemos lo que sucede directamente:

$$\begin{cases} y'(1) + \frac{2}{3}y(1) = \frac{2}{3}[c_1 + 4c_2] = 0 \\ y(2) = c_1 + 4c_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \text{no existe solución de } (P_{2/3}).$$

Aunque también podríamos (más largo) convertirlo en un (P_f) y aplicar el teorema 1. Para ello buscamos una v de la forma $v = Mx + N$ que satisfaga las condiciones:

$$\begin{cases} v'(1) + \frac{2}{3}v(1) = \frac{1}{3}[5M + 2N] = 0 \\ v(2) = 2M + N = 1 \end{cases} \rightarrow v = 5 - 2x, w = y - v \rightarrow (P_w) \begin{cases} xw'' - w' = -2 \\ w'(1) + \frac{2}{3}w(1) = w(2) = 0 \end{cases}$$

Escribimos la ecuación en forma autoadjunta: $\left[\frac{w'}{x}\right]' = -\frac{2}{x^2}$ y usamos el teorema 1:

$$\int_1^2 \left[-\frac{2}{x^2}\right][x^2 - 4] dt \neq 0 \Rightarrow (P_w) \text{ [y por tanto } (P_{2/3})] \text{ no tiene solución.}$$

Consideremos ahora una tercera situación, el **problema de S-L no homogéneo**:

$$(P_\lambda) \begin{cases} [py']' - qy + \lambda ry = f(x) \\ \alpha y(a) - \alpha' y'(a) = \beta y(b) + \beta' y'(b) = 0 \end{cases}$$

Llamemos (P_s) al problema separado de Sturm-Liouville homogéneo asociado (el de $f \equiv 0$). Para cada valor de λ tenemos un problema de los ya vistos (con $g = -q + \lambda r$). Se tiene por tanto:

Teor 3. (P_λ) tiene solución única $\Leftrightarrow \lambda$ no es autovalor de (P_s) .
Si λ_n es autovalor con autofunción $\{y_n\}$,
 (P_{λ_n}) no tiene solución según sea $\int_a^b f y_n dx \neq 0$.
tiene infinitas según sea $\int_a^b f y_n dx = 0$.

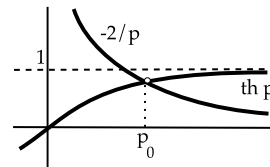
Ej 3. $(P_3) \begin{cases} y'' + \lambda y = 1 \\ y'(0) = y'(1) - 2y(1) = 0 \end{cases}$ Estudiemos, según λ , cuántas soluciones tiene.

Hallemos los λ_n del homogéneo. Como $\beta\beta' < 0$ podrían aparecer autovalores negativos.

$$\lambda < 0: y = c_1 e^{px} + c_2 e^{-px} \rightarrow \begin{cases} c_2 = c_1 \\ c_1(p[e^p - e^{-p}] - 2[e^p + e^{-p}]) = 0 \end{cases}$$

Hay autovalor $\lambda_0 = -p_0^2$ si $\text{th } p_0 = \frac{2}{p_0}$, con $y_0 = \{\text{ch}(p_0 x)\}$

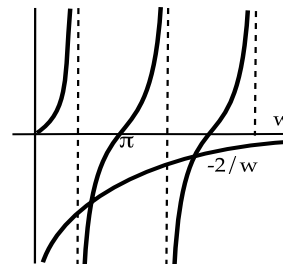
[Utilizando el método de Newton o uno similar: $p_0 \approx 2.07$, $\lambda_0 \approx -4.27$].



$$\lambda = 0: y = c_1 + c_2 x \rightarrow \begin{cases} c_2 = 0 \\ -2c_1 - c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda = 0 \text{ no es autovalor.}$$

$$\lambda > 0: y = c_1 \cos wx + c_2 \sin wx \rightarrow \begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1(w \sin w + 2 \cos w) = 0 \end{cases}$$

Hay infinitos $\lambda_n = w_n^2$ si $\tan w_n = -\frac{2}{w_n}$, con $y_n = \{\cos(w_n x)\}$.



Por tanto (la ecuación está ya en forma autoadjunta):

Si $\lambda \neq \lambda_n$ hay solución única de (P_3) .

Si $\lambda = \lambda_0$, como $\int_0^1 \text{ch}(p_0 x) dx \neq 0$, (P_3) no tiene solución.

Si $\lambda = \lambda_n$, $n = 1, 2, \dots$, $\int_0^1 \cos(w_n x) dx = \frac{\sin w_n}{w_n} \neq 0$, (P_3) tampoco tiene solución..

Para acabar, deduzcamos una fórmula que para cualquier $f(x)$ nos da la solución del (P_f) del principio de la sección (en el caso de que sea única) en términos de integrales, conocidas las soluciones de la ecuación homogénea (algo parecido a la fórmula de variación de las constantes para problemas de valores iniciales):

Supongamos que (P_h) tiene sólo la solución $y \equiv 0$ y sean y_1 e y_2 soluciones no triviales de la ecuación homogénea $[py']' + gy = 0$ que cumplen, respectivamente, $\alpha y_1(a) - \alpha' y_1'(a) = 0$ y $\beta y_2(b) + \beta' y_2'(b) = 0$. Entonces la solución única de (P_f) es:

Teor 4.

$$y(x) = \int_a^b G(x, s) f(s) ds, \text{ con } G(x, s) = \begin{cases} \frac{y_1(s)y_2(x)}{\rho |W|(y_1, y_2)}, & a \leq s \leq x \\ \frac{y_1(x)y_2(s)}{\rho |W|(y_1, y_2)}, & x \leq s \leq b \end{cases}$$

A la $G(x, s)$ se le llama **función de Green** del problema.

[Observemos que el denominador que aparece en la G es constante:

$$[\rho(y_1 y_2' - y_2 y_1')] = y_1 [\rho(y_2')] - y_2 [\rho(y_1')] = -g y_1 y_2 + g y_2 y_1 = 0]$$

Comprobemos que la $y(x)$ de arriba cumple (P_f) . Desarrollando la integral:

$$y(x) = y_1(x) \int_a^b \frac{y_2(s)}{|W|(s)} \frac{f(s)}{\rho(s)} ds + y_2(x) \int_a^x \frac{y_1(s)}{|W|(s)} \frac{f(s)}{\rho(s)} ds - y_1(x) \int_a^x \frac{y_2(s)}{|W|(s)} \frac{f(s)}{\rho(s)} ds = c y_1 + y_p$$

Por tanto, $y(x)$ es solución de la no homogénea $y'' + \frac{p'}{p} y' + \frac{q}{p} y = \frac{f}{p}$.

Además como $y'(x) = y_1'(x) \int_a^b \frac{y_2(s)}{|W|(s)} \frac{f(s)}{\rho(s)} ds + y_2'(x) \int_a^x \frac{y_1(s)}{|W|(s)} \frac{f(s)}{\rho(s)} ds - y_1'(x) \int_a^x \frac{y_2(s)}{|W|(s)} \frac{f(s)}{\rho(s)} ds$ se tiene que:

$$y(a) = c y_1(a), y'(a) = c y_1'(a), y(b) = k y_2(b), y'(b) = k y_2'(b), c = \int_a^b \frac{y_2 f}{|W| \rho}, k = \int_a^b \frac{y_1 f}{|W| \rho}$$

Como y_1, y_2 cumplen cada condición de contorno, también lo hace la y .

Una vez **hallada la G , dada cualquier f , basta hacer un par de integraciones para encontrar la solución del problema no homogéneo (P_f)** . [La idea de la función de Green se generaliza a otros problemas de EDOs y EDPs].

[Que quede claro que cada y_k satisface solamente una condición (o en a o en b ; ambas condiciones sólo las cumple la trivial). La f y la p del teorema son, una vez más, las de la ecuación escrita en la forma $[py']' + gy = f$; en muchos casos será $p \equiv 1$ (como en el ejemplo siguiente), pero en otros deberemos reescribir la ecuación].

Ej 4. $(P_4) \begin{cases} y'' = f(x) \\ y(0)=y(1)=0 \end{cases} \begin{cases} y'' = 0 \\ y(0)=y(1)=0 \end{cases}$ sólo lo satisface $y \equiv 0$.

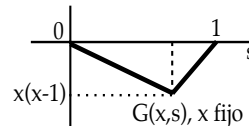
Por tanto, (P_4) tiene solución única. Hallemos su función de Green:

La solución general de la ecuación homogénea es $y = c_1 + c_2x$.

De la primera condición de contorno $y(0)=c_1=0$. Podemos tomar $y_1=x$.

De la segunda, $y(1) = c_1+c_2 = 0$. Elegimos $y_2=x-1$. Entonces:

$$|W|(x) = \begin{vmatrix} x & x-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad p(x) = 1, \quad G(x, s) = \begin{cases} s(x-1), & 0 \leq s \leq x \\ x(s-1), & x \leq s \leq 1 \end{cases}$$



Si, por ejemplo, $f(x)=1$, la solución de (P_4) viene dada por:

$$y(x) = \int_0^1 G(x, s) 1 ds = (x-1) \int_0^x s ds + x \int_x^1 (s-1) ds = \frac{1}{2}[x^2 - x]$$

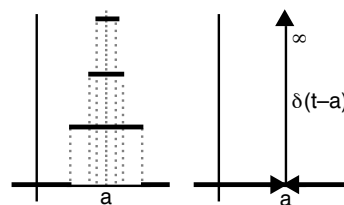
Para resolver un problema con una f dada, calcular la G puede ser un rodeo inútil. Por ejemplo, la última solución se podría obtener:

$$y'' = 1 \rightarrow y = c_1 + c_2x + \frac{1}{2}x^2 \rightarrow \begin{cases} y(0)=c_1=0 \\ y(1)=c_1+c_2+\frac{1}{2}=0 \end{cases} \rightarrow y = \frac{1}{2}[x^2 - x] \text{ como antes.}$$

Pero para cada nueva f habría que volver a hallar la y_p e imponer $y(0)=y(1)=0$.

Las funciones de Green están muy ligadas a la 'función' δ , cuya definición rigurosa exige la llamada 'teoría de las distribuciones', pero con la que es fácil trabajar formalmente. La $\delta(t-a)$ se puede definir intuitivamente como el 'límite' cuando $n \rightarrow \infty$ de

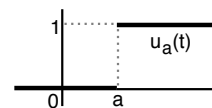
$$f_n(t) = \begin{cases} n & \text{si } t \in [a - \frac{1}{2n}, a + \frac{1}{2n}] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$



Esta $\delta(t-a)$ tiene las siguientes propiedades (que bastan para trabajar con ella):

$$\delta(t-a) = 0 \text{ si } t \neq a; \quad \int_b^c f(t) \delta(t-a) dt = \begin{cases} f(a) & \text{si } a \in [b, c] \\ 0 & \text{si } a \notin [b, c] \end{cases};$$

$$\delta(t-a) = \frac{d}{dt} u_a(t), \text{ donde } u_a(t) \text{ es la función paso } u_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ 1 & \text{si } t \geq a \end{cases}.$$



Volvamos a la G . Observemos que la $G(x, s)$ del Ej 4 para x fijo (o para s fijo, pues G es simétrica) es continua pero no derivable en $s=x$ y su 'derivada' segunda es $\delta(s-x)$. De hecho, esto es lo que sucede en general:

Teor 5. $G(x, s)$ es la solución para $x \in (a, b)$ fijo de $\begin{cases} [p(s)y']' + g(s)y = \delta(s-x) \\ \alpha y(a) - \alpha' y'(a) = \beta y(b) + \beta' y'(b) = 0 \end{cases}$

$$[\text{La prueba es trivial: } \int_a^b G(s, u) \delta(u-x) du = G(s, x) = G(x, s)].$$

Podríamos hallar la G del (P_4) siguiendo este camino más largo [pero que es el que se generaliza a las EDPs; además da una forma de hallar la G en problemas autoadjuntos para los que no es válida la fórmula del teorema 4]. Como es $G''=0$ si $s \neq x$:

$$G(s) = \begin{cases} c_1 + c_2s, & y(0)=0 \rightarrow y = c_2s, \quad s \leq x \\ k_1 + k_2s, & y(1)=0 \rightarrow y = k_2[s-1], \quad s \geq x \end{cases}$$

Y como $G''=\delta$, ha de ser continua G y su derivada tener un salto en x de magnitud unidad:

$$\rightarrow \begin{cases} y(x^-) = c_2x = k_2[x-1] = y(x^+) \\ y'(x^+) - y'(x^-) = k_2 - c_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_2 = x-1 \\ k_2 = x \end{cases}$$

Se puede resolver de otra forma si se conoce la transformada de Laplace. Con la notación $L[G(s)] = H(p)$, para este ejemplo basta utilizar las siguientes propiedades de la L :

$$L[G^{(n)}(s)] = p^n H(p) - p^{n-1} H(0) - p^{n-2} H'(0) - \dots - H^{(n-1)}(0).$$

$$L[s^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad L[\delta(s-a)] = e^{-ap}, \quad L^{-1}[e^{-ap} F(p)] = u_a(s) [L^{-1}F](s-a).$$

Llamando $G'(0)=c$, y aplicando la transformada:

$$p^2 H(p) - c = e^{-xp} \rightarrow H(p) = \frac{c}{p^2} + \frac{e^{-xp}}{p^2} \rightarrow G(s) = cs + u_x(s)(s-x)$$

$$\rightarrow G(1) = c + 1 - x = 0 \rightarrow G(s) = (x-1)s + u_x(s)(s-x) = \begin{cases} s(x-1), & 0 \leq s \leq x \\ sx - s + s - x, & x \leq s \leq 1 \end{cases}.$$