

4. Otros métodos en EDPs

Este capítulo está dedicado al estudio de varios temas independientes entre sí. En 4.1 nos dedicaremos a sacarle jugo a la **fórmula de D'Alembert** deducida en 1.3 para la solución del problema puro de valores iniciales para la cuerda infinita:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

Utilizaremos que la solución $u(x, t)$ resulta ser la suma de dos ondas que se mueven en sentido opuesto a velocidad c . Daremos también una fórmula para las soluciones en el caso de la **ecuación no homogénea** (con fuerzas externas $F(x, t)$). Comprobaremos como, **extendiendo de forma adecuada los datos iniciales** a todo \mathbf{R} , podemos abordar problemas con **condiciones de contorno**. Al estar manejando funciones con expresiones diferentes en diferentes intervalos, escribir la solución explícitamente nos puede llevar a discusiones complicadas. Por eso nos conformaremos muchas veces con hallar su expresión para valores de t o x fijos o con los dibujos de la solución.

En 4.2 comenzaremos dando sin demostración la solución del problema puro de valores iniciales para la ecuación de ondas homogénea en el **espacio (fórmula de Poisson-Kirchoff)**. De ella deduciremos la fórmula para el **plano**. Estudiaremos las diferencias entre la propagación de las ondas en una, dos y tres dimensiones espaciales. Comprobaremos que las ondas en el espacio 'pasan' (como ocurre con el sonido), mientras que en el plano la influencia de los datos iniciales se deja sentir, aunque amortiguándose, a lo largo del tiempo (en la recta dependerá de si la perturbación inicial se da en la posición o en la velocidad). Estudiaremos también las ondas que se propagan en el espacio con **simetría esférica** que son de tratamiento sencillo, por ser esencialmente unidimensionales, ya que un sencillo cambio de variable lleva a la ecuación de la cuerda (para $n=2$ no existe tal cambio).

En la sección 4.3 definiremos la **transformada de Fourier** \mathcal{F} y veremos algunas de sus propiedades que permiten resolver algunas EDPs en **intervalos no acotados** (para ellos no se puede utilizar separación de variables por no aparecer problemas de Sturm-Liouville). Como ocurre con la transformada de Laplace para las EDOs, aplicando la \mathcal{F} a algún problema para EDPs acabaremos en otro más sencillo (de EDOs, para las ecuaciones en dos variables que tratamos). Resuelto este segundo problema, para hallar la solución habrá que encontrar una transformada inversa. Para problemas en semirectas introduciremos también las transformadas seno y coseno. En particular (además de otros problemas), las transformadas de Fourier nos permitirán resolver problemas de la **ecuación del calor en varillas no acotadas** (no resolubles con las técnicas de los capítulos anteriores) como:

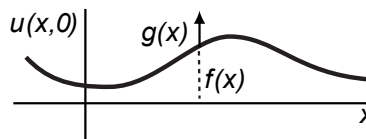
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in \mathbf{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & u \text{ acotada} \end{cases}$$

Aparecerá la solución fundamental de la ecuación del calor y se comprobará que, según nuestra ecuación matemática, el calor se transmite a velocidad infinita.

4.1. Ecuación de la cuerda vibrante

En el capítulo 1 vimos que para el **problema puro de valores iniciales**:

$$(P_1) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$



las características eran $x \pm ct = K$, la solución general

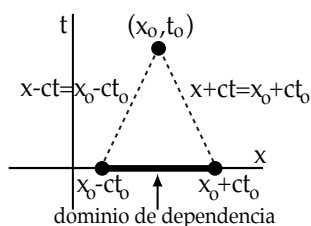
$$u(x, t) = p(x+ct) + q(x-ct), \quad p \text{ y } q \text{ funciones arbitrarias de } C^2,$$

y la solución única de (P_1) , satisfaciendo ya los datos iniciales:

$$\text{Fórmula de D'Alembert} \quad u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds \quad [1]$$

Para que u sea C^2 , debía $f \in C^2$ y $g \in C^1$ (entonces es **solución clásica o regular**).

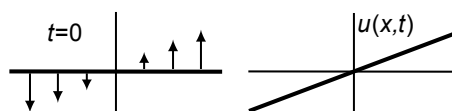
[Si u es continua pero no C^2 se llama 'solución débil', concepto típico EDPs. En cada caso hay que precisar que se admite como solución débil y comprobar que el problema sigue bien planteado (si hay más funciones que valen como soluciones, ¿seguirá la unicidad?).]



Observemos que $u(x_0, t_0)$ sólo depende de los valores de f en los puntos $x_0 - ct_0$ y $x_0 + ct_0$ [puntos de corte con el eje x de las características que pasan por (x_0, t_0)] y de los de g en el intervalo $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$. A este intervalo se le llama **dominio de dependencia** del punto (x_0, t_0) [de los valores iniciales f y g ; el dominio de dependencia de los valores de f se reduce a los extremos].

Ej 1. Sea $f(x)=0, g(x)=x \rightarrow u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} s ds = \frac{1}{4c} [s^2]_{x-ct}^{x+ct} = tx$.

[La cuerda infinita se inclina progresivamente, cosa poco real. La ecuación es sólo un modelo simplificado. Más interés (y más complicación de análisis) tienen los problemas en los que los datos son no nulos sólo en intervalos acotados].



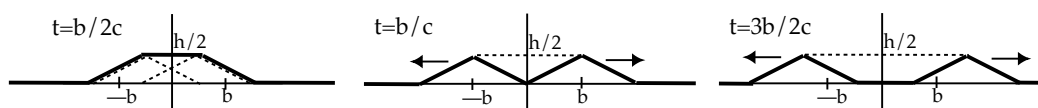
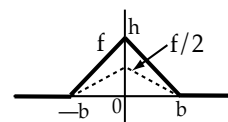
La solución de (P_1) es la suma de dos ondas que viajan a velocidad c , una hacia las x crecientes y otra hacia las decrecientes. A la vista de [1]:

$$\text{Llamando } G(x) \equiv \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds: \quad \begin{aligned} q(x) &= \frac{1}{2} f(x) - G(x) \text{ va hacia la derecha} \\ p(x) &= \frac{1}{2} f(x) + G(x) \text{ va hacia la izquierda} \end{aligned}$$

Para obtener un dibujo de la solución $u(x, t)$ en diferentes instantes, identificadas estas ondas viajeras, bastará trasladar sus gráficas y sumarlas (gráficamente).

Ej 2. Supongamos $f=0$ salvo una perturbación en forma de triángulo en torno a 0 y que soltamos la cuerda sin impulso ($g=0$).

Dibujemos la solución para diferentes t . Basta trasladar las dos ondas que viajan en sentidos opuestos [aquí ambas son $\frac{1}{2}f(x)$]:



Ha costado muy poco hacer estos dibujos y predecir la evolución de esta solución débil [bastante más costaría dar la expresión analítica de la solución para todo x y todo t]. Los picos de la f inicial se mantienen indefinidamente y viajan también a velocidad c .

Supongamos ahora que hay **fuerzas externas**. El problema es:

$$(P_2) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), & x, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

Necesitamos sólo la solución u_F del problema con $f=g=0$, pues, por la linealidad, si u_1 es la solución del (P_1) anterior, es $u_1 + u_F$ la solución de (P_2) . Sabiendo algo de derivación de integrales, no es difícil deducir que

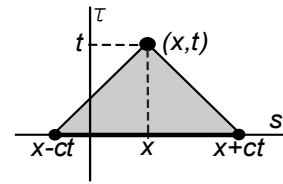
$$u_F(x, t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c[t-\tau]}^{x+c[t-\tau]} F(s, \tau) ds d\tau \quad \text{satisface} \quad \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t) \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

Por tanto, concluimos que la solución de (P_2) es:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c[t-\tau]}^{x+c[t-\tau]} F(s, \tau) ds d\tau \quad [2]$$

Se comprueba que el recinto descrito por la integral doble es el triángulo del plano $s\tau$ limitado por el eje $\tau=0$ y las características que pasan por (x, t) . Así pues, para hallar la solución u en un punto (x, t) se necesita sólo:

- los valores de F en dicho triángulo,
- los de g en su base y
- los de f en los dos puntos $x-ct$ y $x+ct$.



Ej 3. $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 2 \\ u(x, 0) = x, & u_t(x, 0) = 3 \end{cases}$ Utilizando directamente [2]:

$$u = \frac{1}{2} [(x+t) + (x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} 3 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-[t-\tau]}^{x+[t-\tau]} 2 ds d\tau = x + 3t + 2 \int_0^t [t-\tau] d\tau = x + 3t + t^2$$

A veces es fácil hallar una solución particular v de la ecuación no homogénea y así evitar el cálculo de la integral doble, pues $w = u - v$ conduce a un problema con $F=0$, resoluble con [1] (esto no se podrá hacer siempre cuando haya condiciones de contorno, pues podrían dejar de ser homogéneas). Por ejemplo si f depende sólo de x o de t se puede buscar una $v(x)$ o una $v(t)$. En este caso:

$$-v_{xx} = 2 \rightarrow v = -x^2 + Cx + K \rightarrow \text{si } v(x) = -x^2, w \text{ cumple} \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0 \\ w(x, 0) = x + x^2, & w_t(x, 0) = 3 \end{cases}$$

$$\rightarrow w = \frac{1}{2} [(x+t) + (x+t)^2 + (x-t) + (x-t)^2] + \int_{x-t}^{x+t} 3 ds = x + x^2 + t^2 + 3t \rightarrow u = x + 3t + t^2$$

$$v_{tt} = 2 \rightarrow v(t) = t^2 + 3t \rightarrow \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0 \\ w(x, 0) = x, & w_t(x, 0) = 0 \end{cases} \rightarrow w = x \rightarrow u = x + 3t + t^2$$

Resolvamos ahora el problema para la **cuerda semi-infinita** y fija en un extremo:

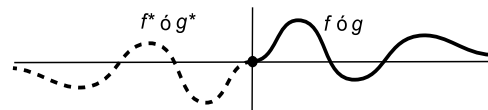
$$(P_3) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x) \\ u(0, t) = 0 \end{cases} \quad \text{[para que no esté rota, debe ser } f(0)=0 \text{].}$$

La fórmula [1] exige funciones definidas $\forall x$. ¿Cómo extender f y g a todo \mathbf{R} ? Si llamamos f^* y g^* a sus extensiones se debe cumplir la condición de contorno:

$$u(0, t) = \frac{1}{2} [f^*(ct) + f^*(-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{-ct}^{ct} g^*(s) ds = 0.$$

Es claro que f^* y g^* han de ser **impares** respecto a 0, es decir,

$$f^*(-x) = -f^*(x); \quad g^*(-x) = -g^*(x).$$



Así pues, la solución de (P_3) es la del siguiente problema (para la cuerda infinita):

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f^*(x) \\ u_t(x, 0) = g^*(x) \end{cases}, \quad u(x, t) = \frac{1}{2} [f^*(x+ct) + f^*(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g^*(s) ds \quad [3]$$

pues u cumple la ecuación, las condiciones iniciales para $x \geq 0$, y la de contorno.

Siguiendo con la cuerda semi-infinita, veamos como se resuelve el problema más general con fuerzas externas y extremo móvil:

$$(P_4) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), & x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x) \\ u(0, t) = h_0(t) \end{cases} \quad \text{[debe ahora ser } f(0) = h_0(0) \text{].}$$

Primero **debemos hacer la condición de contorno homogénea**, encontrando una v que la cumpla y haciendo $w = u - v$.

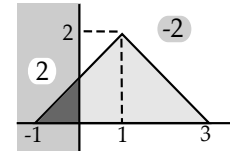
La v más clara (no siempre la mejor) es: $v(t) = h_0(t)$.

Una vez que tenemos la condición de contorno homogénea, la solución del problema en w la da [2] si sustituimos sus f, g y F por f^*, g^* y F^* , siendo ésta última la **extensión impar de F mirándola como función de x** .

Ej 4. $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = t^2 \end{cases}$ Hallemos primero la solución para un x y t fijos: $u(1, 2)$.

Para anular la condición de contorno podemos usar la v de arriba:

$$w = u - t^2 \rightarrow \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = -2 \\ w(x, 0) = w_t(x, 0) = 0 \\ w(0, t) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ -2, & x > 0 \end{cases} \\ w(x, 0) = w_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$



$$w(1, 2) = \frac{1}{2} \iint_{\Delta} F^* = \frac{1}{2} [(2) \text{área } \blacktriangle + (-2) \text{área } \triangle] = -3 \rightarrow u(1, 2) = -3 + 4 = 1.$$

[Por ser constantes las F a integrar, nos hemos ahorrado el cálculo de integrales dobles. Pero como esto no se podrá hacer en general, vamos a perder un poco el tiempo en hallar $w(1, 2)$ sin este atajo. El valor que estamos calculando es:

$$w(1, 2) = \frac{1}{2} \iint_{\Delta} F^* = \frac{1}{2} \int_0^2 \int_{\tau-1}^{3-\tau} F^*(s, \tau) ds d\tau$$

Sobre el triángulo pequeño la integral viene dada por:

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\tau-1}^0 2 ds d\tau = \int_0^1 (1-\tau) d\tau = \frac{1}{2}.$$

Para el otro cuadrilátero hay que dividir en dos el recinto de integración:

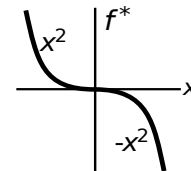
$$\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{3-\tau} (-2) ds d\tau + \frac{1}{2} \int_1^2 \int_{\tau-1}^{3-\tau} (-2) ds d\tau = \int_0^1 (\tau-3) d\tau + \int_1^2 (2\tau-4) d\tau = -\frac{7}{2}.$$

Sumando ambos resultados obtenemos $w(1, 2) = -3$ como antes].

Pero podríamos conseguir un problema sin F (que siempre es complicado), haciendo el cambio con una v mejor. Tanteando un poco se ve que $v = x^2 + t^2$ cumple la condición y también la ecuación:

$$w = u - v \rightarrow \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0 \\ w(x, 0) = -x^2, & w_t(x, 0) = 0 \\ w(0, t) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0, & x, t \in \mathbf{R} \\ w(x, 0) = f^*(x) \\ w_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow w(1, 2) = \frac{1}{2} [f^*(3) + f^*(-1)] = -4 \rightarrow u(1, 2) = 5 - 4 = 1$$



Con este segundo cambio no es difícil dar la $u(x, t)$ para todo $x, t \geq 0$ (con el primero nos costaría mucho más). Está claro que hay que considerar **dos posibilidades**, pues, aunque $x+t$ es siempre positivo, $x-t$ puede ser también negativo, y la f^* tiene expresiones distintas para valores positivos y negativos:

$$w = \frac{1}{2} [f^*(x+t) + f^*(x-t)] = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x+t)^2 + \frac{1}{2}(x-t)^2 = -2tx, & x \leq t \\ -\frac{1}{2}(x+t)^2 - \frac{1}{2}(x-t)^2 = -x^2 - t^2, & x \geq t \end{cases} \rightarrow u = \begin{cases} (x-t)^2, & x \leq t \\ 0, & x \geq t \end{cases}$$

[Como las ondas viajan a velocidad $c=1$ los puntos a distancia $\geq t$ debían estar parados en el instante t].

En 4.2 veremos que **los problemas de ondas en el espacio con simetría radial se reducen con el cambio $v = ur$ a problemas de cuerdas semi-infinitas**.

Estudiamos la **cuerda acotada** y fija en ambos extremos [resuelta ya en 3.1]:

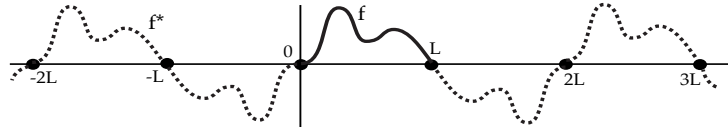


$$(P_5) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x \in [0, L], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x) \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \end{cases}$$

[debe ser $f(0) = f(L) = 0$].

Para hallar su solución única con la fórmula de D'Alembert **extendemos f y g a $[-L, L]$ de forma impar respecto a 0 y luego de forma $2L$ -periódica a todo \mathbf{R}** , es decir, llamando f^* y g^* a estas extensiones:

$$f^*(-x) = -f^*(x), f^*(x+2L) = f^*(x); \quad g^*(-x) = -g^*(x), g^*(x+2L) = g^*(x).$$



(se tiene entonces que f^* y g^* son también impares respecto a L).

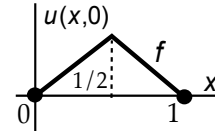
Como para (P_3) , la solución de (P_5) se obtiene aplicando [3] al siguiente problema (por la imparidad de los datos se cumplen también las condiciones de contorno):

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f^*(x), & u_t(x, 0) = g^*(x) \end{cases}$$

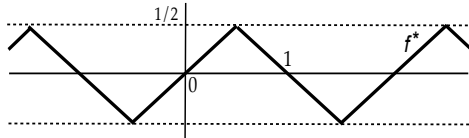
Para que la u dada por [3] sea C^2 (regular) deben $f \in C^2[0, L]$ y $g \in C^1[0, L]$ y además: $f(0) = f(L) = f''(0) = f''(L) = g(0) = g(L) = 0$ [f' y g' existen en 0 y L por la imparidad].

Ej 5.
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in [0, 1], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1-x, & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \\ u_t(x, 0) = u(0, t) = u(1, t) = 0 \end{cases}$$

(Puede representar la pulsación de la cuerda de una guitarra).



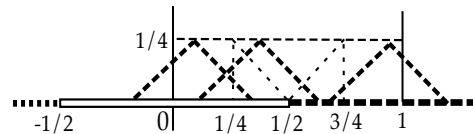
Es complicado hallar explícitamente $u(x, t) \forall x, t$ pues f^* tiene muchas expresiones:



$$f^*(x) = \begin{cases} \dots \\ -1-x, & -3/2 \leq x \leq -1/2 \\ x, & -1/2 \leq x \leq 1/2 \\ 1-x, & 1/2 \leq x \leq 3/2 \\ x-2, & 3/2 \leq x \leq 5/2 \\ \dots \end{cases}$$

Hallar $u(x, t) = \frac{1}{2}[f^*(x+t) + f^*(x-t)]$ exigiría discutir en qué intervalos se mueven $x+t$ y $x-t$ y sería muy largo (para estas discusiones conviene dibujar los dominios de dependencia). Algo más fácil es hallar la solución para un t o x fijos. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} u(x, \frac{1}{4}) &= \frac{1}{2}[f^*(x+\frac{1}{4}) + f^*(x-\frac{1}{4})] \\ &= \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{1}{8} + \frac{x}{2} - \frac{1}{8} = x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} - \frac{x}{2} + \frac{x}{2} - \frac{1}{8} = \frac{1}{4}, & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ \frac{3}{8} - \frac{x}{2} + \frac{5}{8} - \frac{x}{2} = 1-x, & \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

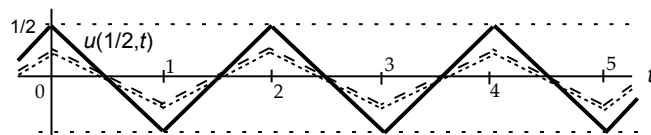


Sí es muy fácil hallar u para un (x, t) dado. No se necesita siquiera la expresión de f^* .

Por ejemplo: $u(\frac{1}{4}, 3) = \frac{1}{2}[f^*(\frac{13}{4}) + f^*(-\frac{11}{4})] = \frac{1}{2}[f^*(-\frac{3}{4}) + f^*(-\frac{3}{4})] = -f^*(\frac{3}{4}) = -\frac{1}{4}$.
 f^* es 2-periódica f^* es impar

Tampoco se necesita la expresión de f^* para hacer dibujos: basta trasladar ondas y sumar.

Dibujemos: $u(\frac{1}{2}, t) = [f^*(\frac{1}{2}+t) + f^*(\frac{1}{2}-t)] = [f^*(\frac{1}{2}+t) - f^*(t-\frac{1}{2})]$



La gráfica se repite con periodo 2. Esto es general: por las propiedades de f^* y g^* **la u dada por [3] es $\frac{2L}{c}$ -periódica**. Lo que era evidente en la serie solución dada en 3.1:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \cos n\pi t \sin n\pi x, \quad k_n = 2 \int_0^{1/2} x \sin n\pi x dx + 2 \int_{1/2}^1 (1-x) \sin n\pi x dx = \frac{4 \sin \frac{n\pi}{2}}{n^2 \pi^2}.$$

(Pulsando la cuerda en el centro desaparecen los armónicos pares).

Si queremos resolver el problema más general:

$$(P_6) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), & x \in [0, L], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x) \\ u(0, t) = h_0(t), & u(L, t) = h_L(t) \end{cases}$$

(hay fuerzas externas y movemos los extremos)

primero, como siempre, hay que hacer las condiciones de contorno homogéneas, hallando una v que las cumpla y haciendo $w = u - v$. Una v de esas es la conocida:

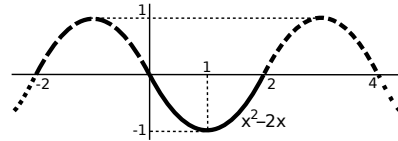
$$v(x, t) = \left[1 - \frac{x}{L}\right] h_0(t) + \frac{x}{L} h_L(t) \quad [\text{a veces será mejor buscar otra}].$$

La solución del problema en w la da de nuevo [2], poniendo en vez de f , g y F , las extensiones impares y $2L$ -periódicas f^* , g^* y F^* (vista F como función de x).

Ej 6.
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in [0, 2], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = x^2, & u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = 0, & u(2, t) = 4 \end{cases}$$
 Hallemos $u(1, 2)$ y $u(x, 1)$, mediante D'Alembert y por separación de variables.

La $v = 2x$ de arriba es adecuada en este caso:

$$w = u - 2x \rightarrow \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0, & x \in [0, 2] \\ w(x, 0) = x^2 - 2x, & w_t(x, 0) = 0 \\ w(0, t) = w(2, t) = 0 \end{cases}$$



Debemos extender f de forma impar y 4 -periódica a f^* definida en \mathbf{R} :

$$\dots, -x(x+2) \text{ en } [-2, 0], x(x-2) \text{ en } [0, 2], -(x-4)(x-2) \text{ en } [2, 4], \dots$$

La solución viene dada por $w = \frac{1}{2} [f^*(x+t) + f^*(x-t)]$. Por tanto:

$$w(1, 2) = \frac{1}{2} [f^*(3) + f^*(-1)] \underset{4\text{per}}{=} \frac{1}{2} [f^*(-1) + f^*(-1)] \underset{\text{impar}}{=} -f(1) = 1 \rightarrow u(1, 2) = 3.$$

Para hallar $w(x, 1)$ aparecen dos casos (se podría ver con los dominios de dependencia):

$$w(x, 1) = \frac{1}{2} [f^*(x+1) + f^*(x-1)] = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1, & \frac{1}{2} [-(x-1)(x+1) + (x+1)(x-1)] = 0 \\ 1 \leq x \leq 2, & \frac{1}{2} [-(x-1)(x-3) + (x-3)(x-1)] = 0 \end{cases} \rightarrow u(x, 1) = 2x.$$

[Es claro que llevando f^* una unidad a izquierda y derecha y sumando todo se cancela].

Para resolver el problema en w separando variables copiamos la solución dada en 3.1:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \cos \frac{n\pi t}{2} \sin \frac{n\pi x}{2} \quad \text{con } k_n = \int_0^2 (x^2 - 2x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{16}{n^3 \pi^3} [\cos n\pi - 1]$$

$$\rightarrow w(x, t) = -\frac{32}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^3} \cos \frac{(2m-1)\pi t}{2} \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2}.$$

Para $t=1$ todos los cosenos se anulan, con lo que $w(x, 1) = 0$ (como por D'Alembert).

$$\text{Además } w(1, 2) = \frac{32}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)^3} \left[= 1; \text{ deducimos que } 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots = \frac{\pi^3}{32} \right].$$

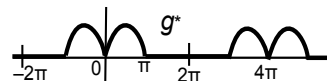
Por último veamos cómo se debe extender si la condición de contorno es $u_x(0, t) = 0$:

$u_x(0, t) = \frac{1}{2} [f^{*'}(ct) + f^{*}'(-ct)] + \frac{1}{2c} [g^*(-ct) - g^*(ct)] = 0$, $f^{*'}$ impar y g^* par \Rightarrow se deben extender f y g de forma **par** respecto a 0 (o respecto a L si fuese ahí $u_x = 0$).

[Separando variables salen las autofunciones $\cos \frac{n\pi x}{L}$ con condiciones $u=0$ y $\cos \frac{n\pi x}{L}$ si son $u_x=0$, su periodicidad y paridades son las mismas que las obtenidas aquí].

Ej 7.
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in [0, 2\pi], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = 0, & u_t(x, 0) = \begin{cases} \sin x, & x \in [0, \pi] \\ 0, & x \in [\pi, 2\pi] \end{cases} \\ u_x(0, t) = u_x(2\pi, t) = 0 \end{cases}$$
 Hallemos $u(x, 2\pi)$, por D'Alembert y separando variables.

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = 0, & u_t(x, 0) = g^*(x) \end{cases} \quad \text{con } g^* \text{ par y } 4\pi\text{-periódica.}$$



$$u(x, 2\pi) = \frac{1}{2} \int_{x-2\pi}^{x+2\pi} g^* = \frac{1}{2} \int_{-2\pi}^{2\pi} g^* = \int_0^{\pi} \sin s ds = 2 \quad [\text{la integral en un periodo de una función periódica no depende del intervalo}].$$

Separando variables: $X'' + \lambda X = 0$, $X'(0) = X'(2\pi) = 0 \rightarrow \lambda_n = \frac{n^2}{4}$, $X_n = \{\cos \frac{nx}{2}\}$, $n = 0, 1, \dots$

$$\begin{cases} T'' + \lambda_n T = 0 \\ T(0) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T_0 = \{t\} \\ T_n = \{\sin \frac{nt}{2}\}, n \geq 1 \end{cases} \rightarrow u = \frac{a_0}{2} t + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{nt}{2} \cos \frac{nx}{2} \Big|_{t=2\pi} = a_0 \pi.$$

$$u_t(x, 0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{n}{2} \cos \frac{nx}{2} = g(x) \rightarrow a_0 = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} g = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{2}{\pi} \rightarrow u(x, 2\pi) = 2.$$

4.2. Ondas en tres y dos dimensiones.

Sea el problema de valores iniciales para las de **ondas en 3 dimensiones** espaciales:

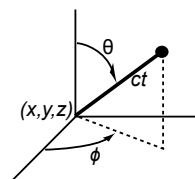
$$(P_3) \begin{cases} u_{tt} - c^2 [u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}] = 0, (x, y, z) \in \mathbf{R}^3, t \in \mathbf{R} \\ u(x, y, z, 0) = f(x, y, z), u_t(x, y, z, 0) = g(x, y, z) \end{cases}$$

Se puede deducir una fórmula para la solución de (P_3) análoga a la de D'Alembert para $n=1$. Aceptemos que, si $f \in C^3$ y $g \in C^2$, esa solución viene dada por la

$$[pk] \quad u(x, y, z, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_C f dS \right] + \frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_C g dS \quad \text{fórmula de Poisson o de Kirchoff}$$

siendo C la **superficie de la bola de centro** (x, y, z) **y radio** ct .

La forma más natural de parametrizar esta superficie es mediante los ángulos θ y ϕ de las coordenadas esféricas centradas en el punto (x, y, z) del dibujo de la derecha \rightarrow



Desarrollando las integrales de [1] se obtiene:

$$u(x, y, z, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{t}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(x+ct \sin \theta \cos \phi, y+ct \sin \theta \sin \phi, z+ct \cos \theta) \sin \theta d\theta d\phi \right] + \frac{t}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi g(x+ct \sin \theta \cos \phi, y+ct \sin \theta \sin \phi, z+ct \cos \theta) \sin \theta d\theta d\phi$$

Estudiemos ahora la propagación de **ondas en 2 dimensiones**:

$$(P_2) \begin{cases} u_{tt} - c^2 [u_{xx} + u_{yy}] = 0, (x, y) \in \mathbf{R}^2, t \in \mathbf{R} \\ u(x, y, 0) = f(x, y), u_t(x, y, 0) = g(x, y) \end{cases}$$

Podemos mirar (P_2) como un caso particular de (P_3) en que datos (y por tanto soluciones) no dependen de z . Las coordenadas adecuadas ahora para parametrizar C son las cartesianas (o las cilíndricas). Expresando [pk] en cartesianas se obtiene:

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi c} \left[\frac{\partial}{\partial t} \iint_B \frac{f(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{c^2 t^2 - (\xi-x)^2 - (\eta-y)^2}} + \iint_B \frac{g(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{c^2 t^2 - (\xi-x)^2 - (\eta-y)^2}} \right]$$

donde B es **todo el círculo de centro** (x, y) **y radio** ct .

La fórmula anterior escrita en polares centradas en (x, y) queda:

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi c} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} \int_0^{ct} \frac{r f(x+r \cos \theta, y+r \sin \theta) dr d\theta}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} + \int_0^{2\pi} \int_0^{ct} \frac{r g(x+r \cos \theta, y+r \sin \theta) dr d\theta}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} \right]$$

Ej 1. Resolvamos:
$$\begin{cases} u_{tt} - [u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}] = 0, (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \\ u(x, y, z, 0) = z, u_t(x, y, z, 0) = x^2 + y^2 \end{cases}$$

Aplicando directamente la fórmula de Poisson-Kirchoff:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{t}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (z+t \cos \theta) \sin \theta d\theta d\phi \right] + \frac{t}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (x^2 + y^2 + t^2 \sin^2 \theta + 2t[x \sin \theta \cos \phi + y \sin \theta \sin \phi]) \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{t}{2} \int_0^\pi (z+t \cos \theta) \sin \theta d\theta \right] + \frac{t}{2} \int_0^\pi (x^2 + y^2 + t^2 \sin^2 \theta) \sin \theta d\theta \\ &= \frac{\partial}{\partial t} [tz] + t(x^2 + y^2 + \frac{2t^2}{3}) = z + tx^2 + ty^2 + \frac{2}{3}t^3 \end{aligned}$$

También podemos descomponer el problema en dos y sumar sus soluciones:

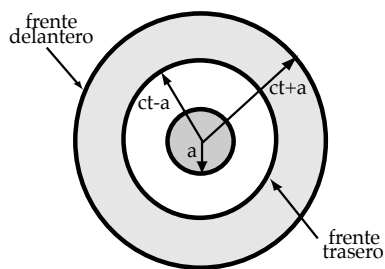
El de $f=z, g=0$ se puede ver como uno para $n=1$: $u_1 = \frac{1}{2} [(z+t) + (z-t)] = z$.

El de $f=0, g=x^2+y^2$, como uno de $n=2$:

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^t \frac{r(x^2 + y^2 + r^2 + 2r[x \cos \theta + y \sin \theta])}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr d\theta = \int_0^t \frac{r(x^2 + y^2) + r^3}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr \\ &= \left[-(x^2 + y^2) \sqrt{t^2 - r^2} - \frac{1}{3} (2t^2 + r^2) \sqrt{t^2 - r^2} \right]_0^t = tx^2 + ty^2 + \frac{2}{3}t^3. \end{aligned}$$

Interpretemos la fórmula [pk]. Los valores de u sólo dependen de los de f y g sobre el borde de la esfera $B((x, y, z), ct)$. Si para $t=0$ hay una perturbación concentrada en un punto P del **espacio**, en otro t sólo están perturbados los puntos de la superficie esférica de centro P y radio ct , pues para los demás puntos es $f=g=0$ sobre la superficie C .

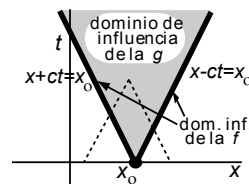
Si inicialmente se perturba todo un conjunto A , los puntos afectados para cada t son una región A_t del espacio formada por la unión de todas las superficies esféricas de radio ct y centro $P \in A$. La superficie exterior de A_t se llama **frente delantero** de la onda y la interior **frente trasero**. En el dibujo se esquematizan ambos frentes para el caso de una perturbación inicial de una esfera de radio a . Los puntos que alcanza el frente delantero, antes en reposo, comenzarán a oscilar. Los puntos sobrepasados por el trasero volverán al reposo.



Veamos ahora lo que sucede en el **plano**. Supongamos una perturbación localizada para $t=0$ en un punto P del plano. Otro punto M , situado a una distancia d de P , permanecerá en reposo hasta el instante $t_0=d/c$. Si $t \geq t_0$, P ya pertenece al círculo $B(M, ct)$ y por tanto será $u(M, t) \neq 0$: a partir del instante t_0 el punto M permanece perturbado indefinidamente (aunque tienda a pararse cuando $t \rightarrow \infty$, como las ondas producidas por una piedra en un estanque). Esta situación no contradice los resultados para $n=3$: la perturbación de P , vista como una perturbación en el espacio independiente de z , consiste de hecho en un cilindro vertical infinito sobre P , con lo que al M irán llegando las perturbaciones provinientes de puntos cada vez más lejanos del cilindro (que, por tanto, serán cada vez más pequeñas). Las ondas que se propagan constituyen ondas cilíndricas en el espacio: en cada cilindro paralelo al inicial la solución toma un valor constante.

[Las ondas pasan en el espacio y permanecen en el plano].

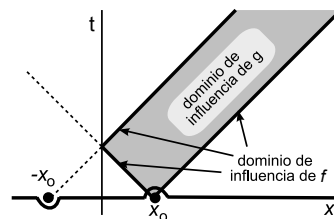
Si las f y g sólo dependen de x , se puede ver que como caso particular de [pk] aparece la conocida fórmula de D'Alembert para $n=1$. Si se mira esta solución sumergida en \mathbf{R}^3 se puede interpretar como la suma de dos ondas planas avanzando por planos perpendiculares al eje x a velocidad $\pm c$. Todos los puntos de cada plano están igualmente perturbados. Veamos si para la **cuerda** las perturbaciones iniciales pasan o permanecen. Para ello vamos a definir lo que se llama **dominio de influencia**: el valor de la f inicial en $x=x_0$ influye sólo en los valores de la solución u sobre las dos características que pasan por $(x_0, 0)$ [dominio de influencia de la f], pues este punto no influye en el valor de la solución en puntos que no estén sobre ellas. Por la misma razón el dominio de influencia de la g en x_0 consiste en el triángulo infinito limitado por dichas características.



En el caso $n=1$, se da una situación intermedia entre $n=2$ y $n=3$: la influencia de la posición inicial f desaparece, pero la de la velocidad g inicial se deja sentir indefinidamente.

Nos interesan también los dominios de influencia en la **cuerda semi-infinita** (las ondas en el espacio con simetría esférica se reducirán a ella). La situación es la siguiente:

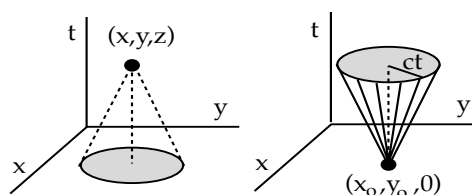
Como se extendía de forma impar respecto del origen, si x_0 está perturbado, también lo estará (en sentido opuesto) el punto $-x_0$. Cuando la característica que sale de x_0 llega a $x=0$ se encuentra con la que viene del punto simétrico ('rebota'). La f influye, pues, en el segmento y semirrectas indicados. Y la g , sobre la región sombreada (fuera, o se integra 0 ó se cancelan las aportaciones de x_0 y $-x_0$). Como se ve, también la g en este caso deja de influir sobre la solución pasado un tiempo.



[Este dibujo nos sirve además para ver que se invierte una onda cuando llega a un extremo fijo: cuando rebota, aparece la onda que viene de $-x_0$ con forma opuesta a que llegó].

Si $n=2$, el dominio de dependencia de $u(x, y, t)$ de los datos iniciales es todo el círculo $B((x, y), ct)$ y el de influencia de la f y g iniciales en un punto $(x_0, y_0, 0)$ es todo el cono $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq c^2 t^2$.

Para $n=3$ la influencia de $(x_0, y_0, z_0, 0)$ es solamente la superficie de un cono tetradimensional (no dibujable).



Consideremos ahora **ondas en el espacio con simetría radial**. Pasando a esféricas y quitando los términos con derivadas respecto a θ y ϕ llegamos al problema:

$$(P_r) \begin{cases} u_{tt} - c^2 [u_{rr} + \frac{2}{r}u_r] = 0, & r \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(r, 0) = f(r), & u_t(r, 0) = g(r) \end{cases}$$

Haciendo $v = ur$, la ecuación se transforma en la de la cuerda: $v_{tt} - c^2 v_{rr} = 0$. Y como u es acotada, aparece la condición de contorno: $v(0, t) = 0 \cdot u(0, t) = 0$. Así, el problema en las nuevas variables es:

$$(P_v) \begin{cases} v_{tt} - c^2 v_{rr} = 0, & r \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ v(r, 0) = rf(r), & v_t(r, 0) = rg(r), & v(0, t) = 0 \end{cases}$$

Sabemos desde la sección anterior que si F^* y G^* son las extensiones impares respecto a 0 de $F(r) \equiv rf(r)$ y $G(r) \equiv rg(r)$ la solución de (P_r) es:

$$u(r, t) = \frac{1}{2r} [F^*(r+ct) + F^*(r-ct)] + \frac{1}{2cr} \int_{r-ct}^{r+ct} G^*(s) ds \quad [\bullet]$$

que podemos poner en la forma $u(r, t) = \frac{1}{r}p(r+ct) + \frac{1}{r}q(r-ct)$ e interpretar como la suma de dos ondas esféricas, cuyos radios disminuyen o crecen a velocidad c . La magnitud de la perturbación propagada es inversamente proporcional al radio.

$[\bullet]$ da problemas en $r=0$, pero con L'Hôpital y el teorema fundamental del cálculo:

$$u \xrightarrow{r \rightarrow 0} \frac{1}{2} [F^*(ct) + F^*(-ct)] + \frac{1}{2c} [G^*(ct) - G^*(-ct)] = F^*(ct) + \frac{1}{c} G^*(ct) = u(0, t)$$

$[u(0, t)$ puede no ser continua aunque f lo sea (si F^* no es C^1)].

Ej 2.
$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & r \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(r, 0) = 0, & u_t(r, 0) = \begin{cases} 1, & r \leq 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases} \end{cases}$$

Comencemos suponiendo $n=3$.

Su solución es $u = \frac{v}{r}$, si v es la solución de:

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{rr} = 0, & r, t \in \mathbf{R} \\ v(r, 0) = 0, & v_t(r, 0) = G^*(r) = \begin{cases} r, & |r| \leq 1 \\ 0, & |r| > 1 \end{cases} \rightarrow v(r, t) = \frac{1}{2} \int_{r-t}^{r+t} G^* \end{cases}$$

Estudiamos la evolución para $t \geq 0$ de un punto M del espacio situado a una distancia $R > 1$ del origen. Si $t < R-1$ o si $t > R+1$ es claro que $v=0$. Si $t \in [R-1, R+1]$, la integral se reduce a:

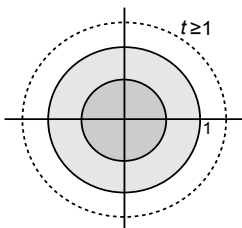
$$\int_{R-t}^1 s ds \rightarrow u(R, t) = \frac{1 - [R-t]^2}{4R}$$

Se ve que M oscila sólo durante un intervalo de tiempo finito [eso lo podíamos decir dibujando el dominio de influencia]. Y que la amplitud máxima de la oscilación es inversamente proporcional a la distancia que separa M del origen.

Dar $u(R, t)$ con la fórmula [pk] es complicado, pero sí es fácil hallar:

$$u(0, 0, 0, t) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi t} \iint_C 1 dS = \frac{\text{área de } C}{4\pi t} = t, & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{4\pi t} \iint_C 0 dS = 0, & \text{si } t > 1 \end{cases} = G^*(t) \quad [\text{predicho con L'Hôpital}].$$

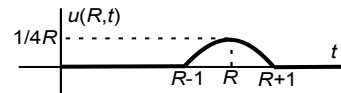
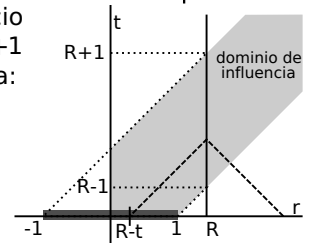
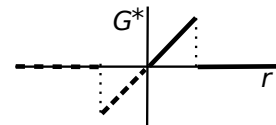
Hay discontinuidades (G era discontinua), pero se concentran en el origen [$u(M, t)$ sí era continua].



Miremos ahora el problema como si fuese **para** $n=2$. Los cálculos son siempre más difíciles, así que nos limitamos a hallar $u(0, 0, t)$:

$$u(0, 0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^t \frac{rg dr d\theta}{\sqrt{t^2 - r^2}} = \int_0^t \frac{rg dr}{\sqrt{t^2 - r^2}} = \begin{cases} \int_0^t \frac{r dr}{\sqrt{t^2 - r^2}} = t, & t \leq 1 \\ \int_0^1 \frac{r dr}{\sqrt{t^2 - r^2}} = t - \sqrt{t^2 - 1}, & t \geq 1 \end{cases}$$

Como debía suceder, $t - \sqrt{t^2 - 1} = \frac{1}{t + \sqrt{t^2 - 1}} \rightarrow 0$.



Ej 3.
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{rr} - \frac{2}{r}u_r = 0, & r \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(r, 0) = f(r), & u_t(r, 0) = 0 \end{cases}, \text{ con } f(r) = \begin{cases} (r-2)(r-4) & \text{si } r \in [2, 4] \\ 0 & \text{en el resto de } [0, \infty) \end{cases}$$

Dibujemos la solución para $t=3$ y 6 y describamos la evolución de dicha solución. Para ello nos basamos en los dibujos del problema para la cuerda semiacotada:

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{rr} = 0, & r \geq 0 \\ v(r, 0) = rf(r) \equiv F(r) \\ v_t(r, 0) = v(0, t) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_{tt} - v_{rr} = 0, & r \in \mathbf{R} \\ v(r, 0) = F^*(r) \text{ impar} \\ v_t(r, 0) = 0 \end{cases}$$

Será $v(r, t) = \frac{F^*(r+t) + F^*(r-t)}{2}$ y $u(r, t) = \frac{v(r, t)}{r}$.

Movemos $\frac{1}{2}F^*$ a izquierda y derecha y sumamos.

Precisamos los dibujos hallando algunos valores: Como $F(r) = r(r-2)(r-4)$, $r \in [2, 4]$, es $F(3) = -3$ y F es mínima para $x = 2 + \frac{2}{3}\sqrt{3} \approx 3.2$.

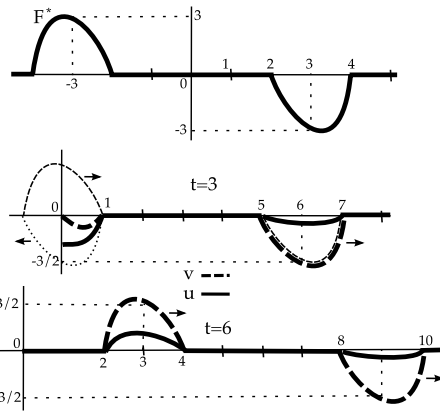
$$u\left(\frac{1}{2}, 3\right) = \frac{-3/8}{1/2} = -\frac{3}{4}, \quad u(6, 3) = \frac{-3/2}{6} = -\frac{1}{4},$$

$$u(3, 6) = \frac{3/2}{3} = \frac{1}{2}, \quad u(9, 6) = \frac{-3/2}{9} = -\frac{1}{6},$$

Además $u(0, t) = F^{*'}(t) \rightarrow u(0, 3) = 3t^2 - 12t = 8|_{t=3} = -1$.

[$u(0, t)$ resulta ser discontinua para $t=2$ y $t=4$: $F^{*'}(2^+) = -4 \neq 0$ y $F^{*'}(4^-) = 8 \neq 0$. En esos instantes los 'picos' de f confluyen en el origen].

Tanto para v como para u , la onda se divide en 2 y se refleja cambiando de signo; pero, mientras en dimensión 1 no se deforma, en el espacio disminuye al alejarse del origen.



Ej 4.
$$\begin{cases} u_{tt} - (u_{rr} + \frac{2}{r}u_r) = 0, & r \geq 0 \\ u(r, 0) = r, & u_t(r, 0) = 0 \end{cases}$$
 Calculemos $u(1, t)$ para $t \geq 0$.

$$v = ur \rightarrow \begin{cases} v_{tt} - v_{rr} = 0, & r \geq 0 \\ v(r, 0) = r^2 \\ v_t(r, 0) = v(0, t) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_{tt} - v_{rr} = 0, & r \in \mathbf{R} \\ v(r, 0) = f^*(r) \\ v_t(r, 0) = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} f^* \text{ extensión impar de } r^2 \\ [-r^2 \text{ si } r \leq 0]. \end{matrix}$$

$$\text{Por tanto, } u(1, t) = \frac{v(1, t)}{1} = \begin{cases} \frac{1}{2}[(1+t)^2 + (1-t)^2] = 1+t^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{2}[(1+t)^2 - (1-t)^2] = 2t & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

También se puede hallar con la fórmula de Poisson-Kirchoff. Para simplificar, la evaluamos en el punto más sencillo situado a distancia 1, el $(0, 0, 1)$:

$$u(0, 0, 1, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{t}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{1+t^2+2t \cos \theta} \sin \theta d\theta d\phi \right] \stackrel{s=\cos \theta}{=} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{t}{2} \int_{-1}^1 \sqrt{1+t^2+2ts} ds \right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{6}(1+t^2+2ts)^{3/2} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{6} \frac{\partial}{\partial t} [|t+1|^3 - |t-1|^3] = \frac{1}{6} \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} [2t^3+6t] & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{\partial}{\partial t} [6t^2+2] & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

que nos lleva al resultado de antes.

4.3. Transformadas de Fourier.

Sea $f(x)$ definida en \mathbf{R} y absolutamente integrable $\left[\int_{-\infty}^{\infty} |f| < \infty \right]$.

La **transformada de Fourier** de f es la función: $\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx$.

Si f es además C^1 se puede recuperar a partir de \hat{f} usando la fórmula de inversión:

Teor 1 $f \in C^1(\mathbf{R})$ y absolutamente integrable $\Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{-ikx} dk \quad \forall x \in \mathbf{R}$.

[Algunos libros no ponen la constante $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ en la definición de \hat{f} y ponen $\frac{1}{2\pi}$ en la fórmula de inversión; también se puede ver en la primera fórmula e^{-ikx} y en la segunda e^{ikx} ; como otros resultados (algunos se probarán en problemas) no la demostramos].

Se llama a f **transformada inversa** de Fourier de \hat{f} . Vamos a denotar también $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ y $\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = f$. Es evidente que \mathcal{F} y \mathcal{F}^{-1} son lineales.

Veamos otras propiedades. La \mathcal{F} hace desaparecer derivadas:

Teor 2 $f, f', f'' \in C(\mathbf{R})$ y absolutamente integrables $\Rightarrow \begin{cases} \mathcal{F}(f') = -ik\mathcal{F}(f) \\ \mathcal{F}(f'') = -k^2\mathcal{F}(f) \end{cases}$

$\mathcal{F}[f'(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{ikx} dx = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x) e^{ikx} \right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{ik}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx = -ik \mathcal{F}[f(x)]$,
pues $f \rightarrow 0$ si $\int_{-\infty}^{\infty} |f|$ converge. $\mathcal{F}[f''(x)] = -ik \mathcal{F}[f'(x)] = -k^2 \mathcal{F}[f(x)]$.

Estas transformadas nos aparecerán resolviendo EDPs (probamos las 2 primeras):

Teor 3 $\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(k) e^{iak}) = f(x-a)$. Si $h(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$, $\mathcal{F}(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ikb} - e^{ika}}{ik}$.
 $\mathcal{F}(e^{-ax^2}) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-k^2/4a}$. $\mathcal{F}^{-1}(e^{-ak^2}) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-x^2/4a}$.

$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f} e^{-ika}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{-ik(x-a)} dk = f(x-a)$. $\mathcal{F}(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ikb} - e^{ika}}{ik}$.

Teor 4 La **convolución** de f y g es la función: $(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-s) g(s) ds$.
Se tiene $f * g = g * f$, y $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g)$, si las transformadas existen.

Aplicando a una EDP en dos variables la \mathcal{F} en una de ellas aparece una EDO (en la otra variable) para la \hat{u} . Resolviendo la EDO se halla \hat{u} . Identificando la u de la que proviene o con el teorema 1 se puede a veces dar explícitamente la solución, pero en muchos casos hay que dejar u en términos de integrales no calculables.

Ej 1. $\begin{cases} u_t + u_x = g(x) \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$ Aplicamos la \mathcal{F} en la variable x (se supone que u, g y f son buenas, de modo que se pueden usar los teoremas):

$\begin{cases} \hat{u}_t - ik\hat{u} = \hat{g}(k) \\ \hat{u}(k, 0) = \hat{f}(k) \end{cases} \rightarrow \hat{u}(k, t) = p(k) e^{ikt} - \frac{\hat{g}(k)}{ik}$, p arbitraria $\xrightarrow{\text{d.i.}} \hat{u} = \hat{f}(k) e^{ikt} + \hat{g}(k) \left[\frac{e^{ikt} - 1}{ik} \right]$

Por tanto: $u(x, t) = f(x-t) + \sqrt{2\pi} g(x) * h(x)$ siendo $h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, t] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$

Como $\int_0^t g(x-u) du = - \int_x^{x-t} g(s) ds$, concluimos que $u = f(x-t) + \int_{x-t}^x g(s) ds$.

[La solución la podemos calcular también con las técnicas del capítulo 1:

$\frac{dt}{dx} = 1 \rightarrow \begin{cases} \xi = x-t \\ \eta = x \end{cases} \rightarrow u_\eta = g(\eta) \rightarrow u = p(x-t) + \int_0^x g(s) ds \rightarrow$

$p(x) + \int_0^x g(s) ds = f(x) \rightarrow u = f(x-t) - \int_0^{x-t} g(s) ds + \int_0^x g(s) ds$ como antes].

Más interés que el ejemplo anterior, puesto que no conocemos ningún otro método para resolverlo, tiene el problema para el **calor en una varilla infinita**:

$$(P) \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in \mathbf{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & u \text{ acotada} \end{cases}$$

Supongamos que u y f son suficientemente regulares y que tienden a 0 en $\pm\infty$ lo suficientemente rápido como para poder utilizar los teoremas anteriores. Aplicando la \mathcal{F} en la variable x a la ecuación y al dato inicial se tiene el problema:

$$\begin{cases} \hat{u}_t + k^2 \hat{u} = 0 \\ \hat{u}(k, 0) = \hat{f}(k) \end{cases} \text{ cuya solución es } \hat{u}(k, t) = \hat{f}(k) e^{-k^2 t}$$

La solución será la convolución de las transformadas inversas de cada uno de los factores (la del segundo la vimos en el teorema 3):

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-(x-s)^2/4t} ds \equiv \int_{-\infty}^{\infty} G(x, s, t) f(s) ds \quad [1]$$

$G(x, s, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-(x-s)^2/4t}$ es la llamada **solución fundamental** de la ecuación del calor [es la temperatura del punto x en el tiempo t debida a una f inicial de la forma $\delta(x-s)$].

Una vez deducida [1], en vez de justificar los pasos que llevaron a ella, se prueba que proporciona realmente la solución de (P) con hipótesis más amplias incluso de las que nos permiten aplicar la \mathcal{F} . En concreto, para cualquier f acotada y continua a trozos [1] nos da la solución única acotada de (P) que es continua para $t \geq 0$ a excepción de los puntos de $t=0$ en que f es discontinua.

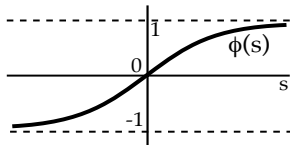
De [1] se deduce también que, según nuestro modelo matemático, el calor se transmite a **velocidad infinita**: si $f > 0$ en un entorno de un x_0 y nula en el resto, está claro que $u(x, t) > 0$ por pequeño que sea t y grande que sea $|x-x_0|$. También se ve que u es C^∞ para $t > 0$ aunque f sea discontinua (aunque sea $f(x) = \delta(x-s)$!). Son propiedades claramente diferentes de la ecuación de ondas.

Ej 2. Apliquemos [1] para resolver un par de problemas particulares.

Suponemos primero que: $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \rightarrow u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-(x-s)^2/4t} ds$

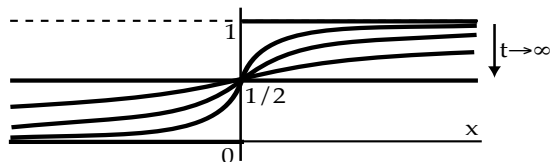
Haciendo $v = (s-x)/2\sqrt{t}$ la integral se transforma en:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-v^2} dv = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{t}} e^{-v^2} dv + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-v^2} dv = \frac{1}{2} \left[1 + \phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \right]$$



donde $\phi(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s e^{-v^2} dv$ es la llamada función error que aparece a menudo en la teoría de las probabilidades.

Como se observa, la solución tiende hacia $\frac{1}{2}$ para todo x cuando t tiende a ∞ .



Sea ahora $f(x) = e^{-x^2}$. Completamos cuadrados y hacemos un cambio de variable:

$$u = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} e^{-(x-s)^2/4t} ds = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t+1}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\bullet)^2} ds \text{ con } \bullet = \frac{s\sqrt{4t+1} - x}{2\sqrt{t}}$$

$$\text{Haciendo } z = \bullet \text{ se obtiene: } u = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{4t+1}} e^{-\frac{x^2}{4t+1}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{1+4t}} e^{-\frac{x^2}{1+4t}}$$

Pero sale más corto aplicando directamente \mathcal{F} :

$$\begin{cases} \hat{u}_t = -k^2 \hat{u} \\ \hat{u}(k, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-k^2/4} \end{cases} \rightarrow \hat{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{k^2(1+4t)}{4}} \rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{1+4t}} e^{-\frac{x^2}{1+4t}}$$

Ej 3. $\begin{cases} u_t - u_{xx} + 2tu = 0, & x \in \mathbf{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & u \text{ acotada} \end{cases}$ Hallemos la solución para una $f(x)$ general y deduzcamos la solución para $f(x) \equiv 1$.

[Como $\mathcal{F}(1)$ no existe, no se puede resolver directamente el problema con $u(x, 0) = 1$].

$$\begin{cases} \hat{u}_t + (k^2 + 2t)\hat{u} = 0 \\ \hat{u}(k, 0) = \hat{f}(k) \end{cases} \rightarrow u(\hat{k}, t) = p(k) e^{-k^2 t - t^2} \xrightarrow{d.i.} u(\hat{k}, t) = \hat{f}(k) e^{-t^2} e^{-k^2 t} \rightarrow$$

$$u(x, t) = e^{-t^2} f(x) * \mathcal{F}^{-1}(e^{-k^2 t}) = \frac{e^{-t^2}}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-(x-s)^2/4t} ds.$$

En particular, si $f(x) \equiv 1$, $u = \frac{e^{-t^2}}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-s)^2/4t} ds = \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = e^{-t^2}$.

$(s-x)/(2\sqrt{t}) = u$

[Parece que sería adecuado hacer un cambio de la forma $u = w e^{-t^2} \rightarrow \begin{cases} w_t - w_{xx} = 0 \\ w(x, 0) = f(x) \end{cases}$; de [1] se deduce nuestra fórmula y $w \equiv 1$ es solución clara si $f(x) \equiv 1$ (la varilla sigue a 1°).

Análogamente a lo que pasaba con la transformada de Laplace para resolver EDOs, el uso de la \mathcal{F} permite abordar problemas de EDPs con la **delta** de Dirac δ sin entrar en sutilezas sobre continuidades y saltos en derivadas.

La transformada de la delta es muy fácil de hallar:

$$\mathcal{F}[\delta(x-a)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) e^{ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ika}.$$

[Obsérvese que formalmente esta función (que no tiende a 0 en $\pm\infty$) no tiene transformada inversa, pero, como ya hemos dicho, con la \mathcal{F} se suele ser riguroso justificando los resultados al final].

Resolvamos un problema (algo complicado) para la cuerda infinita con una $F = \delta$ (empujamos hacia arriba en el punto central de la cuerda):

Ej 4. $(P_\delta) \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \delta(x), & x \in \mathbf{R}, t \geq 0 \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$. Aplicando la \mathcal{F} : $\begin{cases} \hat{u}_{tt} + k^2 \hat{u} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ \hat{u}(k, 0) = \hat{u}_t(k, 0) = 0 \end{cases}$.

La solución general ($\lambda = \pm ki$ y u_p a simple vista) es:

$$\hat{u}(k, t) = p(k) \cos kt + q(k) \sin kt + \frac{1}{\sqrt{2\pi} k^2} \xrightarrow{d.i.} \hat{u}(k, t) = \frac{1 - \cos kt}{\sqrt{2\pi} k^2} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin \frac{k}{2} t}{k} \right]^2.$$

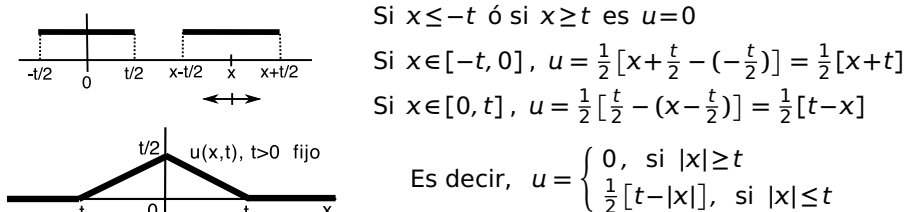
En la h del teor 4, cuando $a = -b$ se tiene como caso particular:

$$\text{Si } h(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-b, b] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}, \mathcal{F}(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ikb} - e^{-ikb}}{ik} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\text{sen } bk}{k}.$$

La u será, por tanto, la convolución de una h de este tipo consigo misma. En concreto:

$$u = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} h(x-s) h(s) ds, \text{ donde } h(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-t/2, t/2] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Discutiendo en qué intervalos el integrando es 1 ó 0 según los valores de x se concluye:



Para hacerlo sin transformadas, más fácil que discutir

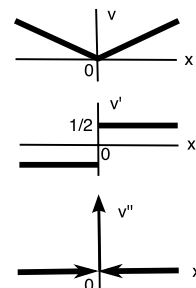
$$u = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \delta(s) ds d\tau,$$

es hacer la ecuación homogénea con un cambio de variable.

Como $v = \frac{1}{2}|x|$ satisface $v'' = \delta(x)$, con $w = u + v$ se obtiene:

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0 \\ w(x, 0) = |x|/2 \\ w_t(x, 0) = 0 \end{cases} \rightarrow u = \frac{1}{4} [|x+t| + |x-t|] - \frac{1}{2}|x|.$$

Discutiendo los valores absolutos se llega a la solución de antes.



En problemas para regiones semi-infinitas se usan las **transformadas seno y coseno** que son caso particular de \mathcal{F} por las propiedades de las funciones pares o impares. Se definen estas transformadas de funciones f absolutamente integrables en $[0, \infty)$ mediante:

$$\mathcal{F}_s(f)(k) = \hat{f}_s(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \operatorname{sen} kx \, dx ; \quad \mathcal{F}_c(f)(k) = \hat{f}_c(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \operatorname{cos} kx \, dx$$

La fórmula de inversión adopta la forma:

Teor 1' Sea $f \in C^1([0, \infty))$ y sea $\int_0^{\infty} |f| < \infty$. Entonces:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \hat{f}_s(k) \operatorname{sen} kx \, dk \quad \text{para todo } x \in (0, \infty)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \hat{f}_c(k) \operatorname{cos} kx \, dk \quad \text{para todo } x \in [0, \infty)$$

Con hipótesis análogas a las del teorema 2 se tiene también:

Teor 2' $\mathcal{F}_s(f'') = -k^2 \mathcal{F}_s(f) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0) k ; \quad \mathcal{F}_c(f'') = -k^2 \mathcal{F}_c(f) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0) .$

[Por este resultado, la \mathcal{F}_s será útil cuando nos den el valor de $u(0, t)$ mientras que la \mathcal{F}_c la emplearemos si lo fijado es $u_x(0, t)$].

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_s[f''(x)] &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} f''(x) \operatorname{sen} kx \, dx = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} [f'(x) \operatorname{sen} kx]_0^{\infty} - k \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} f'(x) \operatorname{cos} kx \, dx \\ &= -k \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} [f(x) \operatorname{cos} kx]_0^{\infty} - k^2 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \operatorname{sen} kx \, dx = -k^2 \mathcal{F}_s[f(x)] + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} f(0) k . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_c[f''(x)] &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} f''(x) \operatorname{cos} kx \, dx = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} [f'(x) \operatorname{cos} kx]_0^{\infty} + k \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} f'(x) \operatorname{sen} kx \, dx \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} f'(0) + k \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} [f(x) \operatorname{sen} kx]_0^{\infty} - k^2 \mathcal{F}_c[f(x)] = -k^2 \mathcal{F}_c[f(x)] - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} f'(0) . \end{aligned}$$

Estas transformadas aparecen en problemas del calor en $[0, \infty)$:

Teor 3' $\mathcal{F}_s^{-1}(k e^{-ak^2}) = \frac{1}{[2a]^{3/2}} x e^{-x^2/4a} ; \quad \mathcal{F}_c^{-1}(e^{-ak^2}) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-x^2/4a} .$

Ej 5. Calor en una varilla semi-infinita:
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & u(0, t) = g(t) \\ u \text{ acotada} \end{cases}$$

Llamemos $\hat{u}(k, t)$ a la transformada seno de $u(x, t)$ respecto a x (suponiendo como siempre que existe). El problema para \hat{u} es:

$$\hat{u}_t + k^2 \hat{u} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} g(t) k, \quad \hat{u}(k, 0) = 0 \rightarrow \hat{u}(k, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-k^2 t} \int_0^t g(s) k e^{k^2 s} ds$$

La fórmula de inversión, el cambio de orden de integración y el teor 3' nos dan:

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^t g(s) k e^{-k^2(t-s)} \operatorname{sen} kx \, ds \, dk = \frac{2}{\pi} \int_0^t g(s) \int_0^{\infty} k e^{-k^2(t-s)} \operatorname{sen} kx \, dk \, ds$$

$$\rightarrow u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{s}{[t-s]^{3/2}} e^{-x^2/[4(t-s)]} g(s) \, ds$$

Ej 6. Ondas semi-infinita:
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = t^2 \end{cases}$$

Para \mathcal{F}_s (o \mathcal{F}_c) no se necesita (nada habitual) hacer la condición de contorno homogénea:

$$\mathcal{F}_s u = \hat{u} \rightarrow \hat{u}_{tt} + k^2 \hat{u} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} t^2 k \rightarrow \hat{u} = p(k) \operatorname{cos} kt + q(k) \operatorname{sen} kt + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{t^2}{k} - \frac{2}{k^3} \right]$$

$$\hat{u}(k, 0) = \hat{u}_t(k, 0) = 0 \rightarrow \hat{u} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{t^2}{k} + \frac{2(\operatorname{cos} kt - 1)}{k^3} \right] \rightarrow u = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{t^2}{k} + \frac{2(\operatorname{cos} kt - 1)}{k^3} \right] \operatorname{sen} kx \, dk$$

La integral es muy complicada. Hallamos sólo $u(1, 2)$ pues entonces parece simplificarse:

$$u(1, 2) = \frac{8}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{\operatorname{sen} k}{k} - \frac{\operatorname{sen}^3 k}{k^3} \right] dk = (\text{tablas}) = \frac{8}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8} \right] = 1$$

[Llegamos a ese valor en 4.1 a partir de D'Alembert (que era mejor camino)].