

### 3. Separación de variables

El capítulo está dedicado a uno de los más viejos métodos de resolución de EDPs lineales (método de separación de variables) que nos permitirá hallar la solución (en forma de serie de Fourier) de gran parte de los problemas clásicos planteados en el capítulo 1, en concreto de los planteados en un **intervalo finito** en una de las variables. Resolveremos la ecuación del calor con diferentes condiciones de contorno, la de la cuerda acotada (que volveremos a ver en 4.1), la de Laplace en un rectángulo y en un círculo,... Ello será posible porque las ecuaciones serán 'separables' y los dominios que consideraremos son simples, pero hay muchos problemas no resolubles por este método.

En la sección 3.1 resolveremos varios problemas para las ecuaciones del **calor** y de **ondas** en dos variables. Comenzaremos tratando los **problemas homogéneos** (aquellos en que son homogéneas ecuación y condiciones de contorno; si estas no lo son, haremos un cambio de variable). Básicamente esta será la técnica utilizada: buscaremos soluciones de la EDP que sean productos de funciones de cada variable  $[u(x, t) = X(x)T(t)]$  y que cumplan todas las condiciones homogéneas; obtendremos infinitas soluciones de ese tipo resolviendo un problema de Sturm-Liouville y otra EDO; construiremos una serie a partir de ellas  $[u(x, t) = \sum c_n X_n(x)T_n(t)]$ , cuyos coeficientes  $c_n$  se fijarán imponiendo las condiciones iniciales aún no utilizadas (basta para ello desarrollar funciones dadas en serie de autofunciones del problema de Sturm-Liouville citado). La presencia de series en el proceso anterior exigiría justificar las cuestiones relativas a su convergencia, pero nosotros no entraremos en ello. Pasaremos después a abordar los **problemas no homogéneos**, buscando también una serie solución. Probaremos en la ecuación una serie cuyos términos serán **productos de las autofunciones del problema homogéneo por funciones a determinar de la otra variable**. Resolviendo la familia infinita resultante de EDOs lineales no homogéneas con las condiciones que se deducen de las condiciones iniciales, se obtendrá la solución (formal) del problema.

En 3.2 utilizaremos la separación de variables para resolver problemas para la ecuación de **Laplace** (homogénea y no homogénea) tanto en coordenadas rectangulares como en polares y tanto para problemas de Dirichlet, como de Neumann, como mixtos. En cartesianas el problema de Sturm-Liouville a resolver será en  $x$  o en  $y$  según convenga, pero en polares será en la  $\theta$  (preferible al de la ecuación de Euler que aparecería para la  $r$ ). Las condiciones adicionales a imponer a la otra variable serán aquí de contorno. De las soluciones en forma de serie deduciremos fórmulas como la integral de Poisson, que da la solución del problema de Dirichlet en el círculo (otra forma de llegar a ella la veremos en 3.4).

En la sección 3.3 extenderemos el método de separación de variables a algunos problemas para ecuaciones en **tres variables**. La técnica será muy parecida una vez definidas las **series de Fourier dobles**. Simplemente habrá que resolver dos (en vez de uno) problemas de Sturm-Liouville. Veremos ejemplos en que aparecen de forma natural los polinomios de **Legendre** y las funciones de **Bessel**.

En 3.4 generalizaremos las **funciones de Green**, vistas en 2.3 tratando problemas de contorno para EDOs no homogéneas, para resolver **Laplace** en recintos sencillos (forma alternativa a la separación de variables). Seguiremos un camino poco formal (utilizando la delta de Dirac como si fuera una función) que abrevia los cálculos. Utilizaremos el llamado **método de las imágenes**, introduciendo el concepto de **solución fundamental** (función  $v$  tal que  $\Delta v = \delta$ ) que es básico en estudios más avanzados de EDPs.

### 3.1. Separación de variables para calor y ondas

Consideremos varios problemas para la **ecuación del calor**. En el primero suponemos que los extremos de la varilla se mantienen a 0 grados y que los datos iniciales vienen dados por una  $f$  que es  $C^1$  a trozos en  $[0, L]$ :

$$\text{Sea } [P_1] \begin{cases} u_t - k u_{xx} = 0, & x \in (0, L), t > 0 & [1] \\ u(x, 0) = f(x) & & [2] \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & & [3] \end{cases}$$

**Busquemos soluciones de la forma**  $u(x, t) = X(x)T(t)$ . Debe ser entonces:

$$XT' - kX''T = 0, \text{ es decir, } \frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT} \quad (\text{mejor que } \frac{kX''}{X} = \frac{T'}{T}).$$

Como el primer miembro es función sólo de  $x$  y el segundo lo es sólo de  $t$  ambos deben ser iguales a una constante:

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{k} \frac{T'}{T} = -\lambda \quad (\text{ponemos } -\lambda \text{ para que nos quede la ecuación habitual}).$$

$$\text{Así obtenemos una EDO para } X(x) \text{ y otra para } T(t): \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 & [4] \\ T' + \lambda k T = 0 & [5] \end{cases}$$

El producto de una solución de [4] por una de [5] es entonces una solución de [1], cualquiera que sea  $\lambda$ . Sin embargo, nos interesan sólo las soluciones que satisfacen las condiciones de contorno:

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

(si fuese  $T(t) \equiv 0$  tendríamos  $u \equiv 0$  y no se cumpliría la condición inicial).

$$\text{Análogamente, debe ser } X(L) = 0.$$

Nos interesan, pues, las soluciones (no triviales) del problema de Sturm-Liouville:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad X_n = \left\{ \sin \frac{n\pi x}{L} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

[Si el intervalo para la  $x$  fuese no acotado, no saldría un problema de contorno de los de 2.1; se acudiría entonces a la transformada de Fourier de 3.3].

Llevando estos valores de  $\lambda$  a la ecuación [5] obtenemos:

$$T' = -\frac{kn^2 \pi^2}{L^2} T \rightarrow T_n = \left\{ e^{-kn^2 \pi^2 t / L^2} \right\}.$$

Hemos deducido hasta ahora que para cada  $n$  las funciones

$$u_n(x, t) = \left\{ e^{-kn^2 \pi^2 t / L^2} \sin \frac{n\pi x}{L} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

son soluciones de [1] que satisfacen también las condiciones de contorno [3]. Por la linealidad de la ecuación y de las condiciones, sabemos que una combinación lineal finita de estas  $u_n$  también cumple [1] y [3]. Pero consideremos la serie infinita:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-kn^2 \pi^2 t / L^2} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad [6]$$

y supongamos que converge y que satisface también [1] y [3]. Si queremos que además se cumpla la condición inicial [2] debe ser:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} = f(x) \Rightarrow c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad [7]$$

pues la serie es precisamente la serie de Fourier en senos en  $[0, L]$  de  $f$ .

Tenemos una posible solución de [P<sub>1</sub>]: la serie [6] con coeficientes dados por [7]. Pero esta solución es sólo formal mientras no se pruebe que la convergencia de la serie es suficientemente buena para asegurar que realmente cumple el problema (una suma infinita de funciones derivables podría ser no derivable). Si  $f$  es  $C^1$  a trozos, se puede probar que converge en  $[0, L] \times (0, \infty)$  y que  $u_t$  y  $u_{xx}$  se pueden calcular derivando término a término (y así se satisface la ecuación). De hecho, se ve que **la  $u$  definida por la serie es  $C^\infty$  en  $(0, L) \times (0, \infty)$** . En  $x=0$  y  $x=L$  está claro que la  $u$  se anula. Y la **condición inicial** se satisface en el siguiente sentido: la  $u(x, t)$  definida por la serie para  $t > 0$  y por  $u(x, 0) = f(x)$  es una función continua salvo en los puntos de  $t=0$  en que la  $f$  es discontinua.

[Aunque  $f$  sea discontinua, la solución es  $C^\infty$  para  $t > 0$  arbitrariamente pequeño: a diferencia de lo que ocurrirá con las ondas, las discontinuidades desaparecen aquí instantáneamente].

Como cada  $u_n \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$  y es buena la convergencia, se tiene:  $u(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \quad \forall x \in [0, L]$   
**(la barra tiende a ponerse a 0 grados, como era de esperar).**

Suponemos ahora que las condiciones de contorno son no homogéneas:

$$[P_2] \begin{cases} u_t - k u_{xx} = 0, & x \in (0, L), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u(0, t) = T_1, u(L, t) = T_2, & T_1, T_2 \text{ constantes} \end{cases}$$

**Comenzaremos haciendo las condiciones de contorno homogéneas.**

Una  $v(x)$  que las satisface es la recta:  $v = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{x}{L}$ .

Haciendo  $w = u - v$ , nuestro problema se convierte en otro como el [P<sub>1</sub>]:

$$\begin{cases} w_t - k w_{xx} = 0, & x \in (0, L), t > 0 \\ w(x, 0) = f(x) - v(x) \\ w(0, t) = w(L, t) = 0 \end{cases} \quad \text{. Por tanto:}$$

$$u(x, t) = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-kn^2\pi^2 t/L^2} \sin \frac{n\pi x}{L} = v + w,$$

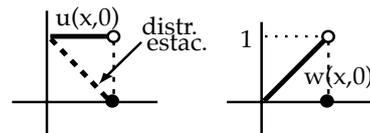
$$\text{con } c_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left[ f(x) - T_1 - (T_2 - T_1) \frac{x}{L} \right] \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Esta  $v(x)$  tiene un significado físico claro: como  $w \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ ,  $v(x)$  es la **distribución estacionaria** de temperaturas hacia la que tienden las temperaturas en la varilla, independientemente de las condiciones iniciales.

[Si  $T_1$  y  $T_2$  fuesen funciones de  $t$ , la  $v(x, t)$  definida arriba seguiría cumpliendo las condiciones de contorno, pero la ecuación para la  $w$  obtenida haciendo el cambio sería no homogénea, es decir, del tipo de las que vamos a resolver a continuación; dicha  $v$ , función de  $t$ , pierde además su significado físico].

[Si separásemos variables directamente en [P<sub>2</sub>] llegaríamos a  $X(0)T(t) = T_1$  (y otra análoga para  $x=L$ ), expresión de la que no deduciríamos nada].

**Ej 1.** 
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = 1 \\ u(0, t) = 1, u(1, t) = 0 \end{cases}$$



Operando se llega a:  $u(x, t) = 1 - x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x)$

y la distribución estacionaria hacia la que tiende es  $v(x) = 1 - x$ .

[No nos importa que para  $t=0$  sea incoherente el dato inicial con el de contorno en  $x=1$ ; la solución será, como hemos dicho, una función continua para  $t > 0$  y para el cálculo de las integrales el valor en un punto no influye].

Veamos ahora cómo resolver el **problema no homogéneo**:

$$[P_3] \begin{cases} u_t - ku_{xx} = F(x, t), & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

(Tomamos  $L = \pi$  para abreviar las expresiones, pero no se pierde generalidad pues un sencillo cambio de variable lleva  $[0, L]$  a  $[0, \pi]$ ).

Aunque no es necesario, descomponemos  $[P_3]$  en dos subproblemas  $[P_1]$  y  $[P_F]$ , el primero con  $F=0$  (ya resuelto) y el otro con  $f=0$ :

$$[P_F] \begin{cases} u_t - ku_{xx} = F(x, t), & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

Las autofunciones del  $[P_1]$  eran  $\{\sin nx\}$ ,  $n=1, 2, \dots$ . Probamos en  $[P_F]$  la siguiente serie que ya satisface las condiciones de contorno (y que está relacionada con la ecuación):

$$u_F(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin nx \quad \text{con las } T_n(t) \text{ funciones a determinar.}$$

[Si tomásemos  $T_n = c_n e^{-kn^2 t}$ , funciones que aparecieron resolviendo  $[P_1]$ , la  $u$  satisfaría la ecuación con  $F \equiv 0$ ; debemos darle más libertad a las  $T_n$  para conseguir al meter la serie en la ecuación una  $F \neq 0$ ].

Suponiendo que la serie se puede derivar término a término:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [T'_n(t) + kn^2 T_n(t)] \sin nx = F(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \sin nx$$

$$\text{con } B_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(x, t) \sin nx \, dx \quad (\text{desarrollo de } F \text{ en senos para } t \text{ fijo}).$$

Entonces para cada  $n$  debe ser:  $T'_n + kn^2 T_n = B_n(t)$ .

Y del dato inicial:  $u_F(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin nx = 0$  deducimos  $T_n(0) = 0$ .

Resolviendo la EDO lineal para  $T_n$  con este dato inicial (utilizando la fórmula de variación de las constantes con datos iniciales; para una  $F$  concreta a lo mejor hay métodos más rápidos) hallamos la  $T_n$  y por tanto:

$$u_F(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_0^t e^{-kn^2(t-s)} B_n(s) \, ds \right] \sin nx$$

Serie que es solución formal de  $[P_F]$  (como siempre faltaría comprobar que es solución de verdad, que es realmente lo que sucede si la  $F$  es decente).

La solución  $u$  de  $[P_3]$  (por la linealidad de la ecuación y las condiciones iniciales y de contorno) será la suma de  $u_F$  y de la serie solución de  $[P_1]$  que obtuvimos anteriormente.

[Si hubiésemos abordado directamente la búsqueda de la solución de  $[P_2]$  sin descomponerlo en dos, la única diferencia sería que las condiciones iniciales  $T_n(0)$ , en vez de ser 0, serían los coeficientes del desarrollo en senos de  $f(x)$ , es decir, deberíamos resolver los problemas de valores iniciales

$$\begin{cases} T'_n + kn^2 T_n = B_n(t) \\ T_n(0) = c_n \end{cases}, \quad \text{con } c_n = \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx ]$$

[Si las condiciones de contorno de  $[P_3]$  fuesen no homogéneas empezáramos como en  $[P_2]$  con un cambio  $w = u - v$  para conseguir que lo fuesen].

Resolvemos ahora el problema homogéneo para la varilla con **extremos aislados**:

$$[P_4] \begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0, & x \in (0, L), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0 \end{cases}$$

Separando variables (es la misma ecuación) aparecen, claro, las mismas EDOs del problema [P<sub>1</sub>]. Pero ahora cambian las condiciones de contorno de la X:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(L) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad n=0, 1, 2, \dots, \quad X_n = \left\{ \cos \frac{n\pi x}{L} \right\} \quad [X_0 = \{1\}] .$$

Para estos valores de  $\lambda$  se tienen las  $T_n = \{e^{-kn^2 \pi^2 t / L^2}\} \quad [T_0 = \{1\}] .$

Así pues, probamos la serie: 
$$u(x, t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-kn^2 \pi^2 t / L^2} \cos \frac{n\pi x}{L}$$

Queremos que se satisfaga la condición inicial:  $u(x, 0) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{L} = f(x) .$

Los  $c_n$  desconocidos serán los coeficientes de la serie de Fourier en cosenos de  $f$ :

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Observemos que de nuevo la solución se puede interpretar como la suma de una distribución de temperaturas estacionaria [ $c_0/2$ ] y una distribución transitoria que tiende a 0 cuando  $t \rightarrow \infty$ . Era esperable que toda la varilla (aislada) tendiese a la misma temperatura y que esta fuese el valor medio de las temperaturas iniciales:

$$\frac{c_0}{2} = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx$$

Si las condiciones de contorno hubiesen sido  $u_x(0, t) = F_0, u_x(L, t) = F_L$  (flujo constante dado en los extremos), no se puede encontrar una  $v(x)$  que sea una recta (en general) y, al hacer  $w = u - v$ , la ecuación en  $w$  que resulta es no homogénea.

Para resolver un problema no homogéneo con estas condiciones en la  $u_x$ , probaríamos la serie construida con las autofunciones que hemos hallado:

$$u_F(x, t) = T_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cos \frac{n\pi x}{L},$$

y resolveríamos las EDOs que surgirían, con los datos iniciales deducidas del dato inicial de la EDP.

**Ej 2.** 
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u_x(0, t) = 0, u_x(1, t) = 2 \end{cases}$$
 Tanteando con  $v = Ax^2 + Bx$  obtenemos que  $v = x^2$  cumple las condiciones de contorno. Y haciendo  $w = u - x^2$  se tiene el problema:

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} = 2 \\ w(x, 0) = -x^2 \\ w_x(0, t) = w_x(1, t) = 0 \end{cases} \rightarrow w = T_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cos n\pi x \rightarrow T_0' + \sum_{n=1}^{\infty} [T_n' + n^2 \pi^2 T_n] \cos n\pi x = 2$$

[función que ya está desarrollada en cosenos].

Como:  $T_0(0) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \cos n\pi x = -x^2 = -\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x$ , con  $a_n = -2 \int_0^1 x^2 \cos n\pi x dx$ ,

integrando y resolviendo:  $\begin{cases} T_0' = 2 \\ T_0(0) = -\frac{1}{3} \end{cases}, \begin{cases} T_n' + n^2 \pi^2 T_n = 0 \\ T_n(0) = c_n \end{cases}$ , se llega a

$$u(x, t) = 2t + x^2 - \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{-n^2 \pi^2 t} \cos n\pi x$$

[ $u \rightarrow \infty$  pues por el extremo derecho estamos constantemente metiendo calor: su flujo va en sentido opuesto al gradiente de temperaturas].

En el quinto problema para la ecuación del calor que tratamos la condición de  $x=0$  representa la radiación libre hacia un medio a 0 grados (el flujo de calor es proporcional a la temperatura en  $x=0$ ; si es positiva el calor sale y entra si es negativa). En  $x=1$  fijamos el flujo de calor que entra en la varilla (al ser  $u_x > 0$  el flujo es hacia la izquierda).

$$[P_5] \begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0, & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_x(0, t) - au(0, t) = 0, & a > 0 \\ u_x(1, t) = 1 \end{cases}$$

Vimos en 1.3 que tiene solución única. Para resolverlo lo primero, como siempre, es conseguir condiciones de contorno homogéneas.

Tanteando con rectas  $v = Mx + N$ , se llega a que  $v = x + \frac{1}{a}$  las satisface.

$$w = u - v \rightarrow \begin{cases} w_t - kw_{xx} = 0 \\ w(x, 0) = f(x) - x - \frac{1}{a} \\ w_x(0, t) - aw(0, t) = w_x(1, t) = 0 \end{cases}$$

Separando variables se llega a  $T' + \lambda kT = 0$  y al problema de contorno:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) - aX(0) = X'(1) = 0 \end{cases} \quad \text{que sabemos que no tiene autovalores } < 0.$$

Si  $\lambda = 0$ :  $X = c_1 + c_2x \rightarrow \begin{cases} c_2 - ac_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda = 0$  no autovalor.

Si  $\lambda > 0$ :  $X = c_1 \cos wx + c_2 \sin wx$ ,  $w = \sqrt{\lambda} \rightarrow \begin{cases} c_2 w - ac_1 = 0 \\ c_2 \cos w - c_1 \sin w = 0 \end{cases} \rightarrow c_2 = \frac{a}{w} c_1$

$$\rightarrow c_1(a \cos w - w \sin w) = 0 \rightarrow \tan w = \frac{a}{w}.$$

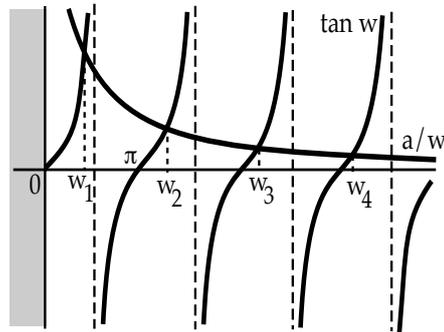
Esta ecuación trascendente no se puede resolver pero está claro que hay infinitos  $\lambda_n = w_n^2 > 0$  (aproximables numéricamente).

Las autofunciones se podrían poner:

$$\left\{ \cos w_n x + \frac{a}{w_n} \sin w_n x \right\},$$

pero quedan más compactas en la forma:

$$X_n = \{ \cos w_n(x-1) \}.$$



Yendo a la ecuación en  $T$ :  $T_n = \{e^{-\lambda_n kt}\} \rightarrow w = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n kt} X_n(x)$ .

Imponiendo el dato inicial se determinan los  $c_n$  [son aproximados al serlo los  $\lambda_n$ ]:

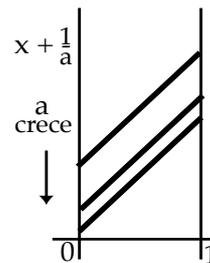
$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x) = f(x) - x - \frac{1}{a} \rightarrow c_n = \frac{4w_n}{2w_n + \sin 2w_n} \int_0^1 \left[ f(x) - x - \frac{1}{a} \right] X_n(x) dx,$$

$$\text{pues } \int_0^1 [X_n(x)]^2 dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{4w_n} \left[ \sin 2w_n(x-1) \right]_0^1.$$

Sí es calculable exactamente la distribución estacionaria hacia la que tienden las temperaturas en la varilla:

$$u(x, t) = w(x, t) + x + \frac{1}{a} \rightarrow x + \frac{1}{a} \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty$$

[la temperatura final de la varilla, como era esperable, es menor cuanto mayor sea el  $a$ , es decir, cuanto más fuertemente irradie su extremo].



Dos ejemplos más de separación de variables para el calor (o similar). El primero nos sirve para reflexionar sobre los cambios que hacen las condiciones de contorno homogéneas (siempre necesario) y en el otro vemos que se puede aplicar el método en otras ecuaciones separables (y no sólo en la del calor).

**Ej 3.** 
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = 1 \\ u_x(0, t) = 0, u(\pi, t) = e^{-t} \end{cases}$$
 Una  $v$  que cumple las condiciones de contorno salta a la vista:  $v(t) = e^{-t}$ . Haciendo  $u = v + w$ :

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} = e^{-t} \\ w(x, 0) = w_x(0, t) = w(\pi, t) = 0 \end{cases} \quad \text{[problema no homogéneo].}$$

Necesitamos conocer las autofunciones de homogéneo para saber qué tipo de solución probar. Ya sabemos que al separar variables en el calor aparece  $X'' + \lambda X = 0$  (además de  $T' + \lambda T = 0$  que ahora mismo no nos importa). Esto, unido a las condiciones que salen de los datos de contorno  $X'(0) = X(\pi) = 0$  (problema conocido en 2.2), nos lleva a:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cos\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right) \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left[ T_n' + \frac{(2n-1)^2}{4} T_n \right] \cos\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right) = e^{-t} \rightarrow$$

$$\begin{cases} T_n' + \frac{(2n-1)^2}{4} T_n = B_n e^{-t} \\ T_n(0) = 0 \text{ (del dato inicial)} \end{cases}, \text{ con } B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right) dx = \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(2n-1)}.$$

Resolvemos la EDO lineal mediante coeficientes indeterminados:  $T_{np} = A e^{-t} \rightarrow$

$$T_n = C e^{-(2n-1)^2 t/4} + \frac{4B_n e^{-t}}{(2n-1)^2 - 4} \xrightarrow{T_n(0)=0} T_n(t) = \frac{16(-1)^{n+1}}{\pi(2n-3)(2n-1)(2n+1)} \left[ e^{-t} - e^{-(2n-1)^2 t/4} \right].$$

¿Podríamos encontrar una  $v$  mejor que no estropee la homogeneidad de la ecuación? Buscamos  $v(x, t)$  que también la satisfaga. Al separar variables se ve que  $\forall A, B$  es solución:  $v = e^{-t}(A \cos x + B \sin x)$ . Imponiendo a esta  $v$  los datos de contorno:

$$v = -e^{-t} \cos x \xrightarrow{u=v+w} \begin{cases} w_t - w_{xx} = 0 \\ w(x, 0) = 1 + \cos x \\ w_x(0, t) = w(\pi, t) = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{[problema homogéneo y,} \\ \text{por tanto, más sencillo]} \end{array} \rightarrow$$

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(2n-1)^2 t/4} \cos\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right) \rightarrow w(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right) = 1 + \cos x \rightarrow$$

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1 + \cos x) \cos\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right) dx = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{2(-1)^{n+1}}{2n-1} + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \frac{(-1)^n}{2n-3} \right].$$

[Evidentemente se podría ver que ambas soluciones coinciden].

**Ej 4.** 
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + 2u = 0, & x \in (0, \frac{\pi}{2}), t > 0 \\ u(x, 0) = \cos 5x \\ u_x(0, t) = u(\frac{\pi}{2}, t) = 0 \end{cases}$$
 [El término  $+2u$  representa una pérdida de calor al medio a lo largo de la varilla].

Separando variables:  $u(x, t) = X(x)T(t) \rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} + 2 = -\lambda$  [damos el 2 mejor a la  $T$ ]  $\rightarrow$

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ T' + (2 + \lambda)T = 0 \end{cases} \text{ y de los datos de contorno: } \begin{array}{l} u_x(0, t) = X'(0)T(t) = 0 \rightarrow X'(0) = 0 \\ u(\frac{\pi}{2}, t) = X(\frac{\pi}{2})T(t) = 0 \rightarrow X(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = (2n-1)^2, n = 1, 2, \dots, X_n = \{ \cos(2n-1)x \}$$

$$\rightarrow T' = -(2 + \lambda_n)T \rightarrow T_n = \{ e^{-[2+(2n-1)^2]t} \}$$

Probamos pues:  $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-[2+(2n-1)^2]t} \cos(2n-1)x$ .

Y, por el dato inicial:  $u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(2n-1)x = \cos 5x \rightarrow c_3 = 1$  y los otros 0.

Así pues:  $u(x, t) = e^{-27t} \cos 5x$ .

[Muy parecido a como lo probamos para el calor, se ve que esta solución es única; o bien, haciendo  $u = e^{-2t}w$  se obtiene un problema para la ecuación del calor con esos mismos datos, problema cuya unicidad ya demostramos].

Resolvamos el problema para la **cuerda vibrante** con **extremos fijos** (en 4.1 lo resolveremos extendiendo los datos y aplicando la fórmula de D'Alembert):

$$[P_6] \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x \in [0, L], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x) \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \end{cases}$$

Separando variables  $u = X(x)T(t)$  e imponiendo los datos de contorno obtenemos:

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} = -\lambda \rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & X(0) = X(L) = 0 \\ T'' + \lambda c^2 T = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, X_n = \left\{ \sin \frac{n\pi x}{L} \right\}_{n=1, 2, \dots}$$

Las  $T_n$  correspondientes son combinaciones lineales de  $\sin \frac{n\pi ct}{L}$  y  $\cos \frac{n\pi ct}{L}$ .

Así, funciones de la forma:  $u_n(x, t) = \left[ k_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + c_n \sin \frac{n\pi ct}{L} \right] \sin \frac{n\pi x}{L}$ ,  $n=1, 2, \dots$

satisfacen la EDP y las condiciones de contorno. Probamos, pues:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ k_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + c_n \sin \frac{n\pi ct}{L} \right] \sin \frac{n\pi x}{L}$$

con  $k_n$  y  $c_n$  constantes. Para que se cumplan las condiciones iniciales:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \sin \frac{n\pi x}{L} = f(x) \rightarrow k_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, n=1, 2, \dots$$

y suponiendo que la serie se puede derivar término a término:

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} = g(x) \rightarrow c_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, n=1, 2, \dots$$

pues  $\frac{n\pi c}{L} c_n$  son los coeficientes del desarrollo de  $g$  en senos.

Tenemos una solución, formal en principio, aunque se prueba que las series convergen y satisfacen realmente el problema si  $f$  y  $g$  cumplen las condiciones que pediremos en 4.1: si sus extensiones impares respecto a 0 y  $L$  son  $C^2$  y  $C^1$ , respectivamente (si  $f$  ó  $g$  no son tan regulares la serie solución representará lo que llamaremos una solución débil; en las ondas no desaparecen las discontinuidades).

Para algunas cuestiones (valores concretos, dibujos, ...) será mejor usar D'Alembert, pero se ven mejor otras propiedades en la serie. Por ejemplo, como cada  $u_n$  es  $2L/c$ -periódica en  $t$ , también  $u$  tiene este periodo. Observemos además que la solución aparece como combinación infinita de 'modos naturales de vibración' [ $\sin(n\pi x/L)$ ] cada uno de los cuales vibra con una frecuencia  $n\pi c/L$  ('frecuencias naturales' de la cuerda). En términos acústicos  $u_1$  da el tono fundamental (su frecuencia es  $\pi c/L$ ) y los demás son los 'armónicos' (de frecuencia múltiplo de la anterior).

Ej 5.  $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = x, & x \in [0, \pi], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases} \rightarrow u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin nx$

Esta serie ya se anula en  $x=0$  y  $x=\pi$ . Además debe cumplirse:

$$T_n'' + n^2 T_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = \frac{2[-1]^{n+1}}{n} \rightarrow T_n = c_1 \cos nt + c_2 \sin nt + \frac{2[-1]^{n+1}}{n^3}.$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \rightarrow T_n(0) = T_n'(0) = 0 \rightarrow u(x, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[-1]^{n+1}}{n^3} [1 - \cos nt] \sin nx.$$

De otra forma: podríamos conseguir un problema homogéneo hallando una solución de la ecuación  $v(x)$  que cumpla las condiciones de contorno:

$$-v'' = x \rightarrow v = c_1 + c_2 x - \frac{1}{3} x^3 \xrightarrow{v(0)=v(\pi)=0} v = \frac{1}{3} (\pi^2 x - x^3).$$

Con  $w = u - v$ , acabamos en  $[P_6]$ , con  $f(x) = \frac{1}{3} (x^3 - \pi^2 x)$  y  $g(x) = 0$ .

[Se podrían imponer otros tipos de condiciones de contorno (como las del calor) a la cuerda vibrante (y se resolverían los problemas separando variables). La condición  $u_x = 0$  significa que el extremo de la cuerda se mueve con libertad verticalmente y  $u_x - au = 0$  ó  $u_x + bu = 0$  indican que el extremo está unido por un muelle al punto de anclaje].

Hasta ahora la EDO del problema de Sturm-Liouville siempre ha sido  $X'' + \lambda X = 0$ , y, por eso, las series de Fourier eran todas con peso  $r(x) = 1$ . Pero para otras EDPs similares a calor y ondas, o para estas ecuaciones en el plano o el espacio y coordenadas no cartesianas, surgen otras ecuaciones ordinarias y es necesario manejar la teoría más general del capítulo 2. Los problemas en más variables se verán en 3.3, pero podemos resolver ya alguno si se reduce a uno de 2 variables.

Por ejemplo, la ecuación de ondas  $u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$  en recintos esféricos lleva, en general, a una EDP en 4 variables (el tiempo  $t$  y las variables esféricas  $r, \theta, \phi$ ), cuyas soluciones quedarían determinadas (como en la recta) fijando unos datos de contorno y un par de condiciones iniciales. Pero si buscamos sólo sus soluciones independientes de los ángulos aparece la **ecuación de ondas en el espacio con simetría radial** (en 2 variables). En concreto, vamos a resolver aquí el siguiente problema homogéneo (vibraciones entre dos superficies esféricas):

$$[P_7] \begin{cases} u_{tt} - u_{rr} - \frac{2}{r}u_r = 0, & 1 \leq r \leq 2, t \in \mathbf{R} \\ u(r, 0) = f(r), \quad u_t(r, 0) = g(r) \\ u(1, t) = u(2, t) = 0 \end{cases}$$

Separando variables:  $u(r, t) = R(r)T(t) \rightarrow \frac{R'' + \frac{2R'}{r}}{R} = \frac{T''}{T} = -\lambda \rightarrow \begin{cases} rR'' + 2R' + \lambda rR = 0 \\ T'' + \lambda T = 0 \end{cases}$

Las condiciones de contorno imponen:  $R(1) = R(2) = 0$ .

Vimos la ecuación de  $R$  en 2.2 (allí asociada a un problema singular, aquí es regular pues estamos en el intervalo  $[1, 2]$ ). Se resolvía haciendo el cambio de variable:

$$S = rR \rightarrow \begin{cases} S'' + \lambda S = 0 \\ S(1) = S(2) = 0 \end{cases} \xrightarrow{r=s+1} \begin{cases} S'' + \lambda S = 0 \\ S(0) = S(1) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda_n = n^2 \pi^2, n = 1, 2, \dots \\ S_n = \{\sin n\pi s\} \end{cases} \rightarrow R_n = \left\{ \frac{\sin n\pi r}{r} \right\}$$

Y para esos valores de  $\lambda$  las soluciones para  $T$  son  $T_n = \{\cos n\pi t, \sin n\pi t\}$ .

Probamos, pues: 
$$u = \sum_{n=1}^{\infty} [k_n \cos n\pi t + c_n \sin n\pi t] \frac{\sin n\pi r}{r} .$$

Las condiciones iniciales imponen:  $\sum_{n=1}^{\infty} k_n \frac{\sin n\pi r}{r} = f(r)$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} n\pi c_n \frac{\sin n\pi r}{r} = g(r)$ .

Para hallar los coeficientes del desarrollo de una función en las autofunciones  $R_n(r)$  debemos utilizar el peso del problema de Sturm-Liouville:  $[r^2 R']' + \lambda r^2 R = 0$ .

Como  $(R_n, R_n) = \int_1^2 r^2 \frac{\sin^2 n\pi r}{r^2} dr = \frac{1}{2}$  y  $(f, R_n) = \int_1^2 r^2 f(r) \frac{\sin n\pi r}{r} dr$ , concluimos que:

$$k_n = 2 \int_1^2 r f(r) \sin n\pi r dr \quad \text{y} \quad c_n = \frac{2}{n\pi} \int_1^2 r g(r) \sin n\pi r dr .$$

Evidentemente se llegaría a lo mismo (aquí es mucho más corto, pero otras veces no podremos hacer estos atajos) observando que las condiciones deducidas de las iniciales se podrían haber reescrito así:

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_n \sin n\pi r = r f(r) \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n\pi c_n \sin n\pi r = r g(r) .$$

De hecho, todo el problema se hubiera simplificado notablemente si hubiéramos utilizado inicialmente el cambio de variable que sugieren los cálculos anteriores:

$$u = \frac{v}{r} \rightarrow \begin{cases} v_{tt} - v_{rr} = 0 \\ v(r, 0) = r f(r), \quad v_t(r, 0) = r g(r) , \quad \text{problema casi igual al de la página anterior.} \\ v(1, t) = v(2, t) = 0 \end{cases}$$

[Las ondas en **plano** con simetría radial satisfacen  $u_{tt} - u_{rr} - \frac{1}{r}u_r = 0$  y la ecuación en  $R$  es  $rR'' + R' + \lambda rR = 0$ , que (lo vimos en 2.2) está asociada a las funciones de **Bessel**].

Acabamos la sección con algunas reflexiones sobre cambios de variable y descomposición en subproblemas que generalicen las ideas que hemos utilizado. Los problemas clásicos que vimos en 1.3 estaban formados por una ecuación lineal, que podemos representar, si es no homogénea, por  $L[u]=F$ , con  $L$  **lineal** (es decir,  $L[au_1+bu_2]=aL[u_1]+bL[u_2]$ ) y unas condiciones adicionales también lineales. En los que hemos resuelto por separación de variables necesariamente había un par de condiciones de contorno  $C_k[u]=h_k$  y, además una o dos condiciones iniciales.

[Cuando resolvamos ecuaciones de Laplace separando variables en la próxima sección veremos que a veces las condiciones de contorno estarán implícitas (por ejemplo en un círculo se exigirá periodicidad). Y, en vez de condiciones iniciales, aparecerán otras dos de contorno (quizás alguna no escrita explícitamente, como la acotación)].

Supongamos, por ejemplo, que son 3 las condiciones adicionales (como en el calor) y que nuestro problema es de la forma:

$$[P] \begin{cases} L[u] = F \\ M[u] = f \\ C_1[u] = h_1, C_2[u] = h_2 \end{cases}$$

El problema de resolver [P] puede ser reducido a resolver otros subproblemas más sencillos. Por ejemplo, si  $u_1, u_2, u_3$  y  $u_4$  son soluciones de

$$[P_1] \begin{cases} L[u] = F \\ M[u] = 0 \\ C_1[u] = 0 \\ C_2[u] = 0 \end{cases} \quad [P_2] \begin{cases} L[u] = 0 \\ M[u] = f \\ C_1[u] = 0 \\ C_2[u] = 0 \end{cases} \quad [P_3] \begin{cases} L[u] = 0 \\ M[u] = 0 \\ C_1[u] = h_1 \\ C_2[u] = 0 \end{cases} \quad [P_4] \begin{cases} L[u] = 0 \\ M[u] = 0 \\ C_1[u] = 0 \\ C_2[u] = h_2 \end{cases}$$

está claro, por la linealidad, que  $u=u_1+u_2+u_3+u_4$  es solución de [P], pero, como ya hemos observado, bastantes veces nos convendrá descomponer [P] en menos subproblemas.

En otros casos interesará convertir la ecuación en homogénea (si no hubiese condiciones de contorno, por ejemplo). Si somos capaces de encontrar una solución particular  $v$  de la ecuación ( $L[v]=F$ ), el cambio  $w=u-v$  convertirá [P] en:

$$\begin{cases} L[w] = L[u]-L[v] = 0 \\ M[w] = f - M[v] \\ C_1[w] = h_1 - C_1[v], C_2[w] = h_2 - C_2[v] \end{cases}$$

Más a menudo necesitamos hacer homogéneas las condiciones de contorno (la separación de variables y otros métodos lo exigen). Así, si lo que tenemos es una  $v$  que satisface  $C_1[v]=h_1$  y  $C_2[v]=h_2$ , haciendo, como siempre,  $w=u-v$  acabaríamos en

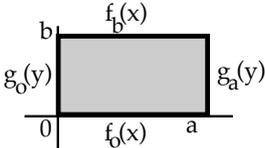
$$\begin{cases} L[w] = F - L[v] \\ M[w] = f - M[v] \\ C_1[w] = C_2[w] = 0 \end{cases}$$

Lo que ya es un lujo (pero se puede intentar buscar por el premio que nos da) es tener una  $v$  que cumpla las dos condiciones y además la ecuación (como en los ejemplos 3 y 5 de esta sección). Los problemas homogéneos siempre son más sencillos que los no homogéneos (separando variables, por ejemplo, los primeros exigen resolver sólo EDOs homogéneas, más corto que resolver las EDOs no homogéneas de los segundos).

Como vemos, hay mucha variedad en los posibles cambios. En cada caso habrá que ver cuáles nos llevan a problemas más asequibles. Si inicialmente hay condiciones homogéneas intentaremos que los cambios no las estropeen, aunque a veces no habrá más remedio.

### 3.2. Separación de variables para Laplace

Resolvamos utilizando el método de separación de variables diversos problemas para la ecuación de Laplace en recintos especialmente simples. Comenzamos por el **problema de Dirichlet en un rectángulo**, es decir:

$$[P_1] \begin{cases} \Delta u = F(x, y), \text{ en } (0, a) \times (0, b) \\ u(x, 0) = f_0(x), u(x, b) = f_b(x) \\ u(0, y) = g_0(y), u(a, y) = g_a(y) \end{cases}$$


Por ser lineales la ecuación y las condiciones, basta resolver los 5 subproblemas que se obtienen al hacer 4 de las 5 funciones que aparecen igual a 0 y sumar las 5 soluciones (de hecho, se puede descomponer en menos o hacer cambios que anulen alguno de los términos no homogéneos). Comencemos resolviendo, por ejemplo, uno de los 4 problemas para la **ecuación homogénea**:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \text{ en } (0, a) \times (0, b) \\ u(x, 0) = f_0(x) \\ u(x, b) = u(0, y) = u(a, y) = 0 \end{cases} \quad u(x, y) = X(x)Y(y) \rightarrow X''Y + XY'' = 0 \rightarrow -\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = \lambda \rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ Y'' - \lambda Y = 0 \end{cases}$$

De  $u(0, y) = u(a, y) = 0$  se deduce que  $X(0) = X(a) = 0$ , con lo que el problema de contorno para la  $X$  tiene solución no trivial si

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{a^2}, \quad X_n = \left\{ \sin \frac{n\pi x}{a} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Para esos  $\lambda_n$  es  $Y_n = c_1 e^{n\pi y/a} + c_2 e^{-n\pi y/a}$ . La condición homogénea aún no aplicada  $u(x, b) = 0$  impone  $Y(b) = 0$ . Nos interesan las  $Y_n$  que la cumplen:

$$c_2 = -c_1 e^{2n\pi b/a} \rightarrow Y_n = c_1 e^{n\pi b/a} (e^{n\pi[y-b]/a} - e^{n\pi[b-y]/a}) \rightarrow Y_n = \left\{ \text{sh} \frac{n\pi[b-y]}{a} \right\}$$

Probamos entonces:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sh} \frac{n\pi[b-y]}{a} \sin \frac{n\pi x}{a}$$

Para satisfacer la condición de contorno no homogénea que falta:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sh} \frac{n\pi b}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} = f_0(x) \rightarrow c_n \text{sh} \frac{n\pi b}{a} = \frac{2}{a} \int_0^a f_0(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx$$

Análogamente se resuelven los otros 3 subproblemas con  $F \equiv 0$  de  $[P_1]$ . En uno de ellos volvemos a tener las  $X_n$  de antes, y en los otros dos es  $Y$  (con condiciones de contorno homogéneas) la que proporciona las autofunciones  $Y_n = \left\{ \sin \frac{n\pi y}{b} \right\}$ .

[Los papeles de  $X$  e  $Y$  son intercambiables. En calor y ondas el problema de contorno siempre era para la  $X$  (las condiciones de  $T$  eran iniciales). Para Laplace en polares, aunque tanto  $R$  como  $\Theta$  tendrán condiciones de contorno, la EDO de la  $\Theta$  será más sencilla y la elegiremos siempre para obtener las autofunciones].

Para resolver el último subproblema, el de la **ecuación no homogénea**:

$$\begin{cases} \Delta u = F(x, y), \text{ en } (0, a) \times (0, b) \\ u(x, 0) = u(x, b) = u(0, y) = u(a, y) = 0 \end{cases}$$

como siempre se prueba una serie de autofunciones. Aquí hay dos posibilidades [elegiremos la que dé un desarrollo más fácil para  $F$ ]:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \sin \frac{n\pi x}{a} \quad \text{ó} \quad u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \sin \frac{n\pi y}{b}$$

[No olvidemos que con un cambio  $w = u - v$ , o resolviendo menos subproblemas se puede llegar antes la solución; lo único necesario para empezar con separación de variables es que sea  $u = 0$  en  $x = 0, a$  ó en  $y = 0, b$ ].

Si siguiendo con Laplace en cartesianas, resolvemos un **problema de Neumann**. Suponemos la ecuación no homogénea, pero con condiciones de contorno homogéneas (si no lo fuesen, procederíamos de forma similar al problema anterior).

$$[P_2] \begin{cases} \Delta u = F(x, y), & \text{en } (0, \pi) \times (0, \pi) \\ u_y(x, 0) = u_y(x, \pi) = u_x(0, y) = u_x(\pi, y) = 0 \end{cases}$$

Separando variables en la ecuación homogénea llegamos, desde luego, a las mismas ecuaciones que en [P<sub>1</sub>]:  $X'' + \lambda X = 0$ ,  $Y'' - \lambda Y = 0$ . Las condiciones de contorno obligan a que  $X'(0) = X'(\pi) = 0$ ,  $Y'(0) = Y'(\pi) = 0$ . Para este problema tenemos, pues, dos familias de autofunciones  $\{\cos nx\}$  ó  $\{\cos ny\}$ ,  $n = 0, 1, \dots$  y podemos elegir cualquiera de ella para nuestra serie. Por ejemplo:

$$u(x, y) = X_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cos ny \rightarrow$$

$$X_0'' + \sum_{n=1}^{\infty} [X_n'' - n^2 X_n] \cos ny = \frac{B_0(x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(x) \cos ny, \quad B_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(x, y) \cos ny \, dy$$

Debemos resolver los infinitos problemas de contorno para EDOs:

$$X_0'' = \frac{1}{2} B_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} F(x, y) \, dy; \quad X_n'' - n^2 X_n = B_n, \quad n \geq 1; \quad \text{con } X_n'(0) = X_n'(\pi) = 0.$$

Las  $X_n$  con  $n \geq 1$  quedan determinadas de forma única (el problema homogéneo, como sabemos desde 2.1, tiene sólo la solución trivial).

Pero  $X_0'' = 0$ ,  $X_0'(0) = X_0'(\pi) = 0$  tiene soluciones no triviales ( $\{1\}$ ), con lo que, según 2.3, para que haya solución para  $X_0$  es necesario que sea  $\int_0^{\pi} 1 \cdot B_0(x) \, dx = 0$ .

$$\text{Es decir, } [P_2] \text{ tiene solución sólo si } \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} F(x, y) \, dx \, dy = 0.$$

Y en ese caso tiene infinitas que difieren en una constante. Todo esto es coherente con lo que sabíamos sobre Neumann desde 1.3.

**Ej 1.** Calculemos la solución en el caso particular en que  $F(x, y) = x - a$ .

El problema sólo tiene solución si  $\iint_{\square} F = 0$ , es decir, si  $a = \frac{\pi}{2}$ .

Entonces nos queda  $X_0'' = x - \frac{\pi}{2}$  (por suerte, la  $F$  ya está desarrollada en  $\{\cos ny\}$ ).

Por la misma razón los  $B_n$ , y por tanto los  $X_n$ , son nulos si  $n \geq 1$ .

Integrando e imponiendo  $X_0'(0) = X_0'(\pi) = 0$  obtenemos  $u(x, y) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{\pi}{4}x^2 + C$ .

[Si resolvemos probando  $u = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(y) \cos nx$  hay que desarrollar en serie. Lo hacemos, aunque aquí sea una pérdida de tiempo. Los coeficientes de  $F = x - \frac{\pi}{2}$  en  $\cos nx$  son:

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x - \frac{\pi}{2}) \cos nx \, dx = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 0, 2, 4, \dots \\ -\frac{4}{\pi n^2}, & \text{si } n = 1, 3, \dots \end{cases}$$

$$Y_0'' + \sum_{n=1}^{\infty} [Y_n'' - n^2 Y_n] \cos nx = \sum_{m=1}^{\infty} B_{2m-1} \cos(2m-1)x \rightarrow$$

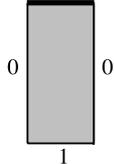
$$\begin{cases} Y_0'' = 0 \\ Y_0'(0) = Y_0'(\pi) = 0 \end{cases} \rightarrow Y_0 = C; \quad \begin{cases} Y_{2m}'' - 4m^2 Y_{2m} = 0 \\ Y_{2m}'(0) = Y_{2m}'(\pi) = 0 \end{cases} \rightarrow Y_{2m} = 0;$$

$$\begin{cases} Y_{2m-1}'' - (2m-1)^2 Y_{2m-1} = B_{2m-1} \\ Y_{2m-1}'(0) = Y_{2m-1}'(\pi) = 0 \end{cases} \rightarrow Y_{2m-1} = -\frac{B_{2m-1}}{(2m-1)^2}$$

$$\rightarrow u = C + \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2m-1)x}{(2m-1)^4}, \text{ que (salvo constante) es el desarrollo de la } u \text{ de arriba].$$

Dos ejemplos más en cartesianas. El primero para Laplace con **condiciones mixtas** (parte Dirichlet, parte Neumann). Ya dijimos en 1.3 que todos ellos tienen solución única.

**Ej 2.** 
$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, (x, y) \in (0, 1) \times (0, \pi) \\ u(x, 0) = u_y(x, \pi) = u(0, y) = 0, u(1, y) = 1 \end{cases} \quad u = X(x)Y(y) \rightarrow$$



$$\begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0, Y(0) = Y'(\pi) = 0 \\ X'' - \lambda X = 0, X(0) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = \left(\frac{2n-1}{2}\right)^2, Y_n = \left\{ \sin \frac{(2n-1)y}{2} \right\}.$$

Para esos  $\lambda$  es  $X = c_1 e^{(2n-1)x/2} + c_2 e^{-(2n-1)x/2} \xrightarrow{X(0)=0} X_n = \left\{ \text{sh} \frac{(2n-1)x}{2} \right\}.$

Probamos  $u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x) Y_n(y)$ . Imponiendo el dato  $u(1, y) = 1$  que falta:

$$c_n \text{sh} \frac{2n-1}{2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \frac{(2n-1)y}{2} dy = \frac{4}{\pi(2n-1)} \left[ 1 - \cos \frac{(2n-1)\pi}{2} \right] \rightarrow$$

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1) \text{sh} \frac{2n-1}{2}} \text{sh} \frac{(2n-1)x}{2} \sin \frac{(2n-1)y}{2}.$$

Si nos gustan más las condiciones de contorno para  $x$  podemos hacerlas homogéneas con un cambio de variable:

$$v = x, w = u - v \rightarrow \begin{cases} w_{xx} + w_{yy} = 0 \\ w(x, 0) = -x, w_y(x, \pi) = 0 \\ w(0, y) = w(1, y) = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, X(0) = X(1) = 0 \\ Y'' - \lambda Y = 0, Y'(\pi) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = n^2 \pi^2, X_n = \{ \sin n\pi x \}, Y_n = \{ \text{ch}[n\pi(\pi - y)] \}.$$

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} k_n X_n(x) Y_n(y) \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} k_n X_n(0) Y_n(y) = -x \rightarrow k_n = -\frac{2}{\text{ch}[n\pi^2]} \int_0^1 x \sin n\pi x dx$$

$$\rightarrow u(x, y) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\pi n \text{ch}[n\pi^2]} \text{ch}[n\pi(\pi - y)] \sin n\pi x$$

[que es otra expresión de la misma solución única].

En todos los problemas que hemos resuelto en este capítulo (excepto los de Neumann) la solución era única (todos eran problemas 'físicos'). Pero no olvidemos que la unicidad en EDPs es complicada, y que un problema nuevo del que no se ha demostrado la unicidad podría tenerla. Eso pasa en el siguiente ejemplo (para una ecuación de 'Helmholtz' muy asociada a los problemas de más de dos variables):

**Ej 3.** 
$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, (x, y) \in (0, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \\ u_y(x, -\frac{\pi}{4}) = u_y(x, \frac{\pi}{4}) = 0 \\ u(0, y) = 0, u(\pi, y) = \sin 2y \end{cases}$$

Como es ecuación nueva, separamos variables desde el principio:

$$u = XY \rightarrow \frac{X''}{X} + 1 = -\frac{Y''}{Y} = \lambda \rightarrow$$

$$\begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0 \\ Y'(-\frac{\pi}{4}) = Y'(\frac{\pi}{4}) = 0 \end{cases} \xrightarrow{s=y+\frac{\pi}{4}} \begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0 \\ Y'(0) = Y'(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = 4n^2, Y_n = \left\{ \cos 2n\left(y + \frac{\pi}{4}\right) \right\}, n = 0, 1, \dots$$

$$X'' + (1 - \lambda_n)X = 0, X(0) = 0 \rightarrow X_0 = \{ \sin x \} \text{ y } X_n = \{ \text{sh}(\sqrt{4n^2 - 1}x) \} \text{ si } n \geq 1.$$

$$u(x, y) = c_0 \sin x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sh}(\sqrt{4n^2 - 1}x) \cos\left(2ny + \frac{n\pi}{2}\right) \Big|_{x=\pi} = \sin 2y \rightarrow \begin{matrix} c_0 \text{ indeterminado} \\ c_1 \text{sh}(\sqrt{3}\pi) = 1 \\ c_n = 0, n > 1 \end{matrix}$$

Tiene, por tanto, **infinitas soluciones**:  $u = C \sin x + \frac{\text{sh}(\sqrt{3}x)}{\text{sh}(\sqrt{3}\pi)} \sin 2y.$

Evidentemente no se podrá demostrar la unicidad haciendo uso de la fórmula de Green. Operando como en 1.3, si  $u_1$  y  $u_2$  son soluciones del problema, su diferencia satisface:

$$u = u_1 - u_2 \rightarrow \begin{cases} \Delta u + u = 0 \\ \bullet \bullet \bullet = 0 \\ \bullet \bullet \bullet = 0 \end{cases} \rightarrow \iint_D (u \Delta u + u^2) = \iint_D u^2 - \iint_D \|\nabla u\|^2 = 0 \quad ??$$

Para resolver los problemas en círculos nos interesa expresar el **Laplaciano en polares** ( $x=r \cos \theta$ ,  $y=r \sin \theta$ ). Como,

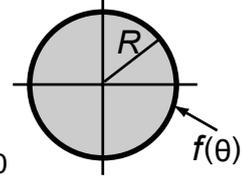
$$u_r = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta ; \quad u_{rr} = u_{xx} \cos^2 \theta + 2u_{xy} \sin \theta \cos \theta + u_{yy} \sin^2 \theta$$

$$u_{\theta\theta} = u_{xx} r^2 \sin^2 \theta - 2u_{xy} r^2 \sin \theta \cos \theta + u_{yy} r^2 \cos^2 \theta - u_x r \cos \theta - u_y r \sin \theta \rightarrow$$

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}$$

Resolvamos el **problema de Dirichlet homogéneo en un círculo**:

$$[P_3] \begin{cases} \Delta u = 0, \text{ en } r < R \\ u(R, \theta) = f(\theta), \theta \in [0, 2\pi) \end{cases}$$



$$u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta) \rightarrow \frac{r^2 R'' + rR'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda \rightarrow \begin{cases} \Theta'' + \lambda\Theta = 0 \\ r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0 \end{cases}$$

Parece que no hay condiciones para la  $\Theta$ , pero está claro que la solución  $u(r, \theta)$  **debe ser  $2\pi$ -periódica en  $\theta$** , es decir, debe ser  $\Theta(0) = \Theta(2\pi)$ ,  $\Theta'(0) = \Theta'(2\pi)$ . Este problema de Sturm-Liouville periódico tiene por autovalores y autofunciones:

$$\lambda_n = n^2, \quad n=0, 1, 2, \dots, \quad \Theta_0(\theta) = \{1\}, \quad \Theta_n(\theta) = \{\cos n\theta, \sin n\theta\}.$$

Las soluciones correspondientes de  $R$  son (ecuaciones de Euler):

$$R_0(r) = c_1 + c_2 \ln r \quad \text{y} \quad R_n(r) = c_1 r^n + c_2 r^{-n} \quad \text{si } n \geq 1.$$

Parece lógico imponer por argumentos físicos que la solución debe permanecer **acotada cuando  $r \rightarrow 0$**  (matemáticamente la solución también debe estarlo si debe ser de clase 2), así que debe ser  $c_2 = 0$  en ambos casos. Por tanto, probamos soluciones de la forma:

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta]$$

Debe ser:  $u(R, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} R^n [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta] = f(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi) \rightarrow$

$$a_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta, \quad n=0, 1, \dots, \quad b_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta \, d\theta, \quad n=1, 2, \dots$$

Sustituyendo estos coeficientes en la serie y operando formalmente:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{R^n} \cos n(\theta - \phi) \right] f(\phi) \, d\phi$$

Vamos a sumar la serie:

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n \cos n\alpha}{R^n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{re^{i\alpha}}{R} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{re^{-i\alpha}}{R} \right)^n = 1 + \frac{re^{i\alpha}}{R - re^{i\alpha}} + \frac{re^{-i\alpha}}{R - re^{-i\alpha}} = \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha}.$$

Por tanto, la solución de  $[P_3]$  se puede expresar:

$$u(r, \theta) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\phi) \, d\phi}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi) + r^2} \quad \text{fórmula integral de Poisson}$$

Haciendo aquí  $r=0$  (o mirando la serie) deducimos que  $u(0, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) \, d\phi$  :

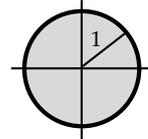
si  $\Delta u=0$ , el valor de  $u$  en el centro de un círculo es el valor medio de  $u$  sobre la frontera.

Habría que probar que la  $u$  de la serie (o la integral) es realmente solución de  $[P_3]$ . Se demuestra que si  $f$  es continua a trozos, la  $u$  tiene infinitas derivadas en  $r < R$  (aunque  $f$  sea discontinua), que en ese abierto es  $\Delta u=0$  y que alcanza el valor de contorno con continuidad en los  $\theta$  en que  $f$  es continua (y sigue habiendo unicidad, cosa que vimos en 1.3 sólo si  $f$  era continua). [La situación es totalmente análoga para  $[P_1]$ , Dirichlet en rectángulo].

[El problema exterior en  $r > R$  lo veremos en 3.3, para compararlo con el del espacio].

Vamos con el problema de **Dirichlet no homogéneo en el círculo**. En vez de tratarlo en general, resolvemos un problema concreto.

$$[P_4] \begin{cases} u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2} = 4, \text{ en } r < 1 \\ u(1, \theta) = \cos 2\theta \end{cases}$$



Podríamos descomponerlo en dos (el de  $\Delta u = 0$  lo acabamos de estudiar), pero lo resolvemos directamente. Como en todo problema no homogéneo probamos una serie con las autofunciones del problema homogéneo:

$$u(r, \theta) = a_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(r) \cos n\theta + b_n(r) \sin n\theta] \rightarrow$$

$$a_0'' + \frac{1}{r}a_0' + \sum_{n=1}^{\infty} \left( [a_n'' + \frac{1}{r}a_n' - \frac{n^2}{r^2}a_n] \cos n\theta + [b_n'' + \frac{1}{r}b_n' - \frac{n^2}{r^2}b_n] \sin n\theta \right) = 4,$$

que, por suerte, ya está desarrollada en esta familia de autofunciones.

[Si en vez de un 4 tuviésemos una  $F(r, \theta)$  cualquiera, la desarrollaríamos en senos y cosenos, mirando la  $r$  como constante e identificaríamos ambos miembros].

Habrà, pues, que resolver las ecuaciones de Euler:

$$ra_0'' + a_0' = 4, \quad r^2a_n'' + ra_n' - n^2a_n = 0, \quad r^2b_n'' + rb_n' - n^2b_n = 0.$$

La condición  $u(1, \theta) = \cos 2\theta$  (tambièn desarrollada ya) impone que:

$$b_n(1) = 0 \quad \forall n; \quad a_2(1) = 1; \quad a_n(1) = 0, \quad n \neq 2.$$

La acotación cuando  $r \rightarrow 0$  será la otra condición necesaria para determinar la solución de cada EDO de segundo orden. Para la de  $a_0$  necesitamos una solución particular, que se puede hallar con la fórmula de variación de las constantes:

$$\int_0^1 \frac{\ln r}{1/r} = \frac{1}{r}, \quad a_{0p} = \ln r \int \frac{1 \cdot 4 dr}{1/r} - \int \frac{\ln r \cdot 4 dr}{1/r} = r^2.$$

o, mejor, tanteando, pues (porque la de coeficientes constantes asociada la tiene de la forma  $Ae^{2s}$ ) sabemos que tiene una  $a_{0p} = Ar^2$  ( $\rightarrow 2A + 2A = 4$ ,  $A = 1$ ). Así:

$$a_0 = c_1 + c_2 \ln r + r^2 \xrightarrow{\text{acotada}} c_2 = 0 \xrightarrow{a_0(1)=0} c_1 = -1$$

Para  $a_2$ :

$$a_2 = c_1 r^2 + c_2 r^{-2} \xrightarrow{\text{acotada}} c_2 = 0 \xrightarrow{a_2(1)=1} c_1 = 1$$

No necesitamos imponer los datos en la solución del resto de ecuaciones homogéneas para asegurar ya que el resto de  $a_n$  y las  $b_n$  son cero (0 es solución y no hay más por tener un problema de Dirichlet solución única). La solución de  $[P_4]$  es:

$$u(r, \theta) = r^2 - 1 + r^2 \cos 2\theta$$

[Se podría escribir en cartesianas:  $u = 2x^2 - 1$ ].

Como otras veces, un buen cambio simplifica el problema. Por ejemplo, podemos en este caso buscar una solución  $v(r)$  de la ecuación no homogénea resolviendo  $v'' + \frac{1}{r}v' = 4$ . La solución más sencilla de esta ecuación de Euler es  $v = r^2$ .

$$w = u - v \rightarrow \begin{cases} \Delta w = 0, \text{ en } r < 1 \\ w(1, \theta) = \cos 2\theta - 1 \end{cases}$$

De la serie de la página anterior obtenemos, sin más que identificar coeficientes, que la solución de este problema es:

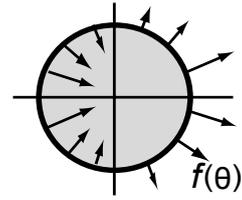
$$w(r, \theta) = r^2 \cos 2\theta - 1$$

lo que nos lleva de forma mucho más rápida a la solución de antes.

[Utilizando funciones de Green se dará en 3.4 una fórmula integral para  $\begin{cases} \Delta u = F, r < R \\ u(R, \theta) = f \end{cases}$  que generalizará la fórmula de Poisson de la página anterior].

Resolvamos ahora el **problema de Neumann homogéneo en un círculo**:

$$[P_5] \begin{cases} \Delta u = 0, \text{ en } r < R \\ u_r(R, \theta) = f(\theta), \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$



Como el problema de contorno y la ecuación de Euler son las mismas que en Dirichlet, la solución que probamos es:

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta]$$

pero ahora es diferente la condición de contorno que falta:

$$u_r(R, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} nR^{n-1} [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta] = f(\theta), \theta \in [0, 2\pi] \rightarrow$$

$$a_n = \frac{1}{n\pi R^{n-1}} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta, \quad b_n = \frac{1}{n\pi R^{n-1}} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta, \quad n=1, 2, \dots$$

**siempre que no tenga término independiente el desarrollo en senos y cosenos de  $f(\theta)$** ; es decir, una **condición necesaria** para que el problema se pueda resolver por este método es que se cumpla:

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 0 \quad [\text{confirma lo visto en 1.3: debía ser } \oint_{\partial D} f ds = \iint_D F dx dy = 0].$$

Además,  $a_0$  **queda indeterminado** [Neumann siempre tiene unicidad salvo constante].

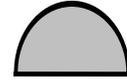
**Ej 4.**  $\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } r < 1 \\ u_r(1, \theta) = \sin^3 \theta \end{cases}$   $u_r(1, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta] = \sin^3 \theta = \frac{3}{4} \sin \theta - \frac{1}{4} \sin 3\theta.$

No hay que hacer integrales:  $b_1 = \frac{3}{4}$ ,  $b_3 = -\frac{1}{12}$  y los demás cero.

Por tanto:  $u(r, \theta) = C + \frac{3}{4}r \sin \theta - \frac{1}{12}r^3 \sin 3\theta$ ,  $C$  cualquiera.

Y ahora resolvemos uno de **Neumann no homogéneo en un semicírculo**:

$$[P_6] \begin{cases} \Delta u = F(r, \theta), \text{ en } r < 1, 0 < \theta < \pi \\ u_r(1, \theta) = u_\theta(r, 0) = u_\theta(r, \pi) = 0 \end{cases}$$



Como para este problema no hemos resuelto el homogéneo, debemos comenzar hallando sus autofunciones. Conocemos la ecuación en  $\Theta$  que sale al separar variables. Junto a las condiciones de contorno nos dará dichas autofunciones:

$$\begin{cases} \Theta'' + \lambda \Theta = 0 \\ \Theta'(0) = \Theta'(\pi) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = n^2, \quad \Theta_n(\theta) = \{\cos n\theta\}, \quad n=0, 1, 2, \dots \rightarrow$$

$$u(r, \theta) = R_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r) \cos n\theta \quad \left[ \text{La serie con cosenos y senos del [P4] no cumple los datos de contorno; aquí no hay periodicidad.} \right] \rightarrow$$

$$R_0 + \frac{1}{r}R'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ R''_n + \frac{1}{r}R'_n - \frac{n^2}{r^2}R_n \right] \cos n\theta = F(r, \theta) = B_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(r) \cos n\theta,$$

$$\text{con } B_0(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi F(r, \theta) d\theta \text{ y } B_n(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi F(r, \theta) \cos n\theta d\theta.$$

Basta, pues, resolver:  $rR_0 + R'_0 = [rR'_0]' = rB_0(r)$  y  $r^2R_n + rR'_n - n^2R_n = r^2B_n(r)$ , ambas con los datos de contorno (singulares):  $R_n$  acotada en  $r=0$  y  $R'_n(1)=0$ .

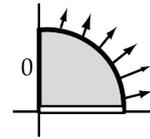
Si  $n \geq 1$  el problema homogéneo (y, por tanto, el no homogéneo) tiene solución  $R_n$  única (aunque el problema sea singular, vale lo que vimos en 2.3). Pero si  $n \geq 0$ :

$$rR_0 + R'_0 = 0 \rightarrow R_0 = c_1 + c_2 \ln r \xrightarrow{R \text{ acotada}}_{R'(1)=0} R_{0h} = \{1\} \rightarrow$$

Existen infinitas soluciones  $R_0$  del no homogéneo según sea  $\int_0^1 rB_0(r) dr \stackrel{=}{\neq} 0$ .

[Concuerda una vez más con 1.3. Debía ser:  $\int_0^1 \int_0^\pi rF(r, \theta) d\theta dr = 0$ ].

Resolvemos para acabar con Laplace en polares dos problemas con **condiciones mixtas**. El primero va a ser homogéneo.



$$[P_7] \begin{cases} \Delta u = 0, r < 1, \theta \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ u_r(1, \theta) = f(\theta) \\ u_\theta(r, 0) = u(r, \frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \Theta'' + \lambda \Theta = 0, \Theta'(0) = \Theta(\frac{\pi}{2}) = 0 \\ r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0 \end{cases}$$

Los autovalores y autofunciones son conocidos:  $\lambda_n = (2n-1)^2$ ,  $\Theta_n = \{\cos(2n-1)\theta\}$   
 $n=1, 2, \dots$

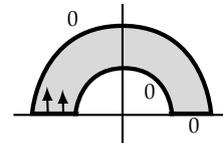
Resolviendo para esos  $\lambda_n$  la ecuación en  $R$  y exigiendo que esté acotada en  $r=0$ :

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^{2n-1} \cos(2n-1)\theta \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) c_n \cos(2n-1)\theta = f(\theta) \rightarrow$$

$$c_n = \frac{4}{[2n-1]\pi} \int_0^{\pi/2} f(\theta) \cos(2n-1)\theta d\theta, \quad n=1, 2, \dots \quad (\text{solución única}).$$

El recinto siguiente no incluye el origen. La condición implícita de estar acotada en ese punto es sustituida por un dato explícito en  $r=1$ :

Ej 5. 
$$\begin{cases} \Delta u = 0, 1 < r < 2, 0 < \theta < \pi \\ u(1, \theta) = u(2, \theta) = u(r, 0) = 0, u_\theta(r, \pi) = r^2 \end{cases}$$



Aparentemente es un problema homogéneo, pero ya dijimos que las condiciones de contorno para Laplace en polares que deben ser homogéneas son las de la  $\theta$ . Necesitamos una  $v$  que las cumpla. Claramente  $v=r^2\theta$  lo hace:

$$w = u - v \rightarrow \begin{cases} \Delta w = -4\theta, 1 < r < 2, 0 < \theta < \pi \\ w(1, \theta) = -\theta, w(2, \theta) = -4\theta \\ w(r, 0) = w_\theta(r, \pi) = 0 \end{cases}$$

Las autofunciones del homogéneo las dará el problema de contorno:

$$\begin{cases} \Theta'' + \lambda \Theta = 0 \\ \Theta(0) = \Theta'(\pi) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = \frac{[2n-1]^2}{4}, \quad \Theta_n(\theta) = \left\{ \text{sen} \frac{[2n-1]\theta}{2} \right\}, \quad n=1, 2, \dots$$

Probamos entonces la serie: 
$$w(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r) \text{sen} \frac{[2n-1]\theta}{2} \rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ R_n'' + \frac{1}{r} R_n' - \frac{[2n-1]^2}{4r^2} R_n \right] \text{sen} \frac{[2n-1]\theta}{2} = -4\theta = 4 \sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{sen} \frac{[2n-1]\theta}{2}$$

$$\text{con } B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} -\theta \text{sen} \frac{[2n-1]\theta}{2} d\theta = \frac{2[-1]^n}{\pi[n-1/2]^2}$$

De los datos no homogéneos deducimos las condiciones para las  $R_n$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} R_n(1)\Theta_n(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\Theta_n(\theta), \quad \sum_{n=1}^{\infty} R_n(2)\Theta_n(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} 4B_n\Theta_n(\theta)$$

Resolvemos pues:  $r^2 R_n'' + rR_n' - [n - \frac{1}{2}]^2 R_n = 4B_n r^2$  con  $R_n(1) = B_n$ ,  $R_n(2) = 4B_n$ .

$$R_{np} = Ar^2 \quad [\lambda=2 \text{ no autovalor}] \rightarrow A = \frac{B_n}{4-(n-1/2)^2} \rightarrow R_n = c_1 r^{n-1/2} + c_2 r^{-(n-1/2)} + Ar^2$$

$$\text{c. contorno} \rightarrow c_1 = \frac{[2^{q+2}-1][B_n-A]}{2^{2q}-1}, \quad c_2 = \frac{2^q[2^q-4][B_n-A]}{2^{2q}-1}, \quad \text{llamando } q = n - \frac{1}{2}.$$

Simplificando un poco:

$$R_n(r) = \frac{2[-1]^n}{\pi q^2 [q^2-4][2^{2q}-1]} \left( [2^{q+2}-1]r^q + 2^q[q^2-4]r^{-q} - [2^{2q}-1]r^2 \right)$$

La solución final es  $u = r^2\theta + w$  donde la  $w$  es la serie de arriba con los  $R_n$  dados por esta expresión.

### 3.3. Algunos problemas en tres variables

Comenzamos estudiando las **series de Fourier dobles**, de teoría semejante a las de una variable (las triples, que aparecerían en problemas con 4 variables, son también similares).

Sean  $X_m(x)$ ,  $x \in [a, b]$  e  $Y_n(y)$ ,  $y \in [c, d]$  las autofunciones de dos problemas de Sturm-Liouville con pesos respectivos  $r(x)$  y  $s(y)$ , y sea  $f(x, y) \in C^1([a, b] \times [c, d])$ . Entonces, para cada  $(x, y) \in (a, b) \times (c, d)$  se puede escribir  $f$  como la serie:

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{nm} X_n Y_m \quad \text{con} \quad c_{nm} = \frac{1}{\langle X_n, X_n \rangle} \frac{1}{\langle Y_m, Y_m \rangle} \int_a^b \int_c^d f(x, y) X_n Y_m r s \, dy \, dx$$

[  $\langle u, v \rangle$  designa, desde luego,  $\int_a^b u v r \, dx$  ó  $\int_c^d u v s \, dy$  ].

pues para  $x$  fijo se puede poner  $f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m(x) Y_m$ ,  $C_m(x) = \frac{\langle f(x, y), Y_m \rangle}{\langle Y_m, Y_m \rangle}$ ,

y con  $C_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{nm} X_n$ ,  $c_{nm} = \frac{\langle C_m(x), X_n \rangle}{\langle X_n, X_n \rangle}$  se tiene la expresión de arriba.

[Se llega a lo mismo, desde luego, desarrollando primero en  $X_n$  y luego en  $Y_m$ ].

En particular, se tienen los desarrollos en **series trigonométricas dobles** de una función  $f \in C^1([0, L] \times [0, M])$ :

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{M} \quad \text{con} \quad b_{nm} = \frac{4}{LM} \int_0^L \int_0^M f(x, y) \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{M} \, dy \, dx$$

$$f(x, y) = \frac{1}{4} a_{00} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n0} \cos \frac{n\pi x}{L} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} a_{0m} \cos \frac{m\pi y}{M} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{nm} \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi y}{M}$$

$$\text{con} \quad a_{nm} = \frac{4}{LM} \int_0^L \int_0^M f(x, y) \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi y}{M} \, dy \, dx$$

[O los desarrollos parecidos en  $\sum \sin \cos$  ó  $\sum \cos \sin$ , o con series en senos y cosenos].

[Los factores  $\frac{1}{4}$  y  $\frac{1}{2}$  son, como siempre, para que la fórmula valga también si  $n=0$  ó  $m=0$ ].

**Ej 1.** Desarrollemos  $f(x, y) = x \cos y$ , en  $[0, \pi] \times [0, \pi]$  de dos formas:

$$x \cos y = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm} \sin nx \sin my \quad \text{con} \quad b_{nm} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} x \cos y \sin nx \sin my \, dy \, dx$$

$$\rightarrow x \cos y = \frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[-1]^{n+1} m}{n[4m^2-1]} \sin nx \sin 2my$$

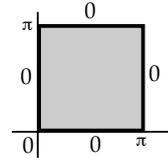
$$a_{nm} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} x \cos y \cos nx \cos my \, dy \, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq 1 \\ \pi & \text{si } m=1, n=0 \\ 2[(-1)^n - 1]/(\pi n^2) & \text{si } m=1, n>0 \end{cases} \rightarrow$$

$$x \cos y = \frac{\pi}{2} \cos y - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos[2n-1]x \cos y \quad [\text{ya estaba desarrollado en } y].$$

[La igualdad entre  $f$  y su serie se da en los puntos de continuidad de la  $f$  extendida, de forma impar en el primer caso y par en el segundo, en cada variable hasta  $[-\pi, \pi]$  y luego de forma  $2\pi$ -periódica; así, la serie en senos converge hacia  $x \cos y$  en el lado  $x=0$  del cuadrado  $[0, \pi] \times [0, \pi]$ , pero no lo hace en los otros lados; la serie en cosenos, en cambio, converge (uniformemente) en todo el cuadrado, incluido el borde].

Resolvamos separando variables varios problemas (homogéneos) en 3 variables. Primero, la **ecuación del calor en un cuadrado**: estudiamos la evolución de las temperaturas de una placa (dadas las iniciales) si el borde se mantiene a  $0^\circ$ :

$$\begin{cases} u_t - k[u_{xx} + u_{yy}] = 0, & (x, y) \in (0, \pi) \times (0, \pi), t > 0 \\ u(x, y, 0) = f(x, y) \\ u(x, 0, t) = u(x, \pi, t) = u(0, y, t) = u(\pi, y, t) = 0 \end{cases}$$



Buscamos soluciones:  $u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t) \rightarrow XYT' - k[X''Y + XY'']T = 0$

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{k} \frac{T'}{T} - \frac{Y''}{Y} = -\lambda \rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ \frac{Y''}{Y} = \lambda + \frac{1}{k} \frac{T'}{T} = -\mu \rightarrow \begin{cases} Y'' + \mu Y = 0 \\ T' + k[\lambda + \mu]T = 0 \end{cases} \end{cases}$$

[Como en 2 variables, dejamos para la  $T$  la expresión más complicada].

Las condiciones de contorno exigen:  $X(0)=X(\pi)=Y(0)=Y(\pi)=0$ . Así pues:

$$\begin{cases} \lambda = n^2, X_n = \{\sin nx\}, n = 1, 2, \dots \\ \mu = m^2, Y_m = \{\sin my\}, m = 1, 2, \dots \end{cases} \rightarrow T_{nm} = \{e^{-(n^2+m^2)kt}\}$$

Cualquier  $u_{nm}(x, y, t) = \{e^{-(n^2+m^2)kt} \sin nx \sin my\}$  satisface la ecuación y todas las condiciones de contorno, así como lo hace cualquier combinación lineal de ellas. Esto nos lleva a probar la serie:

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm} e^{-(n^2+m^2)kt} \sin nx \sin my$$

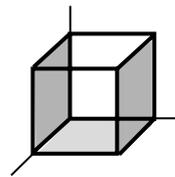
que debe satisfacer además:  $u(x, y, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm} \sin nx \sin my = f(x, y) \rightarrow$

$$b_{nm} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi f(x, y) \sin nx \sin my \, dx \, dy, \quad n, m \geq 1.$$

[Como en la varilla, aquí también  $u \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ ].

Ahora, **Laplace en un cubo** con condiciones de contorno mixtas (cuya solución seá única como los similares del plano):

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } (0, \pi) \times (0, \pi) \times (0, \pi) \\ u(x, y, 0) = f(x, y) \\ u = 0 \text{ en } x=0, x=\pi, z=\pi \\ u_y = 0 \text{ en } y=0, y=\pi \end{cases}$$



$$u = XYZ \rightarrow \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = -\frac{X''}{X} = \lambda \rightarrow \frac{Z''}{Z} - \lambda = -\frac{Y''}{Y} = \mu \rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0, X(0) = X(\pi) = 0 \\ Y'' + \mu Y = 0, Y'(0) = Y'(\pi) = 0 \\ Z'' - [\lambda + \mu]Z = 0, Z(\pi) = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \lambda = n^2, X_n = \{\sin nx\}, n = 1, 2, \dots \\ \mu = m^2, Y_m = \{\cos my\}, m = 0, 1, \dots \end{cases} \rightarrow Z_{mn} = \{\text{sh}(\sqrt{n^2+m^2}[\pi-z])\} \rightarrow$$

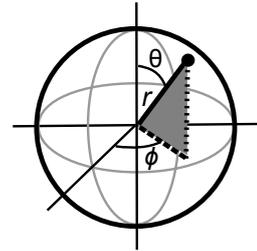
$$u(x, y, z) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_{n0} \text{sh}(n[\pi-z]) \sin nx + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{nm} \text{sh}(\sqrt{n^2+m^2}[\pi-z]) \sin nx \cos my$$

Como  $u(x, y, 0) = f(x, y)$ , los  $c_{nm}$  son:

$$c_{nm} = \frac{4}{\pi^2 \text{sh}(\pi\sqrt{n^2+m^2})} \int_0^\pi \int_0^\pi f(x, y) \sin nx \cos my \, dy \, dx \quad \begin{matrix} n = 1, 2, \dots \\ m = 0, 1, \dots \end{matrix}$$

Resolvamos el **problema de Dirichlet en una esfera**. En los libros de cálculo en varias variables se encuentra la expresión del laplaciano en esféricas:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \theta \cos \phi \\ y &= r \cos \theta \sin \phi \\ z &= r \sin \theta \end{aligned} \right\} \rightarrow \Delta u = u_{rr} + \frac{2u_r}{r} + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2} + \frac{\cos \theta u_\theta}{\sin^2 \theta r^2} + \frac{u_{\phi\phi}}{\sin^2 \theta r^2}$$



Veamos primero el caso con **datos independientes de  $\phi$** :

$$\left\{ \begin{aligned} u_{rr} + \frac{2}{r} u_r + \frac{1}{r^2} [u_{\theta\theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} u_\theta] &= 0, \quad r < R \\ u(R, \theta) &= f(\theta), \quad \theta \in [0, \pi] \end{aligned} \right.$$

que, de hecho, es un problema con **dos variables**. Podemos buscar entonces soluciones que tampoco dependan de  $\phi$ . Separando variables:

$$u = R(r) \Theta(\theta) \rightarrow \begin{cases} r^2 R'' + 2rR' - \lambda R = 0 \\ \Theta'' + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \Theta' + \lambda \Theta = 0 \end{cases}$$

El cambio  $s = \cos \theta$  [ $\Theta' = -\sin \theta \frac{d\Theta}{ds}$ ,  $\Theta'' = \sin^2 \theta \frac{d^2\Theta}{ds^2} - \cos \theta \frac{d\Theta}{ds}$ ] lleva la segunda ecuación a:

$$[1-s^2] \frac{d^2\Theta}{ds^2} - 2s \frac{d\Theta}{ds} + \lambda \Theta = 0, \quad \text{ecuación de Legendre.}$$

Imponemos que  $\Theta$  esté **acotada en  $s = \pm 1$**  [ $\theta = 0, \pi$  polos de la esfera]. Los autovalores de este **problema singular** (citado en 2.2) son  $\lambda_n = n(n+1)$ ,  $n=0, 1, \dots$  y sus autofunciones son los **polinomios de Legendre**:

$$\{P_n(s)\} = \{P_n(\cos \theta)\} \quad \left[ P_0 = 1, P_1 = s, P_2 = \frac{3}{2}s^2 - \frac{1}{2}, P_3 = \frac{5}{2}s^3 - \frac{3}{2}s, \dots \right]$$

Para estos valores de  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} r^2 R'' + 2rR' - n(n+1)R &= 0 \rightarrow \mu^2 + \mu - n(n+1) = 0 \rightarrow \mu = n, -(n+1) \\ \rightarrow R_n &= c_1 r^n + c_2 r^{-(n+1)} \xrightarrow{R \text{ acotada}} R_n = \{r^n\}, \quad n=0, 1, \dots \end{aligned}$$

Probamos entonces:

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos \theta) \rightarrow u(R, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n P_n(\cos \theta) = f(\theta) \\ \rightarrow a_n &= \frac{2n+1}{2R^n} \int_0^\pi f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad n=0, 1, \dots \end{aligned}$$

pues el **peso** es  $r(\theta) = \sin \theta$  [ $(\sin \theta \Theta')' + \lambda \sin \theta \Theta = 0$ ] y de los  $P_n$  se sabe que:

$$\int_0^\pi [P_n(\cos \theta)]^2 \sin \theta d\theta \stackrel{s=\cos \theta}{=} \int_{-1}^1 [P_n(s)]^2 ds = \frac{2}{2n+1}$$

**Ej 2.** Si  $R=1$  y  $f(\theta) = \cos^2 \theta$  se tiene:  $a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 s^2 P_n(s) ds$ .

Así pues:  $a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 s^2 ds = \frac{1}{3}$ ,  $a_2 = \frac{5}{2} \int_{-1}^1 [\frac{3}{2}s^4 - \frac{1}{2}s^2] ds = \frac{2}{3}$ , y los demás  $a_n = 0$  (ya que  $P_1$  es impar ( $\Rightarrow a_1 = 0$ ), y para desarrollar  $s^2$  bastan  $P_0, P_1$  y  $P_2$ ).

La solución es, por tanto,  $u(r, \theta) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}r^2 + r^2 \cos^2 \theta$  [ $= \frac{1}{3}(1-x^2-y^2+2z^2)$ ].

Para un dato como este se podrían determinar los coeficientes tanteando:

$$\cos^2 \theta = \frac{2}{3} (\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2}) + \frac{1}{3} \rightarrow a_2 = \frac{2}{3}, \quad a_0 = \frac{1}{3}, \quad \text{como antes.}$$

[Para resolver problemas con términos no homogéneos  $F(r, \theta)$  en la ecuación, se probaría como siempre una serie de autofunciones:  $u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r) P_n(\cos \theta)$ ].

Pasemos ahora a resolver, con menos detalles, el problema general en 3 variables:

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2} \left[ u_{\theta\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}u_{\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}u_{\phi\phi} \right] = 0, & r < R \\ u(R, \theta, \phi) = f(\theta, \phi), & \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Vamos en este caso a separar primero la parte radial y la que depende de los dos ángulos:

$$u = R(r)Y(\theta, \phi) \rightarrow \begin{cases} r^2R'' + 2rR' - \lambda R = 0 \\ Y_{\phi\phi} + \sin\theta(\sin\theta Y_{\theta})_{\theta} + \lambda \sin^2\theta Y = 0 \end{cases}$$

Separando ahora la parte angular:  $Y(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi) \rightarrow \begin{cases} \Phi'' + \mu\Phi = 0 \\ (\sin\theta\Theta')' + (\lambda \sin\theta - \frac{\mu}{\sin\theta})\Theta = 0 \end{cases}$

La solución ha de ser  $2\pi$ -periódica en  $\phi$ :  $\mu_m = m^2$ ,  $\Phi_m(\phi) = \{\cos m\phi, \sin m\phi\}$ ,  $m = 0, 1, \dots$

Llevando estos  $\mu_m$  a la otra ecuación y haciendo como antes  $s = \cos\theta$  se tiene:

$$\frac{d}{ds} \left[ (1-s^2) \frac{d\Theta}{ds} \right] + \left[ \lambda - \frac{m^2}{1-s^2} \right] \Theta = 0, \quad \Theta \text{ acotada en } s = \pm 1.$$

La EDO, nueva para nosotros, se llama **ecuación asociada de Legendre**. Si  $m = 0$  es la de Legendre y las autofunciones eran los  $P_n$ . Se prueba que los autovalores del problema singular son también  $\lambda_n = n(n+1)$ , y sus autofunciones están relacionadas con ellos:

$$P_n^m(t) = (1-s^2)^{m/2} \frac{d^m}{ds^m} P_n(s), \quad \text{con } m \leq n$$

$$\left[ P_n^0 = P_n, P_1^1 = \sin\theta, P_2^1 = 3\sin\theta\cos\theta, P_2^2 = 3\sin^2\theta, \dots \right]$$

$$\rightarrow Y_n^m(\theta, \phi) = \left\{ \cos m\phi P_n^m(\cos\theta), \sin m\phi P_n^m(\cos\theta) \right\}, \quad n = 0, 1, \dots, m = 0 \dots n.$$

$$\left[ Y_0^0 = \{1\}, Y_1^0 = \{\cos\theta\}, Y_1^1 = \{\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi\}, Y_2^0 = \left\{ \frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2} \right\}, Y_2^1 = \{3\sin\theta\cos\theta\cos\phi, 3\sin\theta\cos\theta\sin\phi\}, Y_2^2 = \{3\sin^2\theta\cos 2\phi, 3\sin^2\theta\sin 2\phi\}, \dots \right]$$

Las soluciones acotadas en  $r=0$  para esos  $\lambda_n$  son como antes  $R_n = \{r^n\}$ .

Los **armónicos esféricos** son las soluciones de la ecuación de Laplace  $u_n^m = r^n Y_n^m(\theta, \phi)$ .

[Hay libros que llaman armónicos esféricos a los  $Y_n^m$ , otros a múltiplos concretos de los  $Y_n^m \dots$ ].

Con ellos formamos la serie:

$$u(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \left[ a_{n0} P_n(\cos\theta) + \sum_{m=1}^n (a_{nm} \cos m\phi + b_{nm} \sin m\phi) P_n^m(\cos\theta) \right] \rightarrow$$

$$a_{n0} = \frac{2n+1}{4\pi R^n} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \phi) P_n(\cos\theta) \sin\theta d\theta d\phi,$$

$$a_{nm} = \frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi(n+m)!R^n} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \phi) \cos m\phi P_n^m(\cos\theta) \sin\theta d\theta d\phi,$$

$$b_{nm} = \frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi(n+m)!R^n} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \phi) \sin m\phi P_n^m(\cos\theta) \sin\theta d\theta d\phi, \quad m \geq 1$$

$$\text{puesto que se cumple } \int_{-1}^1 [P_n^m(t)]^2 dt = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}.$$

**Ej 3.** Para  $R=1$  y  $f(\theta, \phi) = \sin^2\theta \sin^2\phi$ . Buscamos identificar como en el ejemplo 2.

$$\begin{aligned} \text{Debe ser: } f(\theta, \phi) &= \frac{1}{2} \sin^2\theta - \frac{1}{2} \sin^2\theta \cos 2\phi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos^2\theta - \frac{1}{2} \sin^2\theta \cos 2\phi \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left[ \frac{3}{2} \cos^2\theta - \frac{1}{2} \right] - \frac{1}{2} \sin^2\theta \cos 2\phi = \frac{1}{3} Y_0^0 - \frac{1}{3} Y_2^0 - \frac{1}{2} Y_2^2. \end{aligned}$$

Por tanto,  $a_{00} = \frac{1}{3}$ ,  $a_{20} = -\frac{1}{3}$ ,  $a_{22} = -\frac{1}{2}$  y los otros son cero. La solución es, pues:

$$u = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} r^2 \left[ \frac{3}{2} \cos^2\theta - \frac{1}{2} \right] - \frac{1}{2} r^2 \sin^2\theta \cos 2\phi.$$

$$\text{Escrita en cartesianas: } u = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{6} [x^2 + y^2 + z^2] - \frac{1}{2} [x^2 - y^2] = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} x^2 + \frac{2}{3} y^2 - \frac{1}{3} z^2,$$

función que cumple  $\Delta u = 0$  y que cuando  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  vale  $y^2$  [=  $f(\theta, \phi)$  si  $r = 1$ ].

Veamos ahora el **problema exterior** de Dirichlet para Laplace en el círculo y en la esfera con simetría (con datos independientes de  $\phi$ ). Para que haya unicidad, las condiciones en el infinito han de ser distintas:

**plano:**

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{si } r > R \\ u(R, \theta) = f(\theta), & 0 \leq \theta < 2\pi \\ u \text{ acotada cuando } r \rightarrow \infty \end{cases}$$

**espacio:**

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{si } r > R \\ u(R, \theta) = f(\theta), & 0 \leq \theta \leq \pi \\ u \rightarrow 0 \text{ cuando } r \rightarrow \infty \end{cases}$$

Separando variables se llega a las mismas  $\Theta_n$  que en los problemas interiores:

$$\{\Theta_n\} = \{\cos n\theta, \sin n\theta\}, \quad n=0, 1, \dots \quad \{\Theta_n\} = \{P_n(\cos \theta)\}, \quad n=0, 1, \dots$$

Pero hay que elegir diferentes  $R_n$ , para las nuevas condiciones en el infinito:

$$\begin{aligned} n=0, \quad c_1 + c_2 \ln r \rightarrow R_0 = \{1\} & \quad n=0, \quad c_1 + c_2 r^{-1} \rightarrow R_0 = \{r^{-1}\} \\ n > 0, \quad c_1 r^n + c_2 r^{-n} \rightarrow R_n = \{r^{-n}\} & \quad n > 0, \quad c_1 r^n + c_2 r^{-(n+1)} \rightarrow R_n = \{r^{-(n+1)}\} \end{aligned}$$

[En el plano ningún  $R_0 \rightarrow 0$ , y en el espacio están acotadas tanto 1 como  $r^{-1}$ ; tender a 0 nos dejaría sin soluciones en el plano y pedir acotación daría infinitas en el espacio].

Probando las series correspondientes e imponiendo  $u(R, \theta) = f(\theta)$ , se obtiene que las soluciones respectivas son estas series con los coeficientes indicados:

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta] & u(r, \theta) &= \frac{a_0}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^{-(n+1)} P_n(\cos \theta) \\ a_n &= \frac{R^n}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta, \quad n=0, 1, \dots & a_n &= \frac{(2n+1)R^{n+1}}{2} \int_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta \\ b_n &= \frac{R^n}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta \, d\theta, \quad n=1, 2, \dots & & n=0, 1, \dots \end{aligned}$$

**Ej 4.** Hallemos la solución en ambos casos cuando  $f(\theta) = a$  constante.

Basta mirar las series para deducir las soluciones en ambos casos:

$$u = a \quad \text{en el plano.} \quad u = \frac{aR}{r} \quad \text{en el espacio.}$$

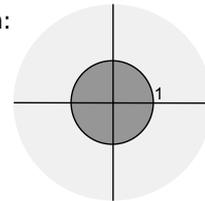
[Interpretemos estos resultados mirándolos como soluciones estacionarias de la ecuación del calor. Si mantenemos la superficie de una bola de radio  $R$  constantemente a  $a^0$ , la temperatura que tenderían a tener todos los puntos del espacio sería  $aR/r$ , disminuyendo con la distancia a la bola. Para el primer caso, en vez de imaginarnos en un mundo bidimensional, situémonos en el espacio con datos y soluciones independientes de la variable  $z$ : si toda la superficie de un cilindro infinito de radio  $R$  se mantiene a  $a^0$ , todo el espacio tenderá a tener esa temperatura].

[Si nos planteásemos el problema en el interior  $r < R$ , es inmediato ver que la solución, tanto en el plano como en infinito, es  $u = a$ ].

**Ej 5.** Sea  $R=1$  y  $f(\theta) = \cos^2 \theta$ . Resolvamos y comparemos con las soluciones en  $r < 1$ .

En el plano, la serie del interior y exterior llevan a la misma condición:

$$\begin{aligned} u(1, \theta) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \rightarrow \\ u &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} r^2 \cos 2\theta \quad (\text{interior}), \quad u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2r^2} \cos 2\theta \quad (\text{exterior}). \\ \text{[En cartesianas } u &= \frac{1+x^2-y^2}{2} \text{ y } u = \frac{1}{2} + \frac{x^2-y^2}{2(x^2+y^2)^2}, \text{ respectivamente].} \end{aligned}$$

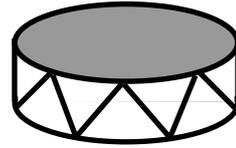


Para el espacio, el interior ya se ha resuelto en el ejemplo 2. Y en el exterior la condición que aparece al hacer  $r=1$  vuelve a coincidir con la del interior.

Las soluciones respectivas son, pues:

$$u = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} r^2 + r^2 \cos^2 \theta \quad (\text{interior}), \quad u = \frac{1}{3r} - \frac{1}{3r^3} + \frac{1}{r^3} \cos^2 \theta \quad (\text{exterior}).$$

Si los problemas ‘esféricos’ llevan a Legendre, los ‘cilíndricos’ (Laplace en polares más otra coordenada,  $t$  en calor y ondas,  $z$  en Laplace) llevan a Bessel, como sucede en los problemas de **vibración de una membrana circular** (de un tambor).



Como hicimos con Laplace en la esfera, para empezar tratamos el caso más sencillo con 2 variables en el que la vibración no depende de  $\theta$ . Y para simplificar aún más suponemos que inicialmente es  $u_t=0$ :

$$\begin{cases} u_{tt} - [u_{rr} + \frac{1}{r}u_r] = 0, & r \leq 1, t \in \mathbf{R} \\ u(r, 0) = f(r), & u_t(r, 0) = 0 \\ u(1, t) = 0 \end{cases}$$

[Las vibraciones con simetría radial en el espacio, como se vio en 3.1, son más sencillas].

$$u = RT \rightarrow \frac{T''}{T} = \frac{R'' + \frac{R'}{r}}{R} = -\lambda \rightarrow \begin{cases} [rR']' + \lambda rR = 0, & R \text{ acotada en } 0, R(1) = 0 \\ T'' + \lambda T = 0, & T'(0) = 0 \rightarrow \{ \cos(\sqrt{\lambda} t) \} \end{cases}$$

El problema de contorno singular para la  $R$  fue visto al final de 2.1. Recordemos que con  $s=r\sqrt{\lambda}$  desaparecía  $\lambda$  y la ecuación pasaba a ser una de Bessel:

$$sR''(s) + R'(s) + sR(s) = 0 \rightarrow R = c_1 J_0(s) + c_2 K_0(s) = c_1 J_0(r\sqrt{\lambda}) + c_2 K_0(r\sqrt{\lambda})$$

Imponiendo los datos se tenían los autovalores  $\lambda_n$  tales que  $J_0(\sqrt{\lambda_n}) = 0$ , y las autofunciones asociadas  $R_n = \{ J_0(r\sqrt{\lambda_n}) \}$ .

Nos falta imponer la condición inicial que falta a la serie:

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(\sqrt{\lambda_n} t) J_0(r\sqrt{\lambda_n}) \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(r\sqrt{\lambda_n}) = f(r)$$

Este desarrollo ya lo discutimos en el último ejemplo de 2.2. Allí vimos que era:

$$c_n = \frac{2}{J_1^2(\sqrt{\lambda_n})} \int_0^1 r f(r) J_0(r\sqrt{\lambda_n}) dr$$

**Ej 6.** Hallemos si  $f(r) = 1 - r^2$  la integral  $\int_0^1 (r - r^3) J_0(rw_n) dr$ ,  $w_n = \sqrt{\lambda_n}$ , que define  $c_n$ .

$$\text{Haciendo } s = rw_n : \int_0^1 = \frac{1}{w_n^2} \int_0^{w_n} s J_0(s) ds - \frac{1}{w_n^4} \int_0^{w_n} s^3 J_0(s) ds.$$

La primera primitiva es inmediata, pues  $[sJ_1]' = sJ_0$ . La segunda, por partes:

$$\int s^2 s J_0 ds = s^3 J_1 - 2 \int s^2 J_1 ds = s^3 J_1 - 2s^2 J_2 = (s^3 - 4s) J_1 + 2s^2 J_0,$$

ya que  $[s^2 J_2]' = s^2 J_1$  y  $J_{n+1} = \frac{2n}{s} J_n - J_{n-1}$ . Y como  $J_0(w_n) = 0$  concluimos:

$$\int_0^1 = \frac{4}{w_n^3} J_1(w_n) \Rightarrow u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{w_n^3 J_1(w_n)} \cos(w_n t) J_0(w_n r).$$

Pese a su aspecto complicado, esta solución no lo es mucho más que la  $\sum k_n \cos(n\pi t) \sin(n\pi x)$  que se obtendría para la cuerda vibrante con datos similares (lo resolvimos en 3.1).

En muchos libros (o en programas tipo Maple o Sage) se pueden encontrar los ceros  $w_n$  de  $J_0$ :

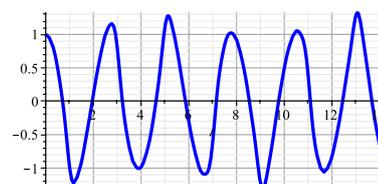
$$\{w_n\} \approx 2.4048256, 5.5200781, 8.6537279, 11.791534, 14.930918, \dots$$

y los valores de  $J_1(w_n)$ : 0.519147, -0.340265, 0.271452, -0.232461, 0.206547, ...

Necesitamos sólo un programa que reconozca la  $J_0$  para dar valores o hacer dibujos aproximados de la solución. Por ejemplo, utilizando los 5 primeros términos de la serie, podemos (con Maple en este caso) aproximar y dibujar  $u(0, t)$ :

$$\begin{aligned} u(0, t) \approx & 1.108 \cos(2.405 t) - 0.1398 \cos(5.520 t) \\ & + 0.04548 \cos(8.654 t) - 0.02099 \cos(11.79 t) \\ & + 0.01164 \cos(14.93 t) \end{aligned}$$

Las vibraciones de un tambor, a diferencia de lo que pasa a una cuerda, no son periódicas (los  $w_n$  no son múltiplos exactos unos de otros).



Para acabar esta sección, tratemos el problema más general y complicado en 3 variables:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 [u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}] = 0, & r \leq 1, t \in \mathbf{R} \\ u(r, \theta, 0) = f(r, \theta), & u_t(r, \theta, 0) = 0 \\ u(1, \theta, t) = 0 \end{cases}$$

$$u = R\Theta T \rightarrow \frac{T''}{c^2 T} = \frac{R'' + \frac{R'}{r}}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''}{\Theta} = -\lambda \rightarrow \frac{r^2 R'' + rR'}{R} + \lambda r^2 = \frac{\Theta''}{\Theta} = -\mu \rightarrow$$

$$\begin{cases} \Theta'' + \mu\Theta = 0, & \Theta \text{ } 2\pi\text{-periódica} \rightarrow \mu_m = m^2, m=0, 1, \dots, \Theta_m = \{\cos m\theta, \sin m\theta\}, \Theta_0 = \{1\} \\ T'' + \lambda c^2 T = 0, & T'(0) = 0 \rightarrow \{\cos[\sqrt{\lambda} ct]\} \\ r^2 R'' + rR' + [\lambda r^2 - \mu]R = 0, & R \text{ acotada en } 0 \end{cases}$$

Para  $\mu = m^2$  consideramos el problema de contorno singular para  $R$ :

$$\begin{cases} r^2 R'' + rR' + [\lambda r^2 - m^2]R = 0 \\ R \text{ acotada en } 0, R(1) = 0 \end{cases}$$

Haciendo  $s = r\sqrt{\lambda}$  desaparece como siempre  $\lambda$  y la ecuación se convierte en Bessel:

$$s^2 R''(s) + sR'(s) + [s^2 - m^2]R(s) = 0 \rightarrow$$

$$R = c_1 J_m(s) + c_2 K_m(s) = c_1 J_m(r\sqrt{\lambda}) + c_2 K_m(r\sqrt{\lambda})$$

$R$  acotada  $\Rightarrow c_2 = 0$ . Los autovalores serán los  $\lambda$  que hagan  $J_m(\sqrt{\lambda}) = 0$ , que son una sucesión infinita para cada  $m$ :  $\lambda_{m_1}, \dots, \lambda_{m_k}, \dots$

Y las autofunciones son  $R_{mk} = \{J_m(r\sqrt{\lambda_{m_k}})\}$ . Así que probamos:

$$u(r, \theta, t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} c_{0k} J_0(r\sqrt{\lambda_{0k}}) \cos(c\sqrt{\lambda_{0k}} t) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} [c_{mk} \cos n\theta + d_{nk} \sin n\theta] J_m(r\sqrt{\lambda_{m_k}}) \cos(c\sqrt{\lambda_{m_k}} t)$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} c_{0k} J_0(r\sqrt{\lambda_{0k}}) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} [c_{mk} \cos n\theta + d_{nk} \sin n\theta] J_m(r\sqrt{\lambda_{m_k}}) = f(r, \theta)$$

Para  $r$  fijo,  $f(r, \theta) = \frac{1}{2} A_0(r) + \sum_{m=1}^{\infty} [A_m(r) \cos m\theta + B_m(r) \sin m\theta]$ , con

$$A_m(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \theta) \cos m\theta d\theta, m=0, 1, \dots,$$

$$B_m(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \theta) \sin m\theta d\theta, m=1, 2, \dots$$

Desarrollando:

$$A_m(r) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{mk} J_m(r\sqrt{\lambda_{m_k}}), B_m(r) = \sum_{k=1}^{\infty} d_{mk} J_m(r\sqrt{\lambda_{m_k}})$$

Teniendo en cuenta que  $\int_0^1 r J_m^2(r\sqrt{\lambda_{m_k}}) dr = \frac{1}{2} J_{m+1}^2(\sqrt{\lambda_{m_k}})$ ,

se llega a la expresión definitiva para los coeficientes:

$$\begin{cases} c_{nk} = \frac{2}{\pi J_{m+1}^2(\sqrt{\lambda_{m_k}})} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r f(r, \theta) \cos n\theta J_m(r\sqrt{\lambda_{m_k}}) dr d\theta \\ d_{nk} = \frac{2}{\pi J_{m+1}^2(\sqrt{\lambda_{m_k}})} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r f(r, \theta) \sin n\theta J_m(r\sqrt{\lambda_{m_k}}) dr d\theta \end{cases}$$

### 3.4. Funciones de Green.

[En lo que sigue trabajaremos formalmente con la  $\delta$  en dos variables, utilizando sólo que:

- i.  $\delta(\xi-x, \eta-y) = 0$  para  $(\xi, \eta) \neq (x, y)$
- ii.  $\iint_D F(\xi, \eta) \delta(\xi-x, \eta-y) d\xi d\eta = F(x, y)$  si  $F$  continua en  $D \subset \mathbf{R}^2$  y  $(x, y) \in D$  ].

Consideremos el **problema de Dirichlet no homogéneo**:

$$(P_D) \begin{cases} \Delta u = F(x, y) & \text{en } D \\ u = f & \text{en } \partial D \end{cases}$$

Nuestro objetivo es (como en 2.4) expresar su solución en función de integrales en las que sólo aparezcan una 'función de Green'  $G$  y los datos  $F$  y  $f$ :

**Teor 1:** Si  $G(x, y; \xi, \eta)$  satisface  $(P_G) \begin{cases} \Delta G = \delta(\xi-x, \eta-y) & \text{en } D \\ G = 0 & \text{en } \partial D \end{cases}$ , para cada  $(x, y) \in D$  y vista como función de  $(\xi, \eta)$ , se le llama **función de Green de  $(P_D)$**  y la solución de  $(P_D)$  es

$$u(x, y) = \iint_D G(x, y; \xi, \eta) F(\xi, \eta) d\xi d\eta + \oint_{\partial D} G_n(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta) ds$$

[  $G_n$  es, como siempre, la derivada de  $G$  en la dirección de  $\mathbf{n}$ , vector unitario exterior a  $D$  ].

Del teorema de la divergencia es fácil deducir la llamada segunda identidad de Green:

$$\text{Si } u \text{ y } G \text{ son } C^2(\bar{D}) \text{ se tiene } \iint_D [G \Delta u - u \Delta G] d\xi d\eta = \oint_{\partial D} [G u_n - u G_n] ds$$

Si  $u$  es la solución de  $(P_D)$  y  $G$  la de  $(P_G)$ , y admitimos que la identidad anterior es válida para nuestra  $G$  (que claramente no es  $C^2$ , pero se justifica con 'distribuciones') tenemos:

$$\iint_D [G F - u \delta] d\xi d\eta = \oint_{\partial D} [-f G_n] ds \rightarrow u = \iint_D G F d\xi d\eta + \oint_{\partial D} G_n f ds$$

¿Cómo resolver  $(P_G)$ ? Comencemos buscando una  $v(x, y; \xi, \eta)$  que, vista como función de  $(\xi, \eta)$ , satisfaga  $\Delta v = \delta$ , aunque no cumpla la condición de contorno. ¿Qué funciones conocidas cumplen  $\Delta v = 0$  y puedan originar una  $\delta$ ? Las soluciones de Laplace en polares que dependen de  $r$  son:

$$v_{rr} + \frac{1}{r} v_r = 0 \rightarrow v = c_1 + c_2 \ln r$$

Así que algún múltiplo del discontinuo logaritmo de la distancia  $r = \overline{PQ}$  del punto  $P = (\xi, \eta)$  al  $Q = (x, y)$  es buen candidato a  $v$ :

**Teor 2:**  $v = \frac{1}{4\pi} \ln [(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2] = \frac{1}{2\pi} \ln \overline{PQ}$  satisface  $\Delta v = \delta(\xi-x, \eta-y)$  para  $(x, y)$  fijo. A  $v$  se le llama **solución fundamental** para el punto  $(x, y)$ .

Para probar el teorema volvemos a hacer 'trampa' con la  $\delta$ . Ya vimos que  $\Delta v = 0$  si  $r \neq 0$ , o sea, si  $(\xi, \eta) \neq (x, y)$ . Además, el 'teorema' de la divergencia en un círculo de centro  $Q$  y radio  $R$  nos da:

$$\iint_{r \leq R} \Delta v d\xi d\eta = \oint_{r=R} v_n ds = \oint_{r=R} v_r ds = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi R} R d\theta = 1 \rightarrow \Delta v = \delta$$

Si  $w$  satisface  $\Delta w = 0$  en  $D$ , la función  $v+w$  seguirá satisfaciendo  $\Delta[v+w] = \delta$  para cada  $(x, y) \in D$  fijo. Por tanto, **para encontrar  $G$**  [y tener resuelto  $(P_D)$ ]

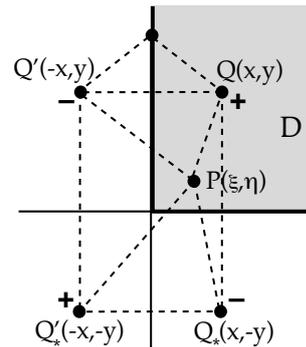
basta encontrar la  $w$  armónica en  $D$  tal que  $v+w = G$  se anule en la frontera  $\partial D$

La forma práctica de hallar la  $w$  (en recintos  $D$  limitados por rectas y circunferencias) es el **método de las imágenes**. Mirando la geometría de  $D$  se tratará de escribir  $G$  como suma de la solución fundamental  $v$  y de funciones armónicas  $w$  del mismo tipo, logaritmos de distancias a puntos  $Q'$  **exteriores** a  $D$  ('imágenes' de  $Q$  respecto de la  $\partial D$ ), escogidos de forma que la  $G$  se anule en la frontera de  $D$ . Resolvemos un primer ejemplo con la  $G$ , en el que  $D$  está limitado por rectas:

$$(P_1) \begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } D = \{x > 0\} \times \{y > 0\} \\ u(x, 0) = f(x), u(0, y) = 0, u \text{ acotada} \end{cases}$$

Sean  $Q = (x, y) \in D$  fijo,  
 $P = (\xi, \eta)$ ,  $v = \frac{1}{2\pi} \ln \overline{PQ}$ .

Si  $Q' = (-x, y)$ , es claro que  $w' = -\frac{1}{2\pi} \ln \overline{PQ'}$  es una función de  $P$  que es armónica en  $D$  (lo es en  $\mathbf{R}^2 - \{Q'\}$ ) y que  $v + w' = 0$  si  $P$  pertenece al eje  $y$ , pues entonces  $\overline{PQ} = \overline{PQ'}$ . Análogamente  $w_* = -\frac{1}{2\pi} \ln \overline{PQ_*}$ , con  $Q_* = (x, -y)$ , es armónica en  $D$  y  $v + w_* = 0$  si  $P$  está en el eje  $x$ . Para que  $G$  sea cero en ambos ejes a la vez hay que sumar una nueva  $w'_* = -\frac{1}{2\pi} \ln \overline{PQ'_*}$ ,  $Q'_* = (-x, -y)$ . Entonces  $G(P, Q) = v + w' + w_* + w'_*$  es la función de Green buscada, ya que  $\Delta G = \delta$  [pues  $\Delta v = \delta$  y  $\Delta(w' + w_* + w'_*) = 0$ ] y  $G = 0$  si  $P \in \partial D$  [si  $P$  está en el eje  $y$  es  $\overline{PQ} = \overline{PQ'}$  y  $\overline{PQ_*} = \overline{PQ'_*}$ ; y similar en el eje  $x$ ].



Escribiendo las distancias analíticamente tenemos:

$$G(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{4\pi} \ln [(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2] - \frac{1}{4\pi} \ln [(\xi+x)^2 + (\eta-y)^2] \\ - \frac{1}{4\pi} \ln [(\xi-x)^2 + (\eta+y)^2] + \frac{1}{4\pi} \ln [(\xi+x)^2 + (\eta+y)^2]$$

Y como  $\mathbf{n} = -\mathbf{j}$  en el eje  $x$ , la solución de nuestro problema  $(P_1)$  será:

$$u(x, y) = \oint_{\partial D} G \mathbf{n} f ds = \int_0^\infty -G_\eta|_{\eta=0} f(\xi) d\xi = \dots = \frac{y}{\pi} \int_0^\infty \left[ \frac{1}{(\xi-x)^2 + y^2} - \frac{1}{(\xi+x)^2 + y^2} \right] f(\xi) d\xi$$

Resolvamos ahora el **problema no homogéneo de Dirichlet en el círculo**:

$$(P_2) \begin{cases} \Delta u = F(r, \theta) \text{ en } r < R \\ u(R, \theta) = f(\theta), \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

$Q = (r, \theta) \in D$  fijo,  
 $P = (\sigma, \phi)$  variable.

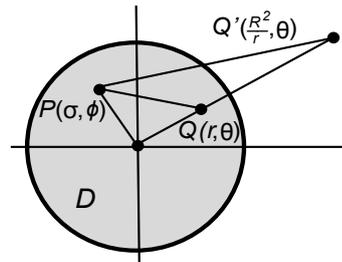
La solución fundamental  $v$  en estas coordenadas queda:

$$v = \frac{1}{2\pi} \ln \overline{PQ} = \frac{1}{4\pi} \ln [\sigma^2 + r^2 - 2\sigma r \cos(\theta - \phi)]$$

¿Dónde situar el punto imagen  $Q'$ ? Las cosas no son tan claras como en el ejemplo anterior. Es claro que su  $\theta$  ha de ser igual, pero ¿a qué distancia del origen  $O$  colocarlo?

Podríamos llegar al resultado tanteando, pero nos limitamos a comprobar que la  $G$  es:

$$G(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \left[ \ln \overline{PQ} - \ln \overline{PQ'} + \ln \frac{R}{r} \right], \quad Q' = \left( \frac{R^2}{r}, \theta \right),$$



o expresada en términos de coordenadas:

$$G(r, \theta; \sigma, \phi) = \frac{1}{4\pi} \ln [\sigma^2 + r^2 - 2\sigma r \cos(\theta - \phi)] - \frac{1}{4\pi} \ln \left[ R^2 + \frac{r^2 \sigma^2}{R^2} - 2\sigma r \cos(\theta - \phi) \right]$$

En efecto:  $G = v + v' + cte \Rightarrow \Delta G = 0$  [ $v'$  armónica en  $R^2 - \{Q'\}$  y  $Q' \notin D$ ] y  $G = 0$  si  $P \in \partial D$ , o sea, si  $\sigma = R$ . Además,  $G_\mathbf{n} = G_\sigma|_{\sigma=R}$  y  $ds = R d\phi$ , por lo que la solución de  $(P_2)$  es:

$$u(r, \theta) = \int_0^R \int_0^{2\pi} \sigma G(r, \theta; \sigma, \phi) F(\sigma, \phi) d\phi d\sigma + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi) + r^2} f(\phi) d\phi$$

expresión mucho más compacta que las series de Fourier, aunque estas integrales, en general, no sean calculables (y habrá que aproximarlas, pero son aproximaciones también las sumas parciales).

Las cuentas en **tres dimensiones** son muy similares a los de dos. Si  $G$  es solución de  $(P_G)$ :

$$u(x, y, z) = \iiint_D G F d\xi d\eta d\gamma + \oint_{\partial D} G \mathbf{n} f dS \quad (\partial D \text{ es ahora una superficie})$$

Se ve de manera similar que la solución fundamental en el espacio es:

$$v = -\frac{1}{4\pi PQ} \quad [v_{rr} + \frac{2}{r} v_r = 0 \rightarrow v = c_1 + \frac{c_2}{r}]$$

Los puntos imágenes respecto a planos son igual de sencillos y para la esfera de radio  $R$  vuelve a situarse el punto  $Q'$  a una distancia  $R^2/r$  del origen.