problemas adicionales 1

1. Sea [E] $y^3u_y-u_x=2y^2u$. a] Hallar la solución general de [E] tomando i) $\eta=y$, ii) $\eta=x$.
b] Resolver [E] con el dato inicial $u(x,1)=2x$, estudiando la unicidad de la solución.
c] ¿En qué puntos del plano es tangente la curva $2x=-y^2$ a alguna característica de [E]?

2. Sea $u_y-2yu_x=2yu$ y los datos iniciales: i) $u(x,1)=e^{-x}$, ii) $u(-y^2,y)=0$. Hallar la única solución que satisface uno de ellos y dos soluciones distintas que cumplan el otro.

3. Sea (E) $u_t-2tu_x=2t(x-t^2)u$. Hallar la solución de (E) con $u(x,1)=1$ tomando i) $\eta=t$, ii) $\eta=x$.
Escribir 2 soluciones distintas de (E) válidas en un entorno de origen que cumplan $u(0,t)=0$.

4. Sea (E) $(y+1)u_y+xu_x=0$. Dibujar sus características. Probar que (E) tiene una única solución satisfaciendo $u(x,0)=f(x)$. Probar que si f no es constante dicha solución no puede estar definida en todo $\mathbf{R}^2$. ¿En torno a qué puntos hay más de una solución de (E) que cumple $u(y^2,y)=0$? Estudiar si existen soluciones de (E) satisfaciendo $u(0,y)=g(y)$.

5. Determinar en torno a qué puntos tienen solución única los problemas:

$$\begin{array}{lll} \operatorname{sen} y\, u_y+u_x=1 & (x^2+y^2)u_y+u_x=0 & (x^2+y)u_y+xu_x=0 \\ u(0,y)=1 & u(x,0)=0 & u(x,x^2)=x \end{array}$$

6. Probar que ninguna solución de $u_x=0$ está definida en todo el semiplano $y\geq 0$ y contiene la curva Γ: $y=x^2, z=x^3$. Estudiar en qué entornos de Γ hay soluciones únicas locales.

7. Hallar (si se puede) la solución o soluciones de las siguientes ecuaciones cuasilineales que satisfacen cada uno de los datos de Cauchy que se indican:

$$\begin{array}{lll} uu_y+xu_x=u & \text{con} & \text{i) } u(x,0)=1\ , \quad \text{ii) } u(0,y)=1 \\ u_y+u_x=u^2 & \text{con} & \text{i) } u(x,0)=x\ , \quad \text{ii) } u(x,x)=1 \end{array}$$

8. Reducir a forma canónica y, si es posible, encontrar la solución general:

$$t^2u_{tt}-x^2u_{xx}=0 \qquad u_{yy}+2u_{xy}+2u_{xx}=0 \qquad x^2u_{xx}-2xyu_{xy}+y^2u_{yy}=e^x$$

9. Sea [E] $u_{tt}-x^2u_{xx}-u_t=0$. Escribirla en forma canónica y hallar su solución general. Determinar la solución de [E] que satisface $u(x,0)=2x$, $u_t(x,0)=x$. Escribir (si existe) alguna solución de [E], distinta de la $u\equiv 0$, que cumpla $u(e^t,t)=u_t(e^t,t)=0$.

10. Sea $u_{yy}-4yu_{xy}+4y^2u_{xx}-\frac{1}{y}u_y=0$. Hallar su solución general y la que cumple $\begin{array}{l} u(x,1)=x+1 \\ u_y(x,1)=2x+4 \end{array}$.

11. **i]** Resolver $v_y+e^{x+y}v_x-v=0$ con el dato inicial $v(x,0)=e^{-x}$.
ii] Escribir en forma canónica $u_{yy}+e^{x+y}u_{xy}-u_y=0$. Hallar su solución general.

12. Resolver los siguientes problemas de Cauchy $(x,t\in\mathbf{R})$:

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0 \\ u(x,x)=0 \\ u_t(x,x)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=u_t+u_x \\ u(x,0)=x \\ u_t(x,0)=0 \end{cases}$$

13. El potencial v y la intensidad i en una linea telegráfica satisfacen: $\begin{array}{l} v_x+Li_t+Ri=0 \\ i_x+Cv_t+Gv=0 \end{array}$,
donde L, R, C y G son constantes características de la linea. a) Hallar la EDP de segundo orden (E) que verifica v . b) Si $GL=RC$, comprobar que un cambio adecuado reduce (E) a la ecuación de ondas y hallar $v(x,t)$ si inicialmente $v(x,0)=V(x)$ e $i(x,0)=I(x)$.

14. Estudiar la unicidad de los problemas (D dominio acotado en $\mathbf{R}^2$):

$$\begin{cases} \Delta u-k^2u=F \text{ en } D \\ u=f \text{ en } \partial D \end{cases} \qquad \begin{cases} u_t-k\Delta u=F(x,y,t) \text{ en } D \\ u(x,y,0)=f(x,y) \text{ en } D \\ u(x,y,t)=0 \text{ en } \partial D \end{cases}$$

15. Estudiar la unicidad de los problemas:

$$\begin{cases} u_{tt}-(c(x)u_x)_x=F(x,t)\,,\ x\in(0,1),\, t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=f(x),\ u_t(x,0)=g(x) \\ u(0,t)=0,\ u(1,t)=0 \\ \ (c\in C^1 \text{ y positiva}) \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta u=F \text{ en } D\subset\mathbf{R}^2 \text{ dominio acotado} \\ u=f \text{ en } C_1\,,\ u_{\mathbf{n}}=g \text{ en } C_2 \\ C_1\cup C_2=\partial D\,,\ C_1\cap C_2=\varnothing \end{cases}$$

16. Si la distribución inicial de temperaturas en una varilla es $f(x)=2x^2-3x$, $x\in[0,2]$, y la temperatura para $t>0$ en los extremos es $h_0(t)=-t/(1+t^2)$, $h_2(t)=2\,\mathrm{sen}\,t/t$, y suponemos que no existen fuentes de calor en el interior de la varilla, determinar la máxima y mínima temperaturas alcanzadas en la varilla para $t\geq 0$.

problemas adicionales 2

1. Desarrollar $f(x)=x$ en las autofunciones del problema $\begin{cases} y''-2y'+y+\lambda y=0 \\ y(0)=y(1)=0 \end{cases}$.

2. Desarrollar $f(x)=x$ en autofunciones del problema singular: $\begin{cases} xy''+2y'+\lambda xy=0 \\ y \text{ acotada en } 0, y'(1)=0 \end{cases}$.

3. Desarrollar $f(x)=1-x^2$ en serie de autofunciones del problema: $\begin{matrix} (xy')'+\lambda xy=0 \\ y \text{ acotada en } 0, y(1)=0 \end{matrix}$

4. Determinar los autovalores de $\begin{matrix} y''+[\lambda-V(x)]\,y=0 \\ y(0)=y(2)=0 \end{matrix}$ si $V(x)=\begin{cases} 0, & \text{si } 0<x<1 \\ 1, & \text{si } 1<x<2 \end{cases}$.

5. Sea $\begin{matrix} y''=e^{-(x-1)^2} \\ \alpha y(0)+(1-\alpha)y'(0)=y(1)=0 \end{matrix}$. Precisar para qué valores de α tiene solución.

6. Discutir, según los valores de la constante b, cuántas soluciones tienen los problemas:

$$\begin{cases} xy''+2y'=1 \\ y'(1)=2y'(2)+by(2)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2y''-3xy'+3y=b-x^2 \\ y(1)=y'(1)\,,\ y(2)=2y'(2) \end{cases}$$

7. Estudiar la unicidad de $y''=f(x)$, $x\in(0,1)$ [ecuación de Poisson en una dimensión] con diferentes condiciones separadas, utilizando técnicas similares a las de las EDPs.

8. Precisar cuándo tiene solución o soluciones $\begin{matrix} u''+r^{-1}u'=F(r) \\ u'(1)-au(1)=A, u'(2)+bu(2)=B \end{matrix}$, $a,b\geq 0$.
[se puede interpretar como un problema para Laplace en el plano con simetría radial].

9. Sea $\begin{matrix} y''+\lambda y=1 \\ y'(-1)=y(1)=0 \end{matrix}$. a) Hallar autovalores y autofunciones del problema homogéneo. b) ¿Existen para algún λ infinitas soluciones del no homogéneo?

10. Sea $\begin{matrix} y''+\lambda y=-4\pi^2 x \\ y(0)=1\,,\ y(1)=0 \end{matrix}$. ¿Para qué valores de λ tiene solución única? Precisar para qué λ tiene infinitas y resolverlo en ese caso.

11. Sea $\begin{matrix} y''+\lambda y=1 \\ y(0)-y'(0)=y(1)+y'(1)=0 \end{matrix}$. Hallar autovalores y autofunciones del homogéneo. Ver para qué λ hay solución y para cuáles es única.
Calcular aproximadamente λ_1, λ_2, λ_3 y los ceros en $(0,1)$ de y_2 e y_3.

12. Estudiar para qué valores de $n\in\mathbf{N}$ existe solución de: $\begin{matrix} y''+ny=\cos^n x \\ y(0)=y(2\pi),\ y'(0)=y'(2\pi) \end{matrix}$.

13. Sea $\begin{cases} \cos x\, y''-2\operatorname{sen} x\, y'=f(x) \\ y'(-\frac{\pi}{4})=y'(\frac{\pi}{4})-ay(\frac{\pi}{4})=0 \end{cases}$ **a]** Ver para qué a no tiene solución única y dar para ese a una $f(x)$ para el que haya infinitas soluciones. **b]** Resolverlo con la función de Green si $a=2$, $f(x)=1$.

14. Calcular para $\lambda=0$ y $\lambda=1$ la solución (si la hay) de $\begin{matrix} x^2y''-xy'+\lambda y=x^3 \\ y(1)-y'(1)=y(2)-2y'(2)=0 \end{matrix}$,
haciendo uso de la función de Green en el caso de que exista.

15. Sea $\begin{matrix} xy''+2y'+\lambda xy=f(x) \\ y(1)=y(2)=0 \end{matrix}$. Hallar autovalores y autofunciones del homogéneo.
Determinar para qué $n\in\mathbf{N}$ el problema con $\lambda=\pi^2$, $f(x)=\operatorname{sen} n\pi x$ tiene soluciones, calculándolas en ese caso. Si $\lambda=0$, $f(x)=1$, hallar la solución con la función de Green.

16. Sea $\begin{matrix} xy''+2y'=x+c \\ y'(1)-ay(1)=y'(2)=0 \end{matrix}$. a) Discutir cuántas soluciones tiene. b) Para $c=0$, $a=-1$, hallar la solución haciendo uso de la función de Green.

17. Hallar la $G(x,s)$ del problema singular $\begin{array}{l}(xy')'=f(x)\\ y \text{ acotada en } 0,\ y(1)=0\end{array}$, usando la fórmula para problemas regulares. Comprobar que proporciona la solución i) si $f(x)=1$, ii) si $f(x)=x$. Relacionar los resultados con la ecuación de Poisson en el plano.

18. Constuir la función de Green de $\begin{array}{l}y''=f(x)\\ y(0)=-y(1),\ y'(0)=-y'(1)\end{array}$. Resolverlo si $f(x)=x$.

19. Hallar una fórmula para la solución de un problema de Sturm-Liouville no homogéneo utilizando desarrollos en serie de autofunciones del homogéneo.
Escribir, si $\lambda\neq n^2\pi^2$, el desarrollo en autofunciones de la solución de $\begin{array}{l}y''+\lambda y=1\\ y(0)=y(1)=0\end{array}$.
Hallar la solución exacta para $\lambda=0,1,-1$. Desarrollarla si $\lambda=0$ y comprobar.

20. Desarrollar la solución para $\lambda=0$ en serie de autofunciones del homogéneo:

$$\begin{array}{lll}y''+\lambda y=x & y''+\lambda y=\operatorname{sen}\pi x & y''-2y'+y+\lambda y=e^x\\ y(0)=y'(1)=0 & y(-1)=y(1)=0 & y(0)=y(1)=0\end{array}$$

problemas adicionales 3

1. a] Desarrollar $f(x)=\cos\frac{x}{2}$, $x\in[0,\pi]$, en serie de $\{\operatorname{sen} nx\}$, dibujando la función hacia la que tiende la serie y estudiando la convergencia uniforme.

b] Resolver: $\begin{cases} u_t-u_{xx}=0\,,\ x\in(0,\pi),\ t>0 \\ u(x,0)=0\,,\ u(0,t)=e^{-t/4},\ u(\pi,t)=0 \end{cases}$. [Conviene buscar una v que cumpla también la ecuación].

2. a] Sea $\begin{cases} y''+\lambda y=x \\ y'(-1)=y'(1)=0 \end{cases}$. Hallar autovalores y autofunciones del homogéneo y precisar si hay para algún λ infinitas soluciones del no homogéneo.

b] Resolver: $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\in[-1,1],\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\cos 2\pi x\,,\ u_t(x,0)=1\ ;\ u_x(-1,t)=u_x(1,t)=0 \end{cases}$.

3. Resolver por separación de variables y dar interpretación física cuando se pueda:

a) $\begin{cases} u_t-u_{xx}=0\,,\ x\in(0,\pi),\ t>0 \\ u(x,0)=1 \\ u(0,t)=0,\ u(\pi,t)=\cos t \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_t-u_{xx}=0\,,\ x\in(0,\pi),\ t>0 \\ u(x,0)=0 \\ u(0,t)=1,\ u_x(\pi,t)=0 \end{cases}$

4. Sea $\begin{cases} u_t-u_{xx}=A\,,\ x\in(0,1),\ t>0 \\ u(x,0)=B \\ u_x(0,t)=C,\ u_x(1,t)=D \end{cases}$ Resolverlo y determinar para qué relación entre las constantes A,B,C,D hay solución estacionaria (interpretarlo físicamente).

5. Sea $\begin{cases} u_t-u_{xx}=F(x)\,,\ x\in(-1,1),\ t>0 \\ u(x,0)=0\,,\ u_x(-1,t)=u_x(1,t)=0 \end{cases}$ y sea $Q(t)=\int_{-1}^{1}u(x,t)\,dx$.

Calcular la variación en el tiempo de $Q(t)$ y deducir cuándo es constante.
Resolver si: i) $F(x)=\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}$, ii) $F(x)=\operatorname{sen}^2\frac{\pi x}{2}$. ¿Tiene límite u cuando $t\to\infty$?

6. Sea una varilla de aluminio ($k=0.86\,\mathrm{cm}^2$/seg) de 20 cm de longitud, con una temperatura inicial uniforme de 25 grados. En el instante $t=0$ el extremo $x=0$ se enfría hasta 0 grados, mientras que el extremo $x=20$ se calienta hasta 60 grados, y ambos se mantienen después a esas temperaturas. Escribir la distribución de temperaturas $u(x,t)$ para todo t y evaluar u en $x=5$, 10 y 15 para $t=0$, 5 y 30 utilizando tres y diez términos de la serie.

7. Resolver $\begin{cases} u_t-u_{xx}=0\,,\ x\in(0,1),\ t>0 \\ u(x,0)=0\,,\ u(0,t)+u_x(0,t)=1,\ u_x(1,t)=0 \end{cases}$ y comprobar que $u\underset{t\to\infty}{\to}-\infty$.

8. Sea $\begin{cases} u_t-u_{xx}-2u_x=F(x)\,,\ x\in(0,\pi),\ t>0 \\ u(x,0)=f(x) \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$. a] Resolverlo en general, y para $F(x)=f(x)=e^{-x}\operatorname{sen}2x$. b] Demostrar que tiene solución única.

9. Resolver $\begin{cases} u_t-2tu_{xx}=0\,,\ x\in(0,3),\ t>0 \\ u(x,0)=0\,,\ u(0,t)=0,\ u_x(3,t)=t^2 \end{cases}$ y demostrar que tiene solución única.

10. Resolver por separación de variables:

a) $\begin{cases} \Delta u=0,\ r<2 \\ u(2,\theta)=\begin{cases} 3,\ x\in(-\pi/2,\pi/2) \\ 1,\ x\in(\pi/2,3\pi/2) \end{cases} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \Delta u+u=0\,,\ r<1,\ \pi/2<\theta<3\pi/2 \\ u(1,\theta)=\operatorname{sen}2\theta,\ u \text{ acotada} \\ u(r,\frac{\pi}{2})=u(r,\frac{3\pi}{2})=0 \end{cases}$

11. Resolver el problema plano $\begin{cases} \Delta u=9r\,,\ 1<r<2 \\ u(1,\theta)=2\operatorname{sen}^2\theta,\ u_r(2,\theta)=0 \end{cases}$.

12. Resolver el problema plano $\begin{cases} \Delta u=\pi\,,\ r<1,\ \theta\in(0,\pi) \\ u(r,0)=u(r,\pi)=u(1,\theta)=0 \end{cases}$ y probar que $u(\frac{1}{2},\frac{\pi}{2})\le 0$.

13. Sean $(\mathrm{P}_\alpha)\begin{cases} \Delta u=0\,,\ r<1,\ 0<\theta<\alpha \\ u(1,\theta)=\operatorname{sen}\frac{k\pi\theta}{\alpha}\,,\ u(r,0)=u(r,\alpha)=0 \end{cases}$ y $(\mathrm{P})\begin{cases} \Delta u=0\,,\ r<1 \\ u(1,\theta)=\operatorname{sen}\frac{k\pi\theta}{2} \end{cases}$.

Comparar para $k=1$ y $k=2$ las soluciones de (P) con las de (P_α) si $\alpha\to 2\pi$.
Hallar cotas superiores e inferiores para todas las soluciones.

14. Resolver por separación de variables $\begin{cases} u_{tt}-\Delta u=0,\ (x,y)\in(0,\pi)\times(0,\pi),\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,y,0)=\operatorname{sen}^3 x \operatorname{sen} y\,,\ u_t(x,y,0)=0 \\ u(0,y,t)=u(\pi,y,t)=0\,,\ u(x,0,t)=u(x,\pi,t)=0 \end{cases}$.

15. Resolver el problema para la ecuación de Laplace en el espacio $\begin{cases} \Delta u=0\,,\ r<1 \\ u_r(1,\theta)=\cos^3\theta \end{cases}$.

16. Un cubo homogéneo de lado π, inicialmente a temperatura constante T_1, se sumerge en el tiempo 0 en un baño que se mantiene a temperatura T_2. Hallar la distribución de temperaturas en cualquier tiempo $t>0$.

17. a) Hallar la solución de $\begin{matrix} y''=f(x) \\ y(1)=a, y(2)=b \end{matrix}$ en términos de la función de Green, la función f y las constantes a y b, por el camino de cálculo de la G para la ecuación de Laplace en el plano $\left[\, v(s)=\frac{1}{2}|s-x| \text{ satisface } v''=\delta(s-x) \text{ para } x \text{ fijo} \,\right]$. b) Llegar al resultado con técnicas del capítulo 2. c) Escribir la solución si $f(x)=1$, $a=0$, $b=1$.

18. Sabiendo que $u(1,\theta)=\begin{cases} \operatorname{sen}\theta,\ \theta\in[0,\pi] \\ 0\,,\ \theta\in[\pi,2\pi] \end{cases}$,
hallar el potencial u en el punto del plano de coordenadas polares $r=2$, $\theta=0$.

19. Hallar la función de Green para la ecuación de Laplace:
i) en el semicírculo $r<1$, $\theta\in(0,\pi)$; ii) en el dominio $r>1$, $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$.

20. Escribir, en coordenadas esféricas, la función de Green G para la ecuación de Laplace en la esfera unidad y deducir la expresión, en términos de G, F y f, de la solución de:

$$\text{(P)} \begin{cases} \Delta u=F\,,\ r<1 \\ u=f \ \text{ si } r=1 \end{cases}$$

Hallar el valor de la solución de (P) en el origen en caso de que: i) $F=f=1$, ii) $F=z$, $f=z^3$.

problemas adicionales 4

1. Para los problemas: a] $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\geq 0, t\in\mathbf{R} \\ u_t(x,0)=\begin{cases}\operatorname{sen}\pi x,\ 1\leq x\leq 2\\ 0 \text{ en } [0,1]\cup[2,\infty)\end{cases} \\ u(x,0)=u(0,t)=0\end{cases}$ b] $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\in[0,4], t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\begin{cases}\operatorname{sen}\pi x,\ 2\leq x\leq 3\\ 0 \text{ resto de } [0,4]\end{cases} \\ u_t(x,0)=u(0,t)=u(4,t)=0\end{cases}$

i) dibujar el dominio de influencia; ii) dibujar $u(x,1)$, $u(x,2)$ y $u(x,3)$; ii) dibujar $u(3,t)$, $t\geq 0$.

2. Dibujar $u(x,\frac{1}{2})$, $u(x,1)$, $u(x,2)$, $u(x,3)$ y $u(1,t)$, $t\geq 0$, y hallar $u(x,1)$, para:

$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\begin{cases}\operatorname{sen}\pi x,\ 2\leq x\leq 3\\ 0 \text{ resto de } \mathbf{R}\end{cases} \\ u_t(x,0)=\begin{cases}\operatorname{sen}\pi x, -2\leq x\leq -1\\ 0 \text{ resto de } \mathbf{R}\end{cases}\end{cases}$ $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\geq 0, t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\begin{cases}x(1-x),\ 0\leq x\leq 1\\ 0,\ x\geq 1\end{cases} \\ u_t(x,0)=u(0,t)=0\end{cases}$ $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=\operatorname{sen}\pi x\,, x\in[0,1], t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\operatorname{sen}\pi x \\ u_t(x,0)=\operatorname{sen}\pi x \\ u(0,t)=u(1,t)=0\end{cases}$

3. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\in[0,1],\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=0\,,\ u(1,t)=\operatorname{sen} t\end{cases}$. Hallar $u(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ y $u(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$.

4. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\in[0,2], t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=u(2,t)=t^2\end{cases}$ Hallar $u(1,3)$: a] usando la v de los apuntes, b] con una v que cumpla la ecuación, c] por separación de variables.

5. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\geq 0, t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=e^{-x}\,,\ u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=e^{-t}\end{cases}$. a] Hallar $u(2,3)$. [Ayuda: una buena $v(x,t)$ sale de separar variables y tomar $\lambda=-1$]. b] Hallar $u(x,t)$, $x,t\geq 0$. c] Dibujar aproximadamente $u(x,3)$.

6. Sea $\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}=F(x,t)\,,\ x,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0\end{cases}$, $F(x,t)=\begin{cases}1,\ x\in[1,2],\ t\geq 0\\ 0,\ \text{en el resto}\end{cases}$. Calcular $u(-1,1)$ y $u(1,1)$. Calcular y dibujar $u(x,1)$.

7. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\geq 0,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=f(x), u_t(x,0)=g(x) \\ u_x(0,t)=0\end{cases}$ ¿Se invierten las ondas al reflejarse en $x=0$? ¿Cómo son los dominios de influencia? ¿Cuándo la solución es clásica?

8. Hallar la solución general de $u_{tt}-e^{2t}u_{xx}-u_t=0$, y la que cumple $u(x,0)=f(x)$, $u_t(x,0)=0$.

Si $f(x)=\begin{cases}1-2|x|,\ \text{si } |x|\leq 1/2\\ 0\,,\ \text{en el resto}\end{cases}$, dibujar la solución para $t=1$ y $t=2$.

¿Cuál es el dominio de influencia sobre la solución del valor inicial de f en $x=0$?
¿Cuál es el dominio de dependencia de $u(0,1)$ de los valores de f?

9. Resolver $\begin{cases} u_{tt}-c^2[u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}]=0 \\ u(x,y,z,0)=f(x,y,z) \\ u_t(x,y,z,0)=0\end{cases}$, si $f(x,y,z)=\begin{cases}\text{a] } x+y+z\\ \text{b] } x+y\\ \text{c] } x\end{cases}$.

10. Vistos como problemas en 1, 2 y 3 dimensiones, hallar $u(0,t)$, $t\geq 0$ y $u(r,t)$ si se puede:

$\begin{cases} u_{tt}-\Delta u=0 \\ u(r,0)=f(r)\,,\ u_t(r,0)=g(r)\end{cases}$ con a) $f(r)=g(r)=r^2$, b) $f(r)=0$, $g(r)=\begin{cases}1-r^2,\ r\leq 1\\ 0\,,\ r\geq 1\end{cases}$.

11. Sea $\begin{cases} u_{tt}-(u_{rr}+\frac{2}{r}u_r)=0\,,\ r\geq 0 \\ u(r,0)=6\,,\ u_t(r,0)=5r^3\end{cases}$. Hallar $u(2,3)$.

12. Sean $\begin{cases} v_{tt}-v_{xx}=0\,,\ x\geq 0,\ t\in\mathbf{R} \\ v(x,0)=0\,,\ v_t(x,0)=\frac{6x^2}{1+x^3}\,,\ v(0,t)=0\end{cases}$ y $\begin{cases} u_{tt}-u_{rr}-\frac{2u_r}{r}=0\,,\ r\geq 0,\ t\in\mathbf{R} \\ u(r,0)=0\,,\ u_t(r,0)=\frac{6r}{1+r^3}\end{cases}$.

a] Hallar $v(1,4)$ y $u(1,4)$. b] Más en general, hallar $v(1,t)$ para $t\geq 0$.

13. Sea $\begin{cases} u_{tt}-(u_{rr}+\frac{2}{r}u_r)=0\,,\ r\geq 0 \\ u(r,0)=\frac{2}{4+r^2}\,,\ u_t(r,0)=0\end{cases}$. a] Hallar $u(1,5)$ y $u(7,5)$. Hallar $u(0,t)$. b] Dibujar aproximadamente y simplificar $u(r,5)$.

14. Sean $\begin{cases} v_{tt}-v_{rr}=0\,,\ r\geq 0,\ t\in\mathbf{R} \\ v(r,0)=\begin{cases} 2r-r^2,\ r\in[0,2] \\ 0 \text{ en el resto}\end{cases} \equiv F(r) \\ v_t(r,0)=v(0,t)=0 \end{cases}$ y $\begin{cases} u_{tt}-u_{rr}-\frac{2}{r}u_r=0\,,\ r\geq 0,\ t\in\mathbf{R} \\ u(r,0)=\begin{cases} 2-r\,,\ r\in[0,2] \\ 0 \text{ en el resto}\end{cases} \equiv f(r) \\ u_t(r,0)=0 \end{cases}$.

a] Hallar $v(6,3)$, $v(2,3)$ y $u(4,3)$. b] Dibujar y hallar la expresión de $v(r,3)$.
c] Hallar el valor máximo de $u(r,3)$ $\left[\sqrt{15}\approx 3.873\right]$.

15. Resolver (en términos de funciones elementales) $\begin{cases} u_t-u_{xx}-2u_x=0\,,\ x\in\mathbf{R}\,,\ t>0 \\ u(x,0)=e^{-x^2/2}\,,\ u \text{ acotada}\end{cases}$:

a] con la $\mathcal{F}$ directamente, b] con un cambio $u=e^{pt}e^{qx}w$ que lleve a la ecuación del calor.

16. Sea (E) $u_t-u_{xx}-2u_x+au=0$. Simplificarla con un cambio de variable adecuado. Hallar la solución de (E) que cumple $u(x,0)=e^{-x^2}$ y analizar su comportamiento cuando $t\to\infty$.

17. Resolver: a] $\begin{cases} u_t+2tu_x=4tu \\ u(x,1)=f(x)\end{cases}$, b] $\begin{cases} t^2u_t-u_x=g(x) \\ u(x,1)=0\end{cases}$ por las características y mediante la $\mathcal{F}$.

18. Sean a] $\begin{cases} u_t-2tu_{xx}=0\,,\ x\in\mathbf{R},\ t>0 \\ u(x,0)=\delta(x),\ u \text{ acotada}\end{cases}$ y b] $\begin{cases} u_t-u_{xx}=\delta(x),\ x\in\mathbf{R},\ t>0 \\ u(x,0)=0,\ u \text{ acotada}\end{cases}$.

Hallar, sin que aparezcan integrales en el resultado, $u(x,t)$ para a] y $u(0,t)$ para b].

19. Resolver: $\begin{cases} u_t-u_{xx}=0\,,\ x,t>0 \\ u(x,0)=f(x),\ u_x(0,t)=g(t),\ u \text{ acotada}\end{cases}$

20. Sea (P) $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\geq 0,\ t\geq 0 \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0,\ u(0,t)=\operatorname{sen} t\end{cases}$. [Ayuda: $v=\operatorname{sen} t\cos x$ satisface la condición de contorno y la ecuación].

i) Hallar y describir $u(x,t)$ para cada $t>0$ fijo.

ii) Hallar la transformada seno $\hat{u}_s$ de la solución u hallada en i).
Hallar $\hat{u}_s$ resolviendo directamente (P) por transformadas seno.

21. Hallar la función de Green para la ecuación de Laplace en el semiplano $\{(x,y): x\in\mathbf{R}, y>0\}$ y utilizarla para la hallar la solución de $\begin{cases} \Delta u=F(x,y),\ x\in\mathbf{R},\ y>0 \\ u(x,0)=f(x)\,,\ u \text{ acotada}\end{cases}$.

Resolver el mismo problema para $F\equiv 0$ con transformadas de Fourier.

22. a] Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}+2u_t+u=0\,,\ x,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=f(x),\ u_t(x,0)=0\end{cases}$. Resolverlo con la $\mathcal{F}$ y haciendo $u=w\,e^{-t}$.
Si $f(x)=\begin{cases} \operatorname{sen}\pi x\,,\ x\in[0,1] \\ 0\,,\ \text{en el resto}\end{cases}$ dibujar $u(x,3)$.

b] Resolver $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}+2u_t+u=0\,,\ 0<x<1,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\operatorname{sen}\pi x,\ u_t(x,0)=u(0,t)=u(1,t)=0\end{cases}$.