problemas 1

1. Resolver (si es posible) los siguientes problemas de Cauchy:

$$\begin{array}{llll} 3x^2u_y+u_x=x^5 & (2y-x)u_y+xu_x=2y & u_y+xu_x=-x^2e^{-y} & xu_y-yu_x=2xyu \\ u(x,0)=x^3 & u(1,y)=0 & u(-1,y)=0 & u(x,0)=x \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} u_x-u_y=\frac{x-y}{xy}u & u_y+3y^2u_x=\frac{2u}{y}+6y^4x & yu_y+(2y-x)u_x=x & yu_y+e^{x^2}u_x=2x \\ u(x,1)=x & u(x,1)=x^2 & u(x,1)=0 & u(x,0)=0 \end{array}$$

2. Sea $yu_y-xu_x=u+2x$ y los datos iniciales: i) $u(x,0)=-x$, ii) $u(x,2)=7x$. Hallar la única solución que satisface uno de ellos y dos soluciones distintas que cumplan el otro.

3. Resolver $u_y+2yu_x=3xu$ con $\begin{array}{l}\text{i) } u(x,1)=1 \\ \text{ii) } u(0,y)=0\end{array}$, estudiando la unicidad de la solución.

4. Sea (E) $y^2u_y+x^2u_x=x^2+y^2$. Resolver (E) con el dato $u(x,1)=x+1$. ¿Es única la solución? Imponer unos datos de Cauchy para los que (E) tenga infinitas soluciones y dar dos de ellas.

5. Precisar para qué valores de n entero positivo el dato de Cauchy $u(x,x^n)=x^n$ determina una única solución de la ecuación $u_x+yu=y^2$ cerca de $(0,0)$.

6. Sea la 'ecuación cuasilineal' (E) $A(x,y,u)u_y+B(x,y,u)u_x=C(x,y,u)$.
Probar que si las soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\frac{du}{dx}=\frac{C}{B}\,,\ \frac{dy}{dx}=\frac{A}{B}\quad \text{son}\quad \begin{array}{l}\eta(x,y,u)=c_1\\ \xi(x,y,u)=c_2\end{array}\quad \text{[curvas características de (E)],}$$

entonces $\eta(x,y,u)=p[\xi(x,y,u)]$ (o bien, $\xi(x,y,u)=q[\eta(x,y,u)]$) con p, q arbitrarias es la solución general de (E). Resolver la cuasilineal: $u_y+uu_x=0$ con: i) $u(x,0)=x$, ii) $u(0,y)=0$.

7. Reducir a forma canónica y, si es posible, encontrar la solución general:

$$e^xu_{xx}+e^yu_{yy}=u \qquad u_{xx}-3yu_x+2y^2u=y \qquad u_{xx}+4u_{xy}-5u_{yy}+6u_x+3u_y=9u$$

8. Escribir (E) $u_{tt}+2u_{xt}=2$ en forma canónica y hallar su solución general. De los datos de Cauchy: i) $u(x,0)=u_t(x,0)=0$, ii) $u(0,t)=0$, $u_x(0,t)=t$, hay unos que determinan una única solución de (E). Hallarla en ese caso.

9. Sea [E] $u_{tt}+2u_{xt}+u_{xx}+u=0$. Hallar su solución general. Hallar (y simplificar) la solución de [E] que satisface $u(x,-x)=0$, $u_t(x,-x)=1$. Escribir una solución de [E], distinta de la $u\equiv 0$, que cumpla $u(x,x)=u_t(x,x)=0$.

10. a) Escribir (E) $4yu_{yy}-u_{xx}+2u_y=0$ en forma canónica para $y>0$ y para $y<0$.
b) Resolver (E) con los datos iniciales: $u(x,1)=2x$, $u_y(x,1)=x$.

11. Resolver el problema $\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}=2 \\ u(x,x)=x^2,\ u_t(x,x)=x \end{cases}$, i) directamente, ii) tras hacer $w=u-t^2$.

12. Sea (E) $Au_{yy}+Bu_{xy}+Cu_{xx}+Du_y+Eu_x+Fu=G(x,y)$, con $A,B,\ldots,F$ constantes. Probar que, si no es parabólica, un cambio de variable $u=e^{py}e^{qx}w$, con p y q adecuadas, lleva (E) a una (E*) sin derivadas de primer orden. ¿Para qué relación entre las constantes $A,\ldots,F$ no tiene (E*) término en w? Aplicar lo anterior para hallar la solución general de $u_{xy}+2u_y+3u_x+6u=1$. Probar que cualquier ecuación parabólica o es resoluble o se puede escribir con cambios de variable en la forma $w_\eta+E^*w_{\xi\xi}=G^{**}(\xi,\eta)$.

13. Sea (e) $u_{tt}-u_{xx}+Du_t+Eu_x=4$, con D y E constantes. a] Escribir (e) en forma canónica. ¿Para qué relaciones entre D y E es esta forma resoluble? b] Para $D=-2$, $E=2$, hallar la o las soluciones de (e) con los datos: $u(0,t)=e^{2t}$, $u_x(0,t)=2$.

problemas 2

1. Determinar los autovalores y autofunciones asociadas:

$$\begin{array}{llll} y''+\lambda y=0 & y''+\lambda y=0 & y''+\lambda y=0 & x^2y''+xy'+[\lambda x^2-\frac{1}{4}]y=0 \\ y(0)=y'(1)=0 & y(-1)=y(1)=0 & y(0)=y(1)+y'(1)=0 & y(1)=y(4)=0 \end{array}$$

2. Sea $\begin{array}{l} y''+\lambda y=0 \\ y'(0)-\alpha y(0)=y(1)=0 \end{array}$ Comprobar que hay infinitos autovalores positivos $\forall\alpha$. Discutir si los hay ≤ 0. Estudiar cómo varía con α el menor autovalor.

3. Desarrollar a) $f(x)=1$ y b) $f(x)=x^2$, $x\in[0,1]$, en serie de i) $\{\operatorname{sen} n\pi x\}$, ii) $\{\cos n\pi x\}$. Dibujar algunas sumas parciales de las series obtenidas.

4. Desarrollar $f(x)=\cos^3 x$, $x\in[0,\pi]$, en serie de i) $\{\cos nx\}$, ii) $\{\operatorname{sen} nx\}$, dibujando las funciones hacia las que tienden las series y estudiando la convergencia uniforme.

5. Desarrollar en senos y cosenos en $[-\pi,\pi]$, estudiando la convergencia puntual y uniforme:

a) $f(x)=\operatorname{sen}^2 x$, b) $f(x)=|\operatorname{sen} x|$, c) $f(x)=\operatorname{sen}\frac{x}{2}$, d) $f(x)=\begin{cases} -\pi, & \text{si } -\pi\leq x<0 \\ \operatorname{sen} x, & \text{si } 0\leq x<\pi \end{cases}$

6. Sea $f(x)=\begin{cases} 1, & 0\leq x\leq 1 \\ 0, & 1<x\leq 2 \end{cases}$. Hallar su desarrollo en serie de Fourier $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{2}$. ¿Cuánto debe sumar la serie para i) $x=1$, ii) $x=2$? Comprobarlo sustituyendo en la serie.

7. Desarrollar $f(x)=\begin{cases} x, & 0\leq x<\frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2}\leq x\leq\pi \end{cases}$ en serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x)$, con y_n autofunciones de $\begin{array}{l} y''+\lambda y=0 \\ y(0)=y'(\pi)=0 \end{array}$.

¿Cuánto vale $\sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(\frac{\pi}{2})$? Deducir de ello, y de que $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots$, el valor de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

8. Desarrollar $f(x)=x$ en las autofunciones de cada uno de los problemas del problema 1.

9. Desarrollar $f(x)=1$ en serie de autofunciones del problema $\begin{cases} y''+2y'+\lambda y=0 \\ y(0)+y'(0)=y(\frac{1}{2})=0 \end{cases}$.

10. Sea $\begin{cases} \left([1-x^2]y'\right)'+\lambda y=0 \\ y(0)=0,\ y \text{ acotada en } 1 \end{cases}$ Hallar los 3 primeros términos del desarrollo de $f(x)=1$ en serie de autofunciones de este problema singular.

11. Hallar, si existe, un valor de a para el que $\begin{cases} xy''-y'=x^2-a \\ y'(2)=y'(4)=0 \end{cases}$ tenga infinitas soluciones.

12. Sea $\begin{cases} x^2y''-ay=3x-4 \\ y(1)+y'(1)=y(2)=0 \end{cases}$. Precisar cuántas soluciones tiene para: i) $a=2$, ii) $a=0$.

13. Precisar para $\begin{array}{l} \text{i] } \lambda=-2 \\ \text{ii] } \lambda=0 \end{array}$ cuántas soluciones tiene el problema: $\begin{cases} y''+y'+\lambda y=1-x \\ y'(0)=y'(2)=0 \end{cases}$.

14. Sea $\begin{array}{l} y''+\lambda y=x \\ y(0)=y'(1)-y(1)=0 \end{array}$. Hallar los autovalores y autofunciones del homogéneo. ¿Tiene el no homogéneo infinitas soluciones para algún λ?

15. Sea $\begin{array}{l} y''+\lambda y=\cos 3x \\ y'(0)=y'(\frac{\pi}{4})+y(\frac{\pi}{4})=0 \end{array}$. Hallar el primer término del desarrollo de $f(x)=\cos 3x$ en serie de autofunciones del problema homogéneo.
Precisar para i) $\lambda=0$, ii) $\lambda=1$ cuántas soluciones tiene el problema no homogéneo.

16. Hallar la función de Green y la solución para $f(x)=x$:

$$\begin{array}{lll} y''=f(x) & x^2y''+xy'-y=f(x) & y''+y'-2y=f(x) \\ y(0)=y'(1)=0 & y(1)+y'(1)=y(2)=0 & y(0)-y'(0)=y(1)=0 \end{array}$$

problemas 3 (calor y ondas)

1. Resolver por separación de variables:

a) $\begin{cases} u_t - u_{xx} + 2tu = 0\,,\ x\in(0,\frac{1}{2}),\ t>0 \\ u(x,0)=1-2x,\ u_x(0,t)=u(\frac{1}{2},t)=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_t-u_{xx}-4u_x-4u = 0\,,\ x\in(0,\pi), t>0 \\ u(x,0) = e^{-2x},\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_t - u_{xx} + \frac{u}{t+1} = 0\,,\ x\in(0,2),\ t>0 \\ u(x,0)=\begin{cases}1,\ 0\le x\le 1\\ 0,\ 1<x\le 2\end{cases},\ u_x(0,t)=u_x(2,t)=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_t - u_{xx} = e^{-2t}\cos x\,,\ x\in(0,\frac{\pi}{2}),\ t>0 \\ u(x,0)=1\,,\ u_x(0,t)=0,\ u(\frac{\pi}{2},t)=1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} u_{tt} + 4u_t - u_{xx} = 0\,,\ x\in[0,\pi], t\in\mathbf{R} \\ u(x,0) = \operatorname{sen} 2x \\ u_t(x,0)=u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 4\operatorname{sen} 6x\cos 3x\,,\ x\in[0,\frac{\pi}{2}] \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0,\ t\in\mathbf{R} \\ u(0,t)=u_x(\frac{\pi}{2},t)=0 \end{cases}$

2. Resolver $\begin{cases} u_t - u_{xx} = F(t)\,,\ x\in(0,\pi),\ t>0 \\ u(x,0)=f(x) \\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0 \end{cases}$. Determinar la distribución estacionaria si $f(x)=\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}$ y $F(t)=e^{-t}$.

3. Resolver $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0\,,\ x\in(0,1),\ t>0 \\ u(x,0)=0\,,\ u_x(0,t)=0,\ u_x(1,t)=2e^{-t} \end{cases}$ y hallar el $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t)$.

[Simplifica los cálculos hallar una $v(x,t)=X(x)T(t)$ cumpliendo ecuación y condiciones de contorno].

4. Sea $\begin{cases} u_t-u_{xx}=0\,,\ x\in(0,\pi),\ t>0 \\ u(x,0)=0\,,\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=t \end{cases}$. Resolverlo y hallar para cada $x\in(0,\pi)$ el límite de la solución $u(x,t)$ cuando $t\to\infty$.

5. Sea $\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = \cos\frac{\pi x}{2},\ x\in(0,1), t>0 \\ u(x,0)=T,\ u_x(0,t)=F,\ u(1,t)=T \end{cases}$. Calcular la solución y su límite cuando $t\to\infty$ (F y T constantes).

6. Sea una placa circular homogénea de 1 cm de de radio, inicialmente a 0º. Supongamos que en $t=0$ todo su borde se calienta hasta 1º y luego se mantiene a esa temperatura. Determinar la distribución de temperaturas en la placa para $t>0$. ¿Hacia qué valor tenderá la temperatura de un punto situado a 0.5 cm del centro de la placa cuando $t\to\infty$?

7. Sea $\begin{cases} u_t - u_{xx} - au = 0\,,\ x\in(0,3\pi), t>0 \\ u(x,0) = 1\,,\ u(0,t)-4u_x(0,t)=u(3\pi,t)=0 \end{cases}$

Determinar, según la constante a, el límite de la solución cuando $t\to\infty$.

8. **i]** Hallar los autovalores y autofunciones del problema $\begin{cases} X''+2X'+\lambda X=0 \\ X(0)=X(1)+X'(1)=0 \end{cases}$.

ii] Resolver $\begin{cases} u_t-u_{xx}-2u_x = 0\,,\ x\in(0,1)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=e^{-x}\,,\ u(0,t)=u(1,t)+u_x(1,t)=0 \end{cases}$ [directamente o tras un cambio $u=e^{pt+qx}w$].

9. **i]** Sea $\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X(1)-X'(1)=0 \end{cases}$. Hallar sus autovalores y autofunciones y comprobar que la primera autofunción es ortogonal a todas las demás.

ii] Resolver $\begin{cases} u_t-u_{xx}+2u = 2\,,\ x\in(0,1)\,,\ t>0 \\ u(x,0)=1-x\,,\ u(0,t)=u(1,t)-u_x(1,t)=1 \end{cases}$ por separación de variables.

10. Sea $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0\,,\ x\in[0,\pi], t\in\mathbf{R} \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t)=\operatorname{sen} wt,\ u(\pi,t)=0 \end{cases}$

Determinar valores de w para los que la solución no esté acotada.

11. Sea $tu_{tt}-4t^3u_{xx}-u_t = 0$. a] Hallar la solución que satisface: $u(x,1)=x$, $u_t(x,1)=2x$.

b] Separar variables $u=XT$ en la ecuación y comprobar que la solución particular de a] aparece como producto de soluciones asociadas a $\lambda=0$.

problemas 3 **(Laplace y 3 variables)**

1. Resolver por separación de variables:

a) $\begin{cases} \Delta u = 2x\cos^2 y\,,\ (x,y)\in(0,\pi)\times(0,\pi) \\ u(\pi,y)=5+\cos y \\ u(0,y)=u_y(x,0)=u_y(x,\pi)=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \Delta u = y\cos x\,,\ (x,y)\in(0,\pi)\times(0,1) \\ u_x(0,y)=u_x(\pi,y)=0 \\ u_y(x,0)=u_y(x,1)=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \Delta u = -1\,,\ (x,y)\in(0,\pi)\times(0,\pi) \\ u=0 \text{ en } x=0, x=\pi, y=0, y=\pi \end{cases}$ d) $\begin{cases} \Delta u = r^2\cos 3\theta\,,\ r<2, 0<\theta<\frac{\pi}{6} \\ u(2,\theta)=u_\theta(r,0)=u(r,\frac{\pi}{6})=0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \Delta u = r^2\cos 2\theta\,,\ 1<r<2 \\ u(1,\theta)=u(2,\theta)=0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \Delta u = \cos\theta\,,\ 1<r<2 \\ u_r(1,\theta)=0,\ u_r(2,\theta)=\cos 2\theta \end{cases}$

g) $\begin{cases} \Delta u = r\,,\ r<2, 0<\theta<\pi \\ u_\theta(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0 \\ u(2,\theta)=3 \end{cases}$ h) $\begin{cases} \Delta u = 0\,,\ 1<r<2,\ 0<\theta<\frac{\pi}{4} \\ u(1,\theta)=0,\ u_r(2,\theta)=\operatorname{sen}\theta \\ u(r,0)=u(r,\frac{\pi}{4})-u_\theta(r,\frac{\pi}{4})=0 \end{cases}$

2. Resolver por separación de variables: $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}+6u_x=0 \text{ en } (0,\pi)\times(0,\pi) \\ u_y(x,0)=0\,,\ u_y(x,\pi)=0 \\ u_x(0,y)=0\,,\ u(\pi,y)=2\cos^2 2y \end{cases}$.

3. Sea: $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}-9u=0 \text{ en } (0,\pi)\times(0,\pi) \\ u_x(0,y)=u_x(\pi,y)=0 \\ u_y(x,0)=0\,,\ u_y(x,\pi)=f(x) \end{cases}$. Resolverlo en general, y para $f(x)=\cos 4x$. ¿Es única la solución?

4. Probar que $\frac{2}{3}\le u(\frac{1}{2},\frac{\pi}{2})\le 1$, si $u(r,\theta)$ es la solución del problema en el plano:

$$\begin{cases} \Delta u=0\,,\ r<1 \\ u(1,\theta)=f(\theta) \end{cases} \quad \text{con} \quad f(\theta)=\begin{cases} 1,\ 0\le\theta\le\pi \\ 0,\ \pi<\theta<2\pi \end{cases}$$

5. Resolver $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=\cos^2\theta,\ r<1,\ 0<\theta<\pi \\ u_r(1,\theta)=a\,,\ u_\theta(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0 \end{cases}$ para los a que se pueda.

6. a] Discutir cuántas soluciones $y(r)$ tiene $\begin{cases} r^2y''+ry'-y=r^2 \\ y'(1)+ay(1)=y(2)=0 \end{cases}$.

b] Resolver el problema plano: $\begin{cases} \Delta u=\operatorname{sen}\theta\,,\ 1<r<2 \\ u_r(1,\theta)=u(2,\theta)=0 \end{cases}$.

7. Hallar la única solución de este problema en el plano: $\begin{cases} \Delta u=0\,,\ r<1,\ \theta\in(0,\pi) \\ u(1,\theta)+2u_r(1,\theta)=4\operatorname{sen}\frac{3\theta}{2} \\ u(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0 \end{cases}$.

Comprobar que cambiando $+2u_r(1,\theta)$ por $-2u_r(1,\theta)$ el problema físicamente imposible que resulta pasa a tener infinitas soluciones.

8. Hallar (en términos de funciones elementales) una solución acotada de:

$\begin{cases} u_{rr}+\frac{u_r}{r}+\frac{u_{\theta\theta}}{r^2}+4u=0\,,\ r<1\,,\ 0<\theta<\pi \\ u(1,\theta)=\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\,,\ u(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0 \end{cases}$ [Separando variables y haciendo $s=2r$ aparece una ecuación conocida].

9. Hallar la única solución de los problemas en el plano $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=\frac{2\operatorname{sen}\theta}{1+r^2} \\ u(1,\theta)=1\,,\ u \text{ acotada} \end{cases}$:

i] en el círculo $r<1$, **ii]** en la región infinita $r>1$ [¡ojo!, $r\arctan r \underset{r\to\infty}{\to} \infty$].

10. Calcular el valor en el origen de la solución del problema plano $\begin{cases} \Delta u=r\cos^2\theta,\ r<1 \\ u(1,\theta)=0\,,\ 0\le\theta<2\pi \end{cases}$.

11. Resolver el problema para la ecuación de Laplace en el espacio $\begin{cases} \Delta u = 0\,,\ r<3 \\ u_r(3,\theta)+u(3,\theta)=\operatorname{sen}^2\theta \end{cases}$.

12. Resolver el problema en la semiesfera: $\begin{cases} u_{rr}+\frac{2}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}+\frac{\cos\theta}{r^2\operatorname{sen}\theta}u_\theta=0\,,\ r<1,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2} \\ u_r(1,\theta)=f(\theta)\,,\ u_\theta(r,\pi/2)=0 \end{cases}$

¿Qué condición debe cumplir $f(\theta)$ para que exista solución?
Hallar la solución si $f(\theta)=\cos^2\theta-\alpha$ para el único α para el que existe.

13. Hallar la solución de: $\begin{cases} \Delta u=0\,,\ \text{ si } r>R \\ u(R,\theta)=\cos^3\theta\,,\ 0\le\theta<2\pi \\ u \text{ acotada cuando } r\to\infty \end{cases}$ (en el plano) y $\begin{cases} \Delta u=0\,,\ \text{ si } r>R \\ u(R,\theta)=\cos^3\theta\,,\ 0<\theta<\pi \\ u\to 0 \text{ cuando } r\to\infty \end{cases}$ (en el espacio)

14. Resolver:

$\begin{cases} u_t-\Delta u=0,\ (x,y)\in(0,\pi)\times(0,\pi), t>0 \\ u(x,y,0)=1+\cos x\cos 2y \\ u_x(0,y,t)=u_x(\pi,y,t)=0 \\ u_y(x,0,t)=u_y(x,\pi,t)=0 \end{cases}$ $\begin{cases} u_{tt}-\Delta u=0\,,\ (x,y)\in(0,\pi)\times(0,\pi),\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,y,0)=0\,,\ u_t(x,y,0)=\operatorname{sen}3x\ \operatorname{sen}^2 2y \\ u(0,y,t)=u(\pi,y,t)=0 \\ u_y(x,0,t)=u_y(x,\pi,t)=0 \end{cases}$

$\begin{cases} \Delta u=z\,,\ x^2+y^2+z^2<1 \\ u=z^3 \text{ si } x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$ $\begin{cases} \Delta u=0\,,\ x^2+y^2+z^2<1 \\ u=x^3 \text{ si } x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$

$\begin{cases} u_t-\Delta u=0,\ 1<r<2,\ 0<z<1,\ t>0 \\ u(r,\theta,0)=\operatorname{sen}\pi z \\ u(1,z,t)=u(2,z,t)=0 \\ u(r,0,t)=u(r,1,t)=0 \end{cases}$

15. Escribir en cartesianas los armónicos esféricos: Y_0^0, rY_1^0, rY_1^1, $r^2Y_2^0$, $r^2Y_2^1$, $r^2Y_2^2$.

problemas 4

1. Resolver por diferentes caminos:

a] $\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}=e^{-t}\,,\ x,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=x^2,\ u_t(x,0)=-1 \end{cases}$ b] $\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}=16\,,\ x,t\in\mathbf{R} \\ u(0,t)=t\,,\ u_x(0,t)=0 \end{cases}$

2. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\geq 0,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=0\,,\ u_t(x,0)=\cos^2 x \\ u(0,t)=t \end{cases}$. a] Hallar $u(\pi,2\pi)$. b] Hallar $u(x,2\pi)$ para $x\geq 2\pi$.

3. Sea $\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}=0\,,\ x\in[0,2],t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=4x-x^3,\ u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=u(2,t)=0 \end{cases}$. Hallar $u(\frac{3}{2},\frac{3}{4})$. Dibujar $u(x,2)$. Hallar $u(x,1)$.

4. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\in[0,2\pi]\,,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\begin{cases} 2\,\text{sen}\,x\,,\ x\in[0,\pi] \\ 0\ ,\ x\in[\pi,2\pi] \end{cases},\ u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=u(2\pi,t)=0 \end{cases}$. Dibujar $u(x,\pi)$ y hallar su expresión con D'Alembert. Resolver por separación de variables y comprobar.

5. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=x\,,\ x\in[0,\pi],t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=x,\ u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=0,\ u(\pi,t)=\pi \end{cases}$ Hallar $u(\frac{\pi}{2},\pi)$ con D'Alembert y separando variables.

6. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\in[0,2],t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=t\,,\ u(2,t)=0 \end{cases}$ a] Hallar $u(x,T)$, $T\in[0,2]$, y describir la evolución de la cuerda para $t\in[0,2]$. b] Hallar $u(x,2k)$, $k=1,2,\dots$

7. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=0\,,\ u_t(x,0)=\begin{cases} 1,\ |x|\leq 1/2 \\ 0\ \ |x|>1/2 \end{cases} \end{cases}$. a] Dibujar $u(x,1)$, $u(x,2)$ y $u(x,3)$. b] Dibujar $u(3,t)$, $t\geq 0$.

8. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=6x\,,\ x\geq 0,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=u_x(0,t)=0 \end{cases}$. Calcular $u(0,t)$ para todo t.

9. Sea $\begin{cases} u_{tt}-(u_{rr}+\frac{2}{r}u_r)=0\,,\ r\geq 0,t\in\mathbf{R} \\ u(r,0)=r\,,\ u_t(r,0)=-2 \end{cases}$. a] Hallar $u(1,2)$. b] Hallar $u(1,t)$ para todo $t\geq 0$.

10. Resolver $\begin{cases} u_{tt}-u_{rr}-\frac{2}{r}u_r=0,\ r\leq 1,\ t\geq 0 \\ u(r,0)=0,\ u_t(r,0)=\frac{1}{r}\,\text{sen}\,\pi r\,,\ u(1,t)=0 \end{cases}$ i) por separación de variables, ii) con las técnicas del capítulo 4.

11. Hallar $I(a,x)=\int_0^\infty e^{-ak^2}\cos kx\,dk$ probando que $\frac{dI}{dx}=-\frac{x}{2a}I$ e $I(a,0)=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}$.
Usar lo anterior para calcular: $\mathcal{F}_c^{-1}(e^{-ak^2})$, $\mathcal{F}_s^{-1}(k\,e^{-ak^2})$, $\mathcal{F}^{-1}(e^{-ak^2})$, $\mathcal{F}(e^{-ax^2})$.

12. Sea $\begin{cases} u_t-u_{xx}=(x^2-1)\,e^{-x^2/2}\,,\ x\in\mathbf{R},\ t>0 \\ u(x,0)=0\,,\ u\text{ acotada} \end{cases}$ [El término no homogéneo es la derivada segunda de $e^{-x^2/2}$].
Hallar su solución (en términos de funciones elementales) y el $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$:
a] Aplicando la $\mathcal{F}$ directamente. b] Con un cambio que haga la ecuación en homogénea y evaluando la integral de los apuntes mediante un cambio de variable.

13. Comprobar, paso a paso y utilizando la $\mathcal{F}$, que la solución de:
$\begin{cases} u_t-u_{xx}=e^{-x^2/4}\,,\ x\in\mathbf{R},t>0 \\ u(x,0)=0\,,\ u\text{ acotada} \end{cases}$ viene dada por: $u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-k^2}-e^{-k^2(t+1)}}{k^2}e^{-ikx}dk$.
Deducir el valor de $u(0,t)$ integrando por partes y utilizando que $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-s^2}ds=\sqrt{\pi}$.

14. Hallar su solución sin que aparezcan integrales: $\begin{cases} u_t-u_{xx}+u_x=0\,,\ x\in\mathbf{R},t>0 \\ u(x,0)=e^{-x^2/2} \end{cases}$.

15. Obtener la fórmula de D'Alembert utilizando transformadas de Fourier.

16. Sea $\begin{cases} u_{tt}-3u_{xt}+2u_{xx}=0\,,\ x,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=f(x)\,,\ u_t(x,0)=0 \end{cases}$. Resolverlo con transformadas de Fourier y deducir la solución para $f(x)=x^2$.

17. Hallar la solución de $\begin{cases} u_{tt}+2u_{tx}+u_{xx}=0\,,\ x,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$, i) a partir de su forma canónica, ii) con transformadas de Fourier.

18. a] Dada $3u_t-u_x=2$, hallar: a$_1$] la solución con $u(x,0)=x$, a$_2$] dos soluciones con $u(x,-3x)=-2x$.

b] Resolver $\begin{cases} 3u_t-u_x=g(x) \\ u(x,0)=f(x) \end{cases}$, b$_1$] utilizando las características, b$_2$] con transformadas de Fourier, y comprobar a$_1$].

19. Resolver a] $\begin{cases} 2u_t+u_x=tu \\ u(x,0)=\mathrm{e}^{-x^2} \end{cases}$, b] $\begin{cases} u_t+\mathrm{e}^t u_x+2tu=0 \\ u(x,0)=f(x) \end{cases}$ i) utilizando las características, ii) con transformadas de Fourier.

20. a) Resolver por Fourier y por las características: $\begin{cases} u_t+(\cos t)u_x=u,\ x\in\mathbf{R},\ t\geq 0 \\ u(x,0)=f(x) \end{cases}$.

b) Si $f(x)=\begin{cases} \cos^2 x,\ x\in[-\pi/2,\pi/2] \\ 0 \text{ en el resto} \end{cases}$ describir $u(x,t)$ para $t\geq 0$.