Apéndice

Repaso de EDOs

Algunas EDOs de primer orden $\boxed{\frac{dy}{dx}=f(x,y)}$ resolubles

$\Big[f\,,\ f_y$ continuas en un entorno de $(x_o,y_o) \Rightarrow$ existe solución única de $\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_o)=y_o \end{cases}$ (TEyU)$\Big]$.

Separables: $\frac{dy}{dx}=\frac{p(x)}{q(y)} \ \to\ \int q(y)\,dy=\int p(x)\,dx+C$.

Se convierten en separables: $\frac{dy}{dx}=f\big(\frac{y}{x}\big)$ con $z=\frac{y}{x}$. $\frac{dy}{dx}=f(ax+by)$ con $z=ax+by$.

Lineales: $\frac{dy}{dx}=a(x)y+f(x) \ \to\ y=C\,\mathrm{e}^{\int a(x)dx}+\mathrm{e}^{\int a(x)dx}\int \mathrm{e}^{-\int a(x)dx}f(x)\,dx$.

[solución general de la homogénea + solución y_p de la no homogénea].

Exactas: $M(x,y)+N(x,y)\frac{dy}{dx}=0$ con $M_y\equiv N_x \ \to\ \begin{matrix} M=U_x \\ N=U_y \end{matrix} \ \to\ U(x,y)=C$ solución.

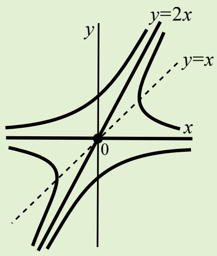
Ej. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{y-x}$ (con solución única si $y\neq x$) la podemos resolver por tres caminos diferentes:

$z=\frac{y}{x} \ \to\ xz'+z=\frac{z}{z-1} \ \to\ \int\frac{2z-2}{z^2-2z}\,dz=-2\int\frac{dx}{x}+C \ \to\ z^2-2z=\frac{y^2}{x^2}-2\frac{y}{x}=\frac{C}{x^2}$.

$y+(x-y)\frac{dy}{dx}=0\,,\ M_y\equiv N_x=1 \to \begin{matrix} U_x=y \ \to\ U=xy+p(y) \\ U_y=x-y \to U=xy-\frac{1}{2}y^2+q(x) \end{matrix}\,,\ y^2-2xy=C$.

$\frac{dx}{dy}=\frac{y-x}{y}=-\frac{x}{y}+1$ lineal (solución única si $y\neq 0$). $x=\frac{C}{y}+\frac{1}{y}\int y\,dy=\frac{C}{y}+\frac{y}{2}$.

[Pasa una única curva integral (solución de $\frac{dy}{dx}=\cdots$ o de $\frac{dx}{dy}=\cdots$) salvo por el origen $(0,0)$, único punto en que falla el TEyU para ambas EDOs].



EDOs lineales de orden 2

[n] $\boxed{y''+a(x)y'+b(x)y=f(x)}$, a, b, f continuas en I. $|W|(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ (wronskiano).

Si $x_o\in I$, tiene una sola solución (definida en todo I) con $y(x_o)=y_o$, $y'(x_o)=y_o'$.

Si y_1, y_2 son soluciones de la homogénea ($f\equiv 0$) con wronskiano $|W|(s)\neq 0$ para algún $s\in I$, la solución general de la homogénea es: $y=c_1y_1+c_2y_2$.

Si y_p es una solución de [n], la solución general de [n] es: $y=c_1y_1+c_2y_2+y_p$.

Una solución particular de [n] es: $y_p=y_2\int\frac{y_1 f}{|W|}\,dx-y_1\int\frac{y_2 f}{|W|}\,dx$ [**fvc**].

Si $b(x)\equiv 0$, el cambio $y'=v$ lleva [n] a lineal de primer orden en v.

y_1 solución de la homogénea $\Rightarrow y_2=y_1\int \mathrm{e}^{-\int a\,dx}y_1^{-2}\,dx$ otra solución de la homogénea.

Ej. $xy''-2y'=x \xrightarrow{y'=v} v'=\frac{2v}{x}+1 \ \to\ v=Cx^2+x^2\int\frac{dx}{x^2}=Cx^2-x \ \to\ y=K+Cx^3-\frac{1}{2}x^2$.

[También se puede ver como una ecuación de Euler: $x^2y''-2xy'=x^2$, tratadas en la sección 2.2].

Ej. $x^3y''-xy'+y=0$. Es claro que $y_1=x$ es solución de esta lineal homogénea.

Como $a(x)=-\frac{1}{x^2}$ otra solución es: $y_2=x\int\frac{\mathrm{e}^{-\int -x^{-2}dx}}{x^2}\,dx=x\int\frac{\mathrm{e}^{-1/x}}{x^2}\,dx=x\,\mathrm{e}^{-1/x}$.

Por tanto, la solución general de la ecuación será: $y=c_1x+c_2x\,\mathrm{e}^{-1/x}$.

[Las rectas $y=x+b$ son soluciones de la homogénea que saltan a la vista, pues el término con la y'' no aparece y basta mirar los otros dos].

Lineales de orden 2 con coeficientes constantes

$$[\mathrm{h}]\ \boxed{y''+ay'+by=0}\,,\quad \mu^2+a\mu+b=0 \text{ (sus raíces: autovalores de [h]).}$$

La solución general de [h] ($a,b\in\mathbf{R}$) es:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } \mu_1\neq\mu_2 \text{ reales} \to y=c_1\,e^{\mu_1 x}+c_2\,e^{\mu_2 x}\\ \text{Si } \mu \text{ doble (real)} \to y=(c_1+c_2 x)\,e^{\mu x}\\ \text{Si } \mu=p\pm iq \to y=(c_1\cos qx+c_2\,\mathrm{sen}\,qx)\,e^{px}\end{array}}$$

$\big[$Si $a,b\in\mathbf{C}$ será $y=c_1e^{\mu_1x}+c_2e^{\mu_2x}$ ó $y=(c_1+c_2x)\,e^{\mu x}$ con $\mu_1,\mu_2,\mu,c_1,c_2\in\mathbf{C}\big]$.

Ej. $y''+4y'+3y=0$, $\mu^2+4\mu+3=0 \to \mu=-1,-3 \to y=c_1\,e^{-x}+c_2\,e^{-3x}$.
$y''+4y'+4y=0$, $\mu^2+4\mu+4=0 \to \mu=-2$ doble $\to y=(c_1+c_2x)\,e^{-2x}$.
$y''+4y'+5y=0$, $\mu^2+4\mu+5=0 \to \mu=-2\pm \mathrm{i} \to y=(c_1\cos x+c_2\,\mathrm{sen}\,x)\,e^{-2x}$.
$y''-4\mathrm{i}\,y'-3y=0$, $\mu^2-4\mathrm{i}\,\mu-3=0 \to \mu=\mathrm{i},3\mathrm{i} \to y=c_1\,e^{\mathrm{i}x}+c_2\,e^{3\mathrm{i}x}$, $c_1,c_2\in\mathbf{C}$.

Método de coeficientes indeterminados para [c] $\boxed{y''+ay'+by=f(x)}$:

Si $f(x)=e^{\mu x}p_m(x)$, con p_m polinomio de grado m, y μ no es un autovalor, tiene [c] solución particular de la forma $y_p=e^{\mu x}P_m(x)$, con P_m de ese mismo grado. Si μ es autovalor de multiplicidad r, hay $y_p=x^re^{\mu x}P_m(x)$.
Si $f(x)=e^{\mu x}\big[p_j(x)\cos qx+q_k(x)\,\mathrm{sen}\,qx\big]$, p_j, q_k de grados j, k, y $p\pm iq$ no autovalor, existe $y_p=e^{px}\big[P_m(x)\cos qx+Q_m(x)\,\mathrm{sen}\,qx\big]$, con P_m y Q_m de grado $m=\text{máx}\{j,k\}$.
Si $p\pm iq$ es autovalor es de la forma $y_p=xe^{px}\big[P_m(x)\cos qx+Q_m(x)\,\mathrm{sen}\,qx\big]$.

Ej. $\begin{cases} y''-y=e^x \\ y(0)=y'(0)=0\end{cases}$. $\mu^2-1=0$, $\mu=\pm1$. La solución general de la homogénea es $y=c_1e^x+c_2e^{-x}$.

$y_p=Axe^x \to A(x+2)-Ax=1,\ A=\frac12 \to y_p=\frac12xe^x$. O más largo con la [**fvc**]:

$|W|(x)=\begin{vmatrix} e^x & e^{-x}\\ e^x & -e^{-x}\end{vmatrix}=-2,\ y_p=e^{-x}\int\frac{e^xe^x}{-2}dx-e^x\int\frac{e^{-x}e^x}{-2}dx=-\frac14e^x+\frac12xe^x$.

La solución general de la no homogénea será entonces: $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+\frac12xe^x$.

Imponiendo los datos iniciales: $\begin{array}{l}c_1+c_2=0\\ c_1-c_2+\frac12=0\end{array} \to y=\frac14e^{-x}-\frac14e^x+\frac12xe^x$, única solución.

Ej. Hallemos una y_p de $y''+y=f(x)$ para diferentes $f(x)$.

$\big[$Su solución general es $y=c_1\cos x+c_2\,\mathrm{sen}\,x+y_p\big]$.

Si $f(x)=x^3$, hay $y_p=Ax^3+Bx^2+Cx+D$ $\big(P_3$ arbitrario pues $\lambda=0$ no es autovalor$\big)$
$\to 6Ax+2B+Ax^3+Bx^2+Cx+D=x^3 \to y_p=x^3-6x$.

Si $f(x)=2xe^x$, existe $y_p=e^x(Ax+B)$, $y_p'=e^x(Ax+B+A)$, $y_p''=e^x(Ax+B+2A)$
$\to e^x[(Ax+B+2A)+(Ax+B)]=2xe^x \to A=1,\ B=-1 \to y_p=e^x(x-1)$.

Si $f(x)=e^x\cos x$, hay $y_p=e^x(A\cos x+B\,\mathrm{sen}\,x) \to$
$(A+2B)\cos x+(B-2A)\,\mathrm{sen}\,x=\cos x \to \begin{cases}A+2B=1\\ B-2A=0\end{cases} \to y_p=e^x\big(\frac15\cos x+\frac15\,\mathrm{sen}\,x\big)$.

Si $f(x)=\mathrm{sen}\,x$, como $\pm i$ es autovalor simple, $y_p=x(A\cos x+B\,\mathrm{sen}\,x)$
$\to 2B\cos x-2A\,\mathrm{sen}\,x=\mathrm{sen}\,x \to y_p=-\frac{x}{2}\cos x$.

Si $f(x)=\cos^2x$, parece que no podemos usar coeficientes indeterminados, pero
$\cos^2x=\frac12(1+\cos 2x) \to$ hay $y_p=A+B\cos 2x+C\,\mathrm{sen}\,2x \to y_p=\frac12-\frac16\cos 2x$.

Si $f(x)=(\cos x)^{-1}$, no hay más remedio que acudir a la fórmula de variación de las constantes:
$|\mathbf{W}|(x)=1 \to y_p=\mathrm{sen}\,x\int\frac{\cos x}{\cos x}dx-\cos x\int\frac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x}dx=x\,\mathrm{sen}\,x+\cos x\ln(\cos x)$.

Si [n] no es de coeficientes constantes, ni de Euler $x^2y''+axy'+by=0$, ni es $b(x)\equiv0$, ni se puede encontrar una y_1 de la homogénea, se debe resolver utilizando series de potencias [capítulo 2 de estos apuntes].

Repaso de cálculo en varias variables

Sean $\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$, $A\subset\mathbf{R}^n$. **Entorno** $B_r(\boldsymbol{\alpha})\equiv\{\mathbf{x}:\|\mathbf{x}-\boldsymbol{\alpha}\|<r\}$. $\boldsymbol{\alpha}$ **interior** a A si existe $B_r(\boldsymbol{\alpha})\subset A$.
A **abierto** si $A=int\,A\equiv\{\mathbf{x}$ interiores a $A\}$. A **acotado** si hay $M\in\mathbf{R}$ tal que $\|\alpha\|<M$ $\forall\boldsymbol{\alpha}\in A$.
Frontera de A es $\partial A\equiv\{\mathbf{x}:\forall r, B_r(\mathbf{x})$ tiene puntos de A y de $\mathbf{R}^n-A\}$. $\overline{A}=int\,A\cup\partial A$.

La **derivada según el vector v** de un campo escalar $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ en un punto $\boldsymbol{\alpha}$ es:

$$D_{\mathbf{v}}f(\boldsymbol{\alpha})\equiv f_{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\alpha})=\lim_{h\to0}\frac{f(\boldsymbol{\alpha}+h\mathbf{v})-f(\boldsymbol{\alpha})}{h}\underset{\text{si } f\in C^1}{=}\nabla f(\boldsymbol{\alpha})\cdot\mathbf{v}\,,\ \text{siendo } \nabla f=(f_x,f_y)$$

Si $f(x(r,s),y(r,s))$, con $f,x,y\in C^1$, la **regla de la cadena** dice $\begin{matrix} f_r=f_xx_r+f_yy_r \\ f_s=f_xx_s+f_yy_s \end{matrix}$.

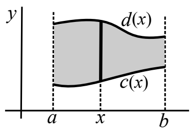
Si $\left\{\begin{matrix} y_1=f_1(x_1,..,x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n=f_n(x_1,..,x_n)\end{matrix}\right.$, el determinante **jacobiano** es $\dfrac{\partial(y_1,\dots,y_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}=\begin{vmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \cdots & \partial f_1/\partial x_n \\ \vdots & & \vdots \\ \partial f_n/\partial x_1 & \cdots & \partial f_n/\partial x_n\end{vmatrix}$.

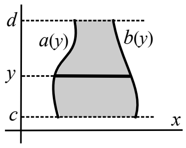
Polares: $\left.\begin{matrix} x=r\cos\theta \\ y=r\,\text{sen}\,\theta\end{matrix}\right\}\to\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r$. **Esféricas**: $\left.\begin{matrix} x=r\,\text{sen}\,\theta\cos\phi \\ y=r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi \\ z=r\cos\theta\end{matrix}\right\}\to\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}=r^2\,\text{sen}\,\theta$.

Integrales dobles:

Si f continua en $D=\{(x,y):a\le x\le b, c(x)\le y\le d(x)\}$,
$c(x)\le d(x)$ continuas en $[a,b]$ $\Rightarrow\iint_D f=\int_a^b\int_{c(x)}^{d(x)}f(x,y)\,dy\,dx$.

Si f continua en $D=\{(x,y):c\le y\le b, a(y)\le x\le b(y)\}$,
$a(y)\le b(y)$ continuas en $[c,d]$ $\Rightarrow\iint_D f=\int_c^d\int_{a(y)}^{b(y)}f(x,y)\,dx\,dy$.





Cambios de variable en integrales dobles:

Sea $\mathbf{g}:(u,v)\to\big(x(u,v),y(u,v)\big)$ de C^1, inyectiva en D^*, $\mathbf{g}(D^*)=D$ y f integrable.
Entonces: $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_{D^*}f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|du\,dv$.

En particular: $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_{D^*}r\,f\big(r\cos\theta,r\,\text{sen}\,\theta\big)\,dr\,d\theta$.

Integrales de línea de campos escalares:

Sea C la curva C^1 descrita por una función vectorial $\mathbf{c}(t):[a,b]\to\mathbf{R}^2$ y sea f un campo escalar tal que $f\big(\mathbf{c}(t)\big)$ es continua. Entonces: $\int_C f\,ds\equiv\int_a^b f\big(\mathbf{c}(t)\big)\,\|\mathbf{c}'(t)\|\,dt$.

[No depende de la $\mathbf{c}(t)$ elegida. Si C es C^1 a trozos, se divide $[a,b]$ y se suman las integrales].

Teorema de la divergencia [en el plano; $\text{div}\,\mathbf{f}=f_x+g_y$ si $\mathbf{f}=(f,g)$]:

Sea $D\subset\mathbf{R}^2$ limitado por ∂D curva cerrada simple, $\mathbf{f}:D\to\mathbf{R}^2$ campo vectorial C^1 y $\mathbf{n}$ vector normal unitario exterior a ∂D. Entonces $\iint_D\text{div}\,\mathbf{f}\,dxdy=\oint_{\partial D}\mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,ds$.

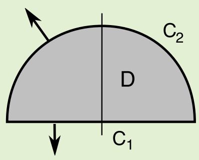
[Si ∂D viene descrita por $\mathbf{c}(t)=\big(x(t),y(t)\big)$ un normal unitario es $\mathbf{n}=\big(y'(t),-x'(t)\big)/\|\mathbf{c}'(t)\|$].

Ej. Comprobemos el teorema para $\mathbf{f}(x,y)=\big(7,y^2-1\big)$ en el semicírculo $r\le3$, $0\le\theta\le\pi$:

En cartesianas: $\iint_D 2y\,dxdy=\int_{-3}^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}}2y\,dy\,dx=36$.

O cambiando el orden: $=\int_0^3\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}}2y\,dx\,dy=36$.

En polares: $=\int_0^\pi\int_0^3 2r^2\,\text{sen}\,\theta\,dr\,d\theta=36$.



$\oint_{\partial D}=\int_{C_1}+\int_{C_2}$. Para C_1, si $\mathbf{c}(x)=(x,0)$, $x\in[-3,3]\to\int_{C_1}(1-y^2)\,ds=\int_{-3}^3dx=6$.

Para C_2, si $\mathbf{c}(t)=(3\cos t,3\,\text{sen}\,t)$, $t\in[0,\pi]\to\|\mathbf{c}'(t)\|=3$. Como $\mathbf{n}=(\cos t,\text{sen}\,t)$,

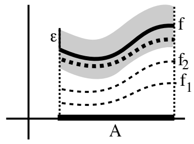
$\int_{C_2}\mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,ds=3\int_0^\pi\big(7\cos t+9\,\text{sen}^3t-\text{sen}\,t\big)dt=30$.

Repaso de convergencia uniforme

Sea la **sucesión de funciones** definidas en $A\subset\mathbf{R}$: $\{f_n(x)\}=f_1(x),f_2(x),\ldots,f_n(x),\ldots$.

> $\{f_n\}$ **converge puntualmente** f en A si para cada $x\in A$ es $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$.
>
> $\{f_n\}$ **converge uniformemente** hacia su límite puntal f en A si
> $\forall\varepsilon>0$ existe N tal que si $n\geq N$ entonces $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon\ \ \forall x\in A$.

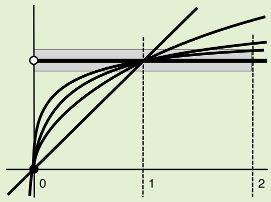
Gráficamente, si $\{f_n\}\to f$ uniformemente, a partir de un N todas las gráficas de las f_n quedan dentro de toda banda de altura 2ε alrededor de la de f. Si la convergencia es sólo puntual, para cada x el N es distinto y no se puede dar uno válido para todos los puntos de A.



Ej. $f_n(x)=x^{1/n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\begin{cases}0 \text{ si } x=0\\ 1 \text{ si } x\in(0,\infty)\end{cases}$ (puntualmente).

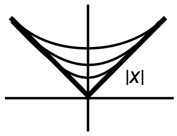
La convergencia es uniforme en $[1,2]$, pero no en $[0,1]$.

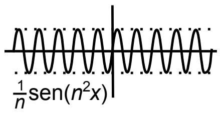
Para cada $x\in[0,1]$ existe N tal que si $n\geq N$ el punto $(x,x^{1/n})$ está dentro de la banda, pero hay que elegir N mayores según nos vamos acercando a 0. En $[1,2]$ sí es uniforme, ya que el N que vale para $x=2$ claramente vale también para el resto de los x del intervalo.



> f_n continuas en un intervalo I y $\{f_n\}\to f$ uniformemente en $I\Rightarrow f$ continua en I.
>
> f_n integrables en $[a,b]$ y $\{f_n\}\to f$ uniformemente en $[a,b]\Rightarrow\int_a^b f=\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n$.

Si las f_n son derivables, que $f_n\to f$ uniformemente no basta para que f sea derivable, o puede existir f' y no ser el límite de las f_n' (como se ve en los ejemplos de la derecha). Para que pasen ambas cosas, deben también las f_n' converger uniformemente.





Las **series de funciones** son un caso particular

> $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ **converge puntualmente** o **uniformemente** en A hacia f si lo hace la sucesión de sus **sumas parciales** $S_n=f_1+\cdots+f_n$.

Criterio de Weierstrass

> Sean $\{f_n\}$ definidas en A y $\{M_n\}$ una sucesión de números tal que $\big|f_n(x)\big|\leq M_n$ $\forall x\in A$ y tal que $\sum M_n$ converge. Entonces $\sum f_n$ converge uniformemente en A.

Ej. $\sum\frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}$ converge uniformemente en todo $\mathbf{R}$ pues $\Big|\frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}\Big|\leq\frac{1}{n^2}$ y $\sum\frac{1}{n^2}$ converge.

[Se tiene entonces, por ejemplo, que la suma $f(x)$ de esta serie es continua en todo $\mathbf{R}$].

La serie obtenida derivando término a término: $\sum\frac{\cos nx}{n}$ diverge, por ejemplo, si $x=0$.

[Para otros x, como $x=\pi$, converge por Leibniz, y para casi todos es difícil decirlo].

En general, no se pueden derivar (ni integrar) término a término las sumas infinitas como las finitas. Aunque esto sí se puede hacer siempre con las **series de potencias** en cualquier intervalo cerrado contenido en el intervalo de convergencia $|x|<R$, pues en ellos convergen uniformemente la serie y sus derivadas.

Ej. $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$ con $R=1$, converge puntualmente para $|x|<1$ $\big[$hacia $\log(1+x)$, y lo sigue haciendo cuando $x=1\big]$ y converge uniformemente en cualquier intervalo $[a,1]$, $a>-1$, aunque no lo hace en todo $(-1,1]$, pues las sumas parciales están acotadas en ese intervalo y el $\log(1+x)$ no.

La serie obtenida derivándola término a término $1-x+x^2+\cdots$ converge en $(-1,1)$ $\big[$hacia $\frac{1}{1+x}$, y ésta no converge si $x=1\big]$.

En cualquier $[a,b]\subset(-1,1)$ la convergencia es uniforme.