1. Introducción a las EDPs

Es típico de EDOs un problema de valores iniciales, casi siempre de solución única. Y se suele hallar primero su solución general y luego imponer el o los datos. En este capítulo resolveremos EDPs mediante integraciones. Todo se complica. Por ejemplo, casi nunca se tiene la solución general de la EDP.

Este pdf incluye las secciones 1.1 y 1.2. En 1.1 se ven las EDPs **lineales de primer orden en dos variables**, es decir, ecuaciones del tipo:

$$[1] \qquad A(x,y)\,u_y + B(x,y)\,u_x = H(x,y)\,u + F(x,y) \ ,$$

de poca utilidad, pero que ilustran sobre las de orden 2. Son resolubles si se pueden dar las soluciones de una EDO de primer orden: las **características** de [1]. La solución general de [1] contiene una p arbitraria (la de $u_x=0$, es $u(x,y)=p(y)$, para cualquier p). Para precisar esta p fijaremos el valor de la solución a lo largo de una curva G del plano xy (**problema de Cauchy**). La solución quedará determinada si G no es tangente a las características.

En 1.2 se verán las EDPs **lineales de segundo orden en dos variables**:

$$[2] \qquad L[u] \equiv Au_{yy} + Bu_{xy} + Cu_{xx} + Du_y + Eu_x + Hu = F(x,y) \ .$$

Nos limitamos al caso de $A,\ldots,H$ constantes. Para intentar resolver [2], se escribe mediante **cambios de variables** en la forma más sencilla posible (**forma canónica**) en las nuevas variables ξ, η. Esto lleva a clasificarlas en **hiperbólicas, parabólicas y elípticas**. En pocos casos, desde la forma canónica, se llega a la solución general, que contendrá dos funciones p y q arbitrarias, que se pueden fijar con datos de Cauchy análogos a los de [1].

La de **ondas** $u_{tt}-c^2u_{xx}=0$ es la única de las tres EDPs cásicas resoluble siguiendo 1.2. Su solución general es $u(x,t)=p(x+ct)+q(x-ct)$ y la que cumple los datos iniciales la proporciona la **fórmula de D'Alembert**:

$$\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=0\,,\ x,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=f(x), u_t(x,0)=g(x) \end{cases} \to\ u=\tfrac{1}{2}\big[f(x+ct)+f(x-ct)\big]+\tfrac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)\,ds$$

Los datos iniciales puros sólo se imponen a las ondas. En otras EDPs surgen condiciones (iniciales o de contorno) distintas. En cada caso se debe probar que, por ejemplo, hay **solución única** (fácil de ver en las EDOs). En 1.3 se describen los diferentes problemas asociados a las EDPs clásicas. Todos ellos tendrán unicidad, excepto el 'problema de Neumann' para Laplace.

En 1.4 se saca jugo a D'Alembert. **Extendiendo bien los datos iniciales** a todo **R**, resolveremos problemas con **condiciones de contorno**. Por usar funciones con varias expresiones, dar la solución $\forall xt$ será complicado. Nos limitaremos a veces con hallarla para valores de t o x fijos o con su dibujo.

En 1.5 utilizaremos la **transformada de Fourier** $\mathcal{F}$ de una función f:

$$\mathcal{F}[f](k)=\hat{f}(k)\equiv\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,e^{ikx}\,dx$$

para resolver algunos problemas de EDPs en **intervalos no acotados**, pues hace desaparecer derivadas $\big(\mathcal{F}[f']=-ik\mathcal{F}[f]\,,\ \mathcal{F}[f'']=-k^2\mathcal{F}[f]\big)$ y los lleva a otros para EDOs. En particular, $\mathcal{F}$ da la solución del problema para el **calor en varillas no acotadas** (no resoluble por otro camino). Se verán también problemas con la '**delta de Dirac**' $\delta(x-a)$, introducida informalmente.

1.1. EDPs lineales de primer orden

Sea [E] $\boxed{A(x,y)\,u_y + B(x,y)\,u_x = H(x,y)\,u + F(x,y)}$, $u = u(x,y)$.

Para resolverla se usa la EDO de primer orden [e] $\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{A(x,y)}{B(x,y)}}$ **ecuación característica**

Suponemos $A, B \in C^1$ y que no se anulan a la vez en una región del plano. Entonces [e] tendrá en ella unas curvas integrales:

$\boxed{\xi(x,y) = K}$ **curvas características** de [E] (calculables si [e] es lineal, separable, exacta. . .).

Con el cambio $\begin{cases} \xi = \xi(x,y) \\ \eta = y \end{cases}$ (o bien $\eta = x$) , [E] se convierte (ver apuntes) en:

$$[\mathrm{E}^*] \quad \boxed{A(\xi,\eta)\,u_\eta = H(\xi,\eta)\,u + F(\xi,\eta)} \ , \ u = u(\xi,\eta) \ .$$

Escogiendo $\eta = x$, en vez de $\eta = y$, se llega a [E$_*$] $\boxed{Bu_\eta = Hu + F}$.

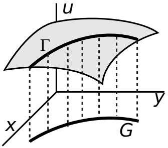
(Desaparece siempre u_ξ y, como vemos, **queda el término con la variable elegida**).

[E*] (o [E$_*$]) es una **EDO lineal de primer orden** en la variable η viendo la ξ constante. Su solución contiene una constante arbitraria para cada ξ , es decir, una función arbitraria de ξ :

$$[\bullet] \ u(\xi,\eta) = p(\xi)\,\mathrm{e}^{\int \frac{H}{A} d\eta} + \mathrm{e}^{\int \frac{H}{A} d\eta} \int \frac{F}{A}\,\mathrm{e}^{-\int \frac{H}{A} d\eta}\, d\eta \ , \quad \text{con } p \text{ arbitraria de } C^1.$$

Deshaciendo el cambio queda la solución [E] en función de x e y . En ella **aparece siempre una función arbitraria** p **de las características**.

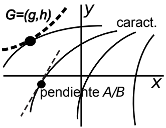
¿Cómo fijar una **única solución** de [E]? Cada solución es una superficie. Inspirándonos en los problemas para EDOs definimos:



El **problema de Cauchy** para [E] consiste en hallar la solución $u(x,y)$ que tome unos valores dados sobre una curva G del plano xy, o lo que es lo mismo, que contenga una curva dada Γ del espacio.

En particular, si G es una recta x ó $y=cte$ $\big[$por ejemplo, si $u(x,0)=f(x)\,\big]$, se tiene lo que se llama un **problema de valores iniciales**.

Un problema de Cauchy **puede no tener solución única**. Por ejemplo, un **dato sobre característica da siempre** 0 **o** ∞ **soluciones** [llevado a la solución general [•] se obtiene $p(\text{cte})$=algo, que puede ser constante o no]. Más en general (ver apuntes) se prueba que:



Si G no es tangente en ningún punto a ninguna característica hay solución única del problema de Cauchy en un entorno de G.

Y **la tangencia se puede ver sin resolver la EDO** [e]. Si $G(s)=\big(g(s),h(s)\big)$, al ser (g',h') tangente a G y (B,A) a las características:

Si $T(s)\equiv g'(s)A\big(g(s),h(s)\big)-h'(x)B\big(g(s),h(s)\big)\big|\neq 0\ \forall s$ hay solución única.
G tangente a alguna característica en $\big(g(s_o),h(s_o)\big)$ si y sólo si $T(s_0)=0$.

[Si $T(s)\equiv 0\ \forall s$, G es tangente en cada punto y es una característica].

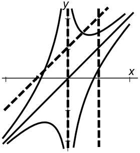
Primer ejemplo

Ej 1. $\boxed{(2x-y)u_y+xu_x=-yu}$ $\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}+2\,,\ y=\frac{C}{x}+\frac{1}{x}\int 2x\,dx=\frac{C}{x}+x\,.$

(o exacta o $z=\frac{y}{x}$). Características son hipérbolas $x(y-x)=C$.

$\begin{cases}\xi=xy-x^2\\ \eta=x\end{cases}$, $u_\eta=-\left(1+\frac{\xi}{\eta^2}\right)u \;\to\; u=p(\xi)\,e^{\frac{\xi}{\eta}-\eta}=p\left(xy-x^2\right)e^{y-2x}\,.$

(peor $\eta=y$) lineal homogénea (solución general)



Imponemos varios datos de Cauchy:

i) $\boxed{u(1,y)=e^y}$ $\to p(y-1)\,e^{y-2}=e^y,\ p(y-1)=e^2,\ p(v)=e^2\ \forall v\,,\ u=e^{y-2x+2}\,.$

ii) $\boxed{u(x,x-1)=1}$ $\to p(-x)=e^{x+1}\,,\ p(v)=e^{1-v},\ u=e^{x^2-xy+y-2x+1}$, única.

Datos sobre rectas no tangente a las caracteríticas han precisado la única solución del problema.

iii) $\boxed{u(0,y)=e^y}$, iv) $\boxed{u(0,y)=1}$ darán problemas al ser sobre característica.

Para iii): $p(0)\,e^y=e^y \to p(0)=1$. $\forall p\in C^1$ que lo cumpla hay una solución.

Infinitas. Por ejemplo, $p(v)\equiv 1 \to u=e^{y-2x}$, $\ p(v)=e^v \to u=e^{xy-x^2+y-2x}$, ...

Para iv): $p(0)\,e^y=1\,,\ p(0)=e^{-y}$ es imposible. No hay solución con ese dato.

Usando la T: i) $T(y)=0\cdot(2-y)-1\cdot 1\equiv -1\neq 0\ \forall y \Rightarrow$ unicidad.

Para ii), $y=x-1$ tampoco es tangente: $T(x)=1\cdot(x+1)-1\cdot x=1\neq 0\,.$

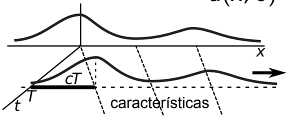
Para los otros, $T(y)=(-y)\cdot 0-0\cdot 1\equiv 0$ confirma que G es característica.

Dos ejemplos sin problemas de unicidad

[En ambos [E*] o [E_*] llevan a una simple integración (ocurre si H es 0). Las otras posibilidades es que sean EDOs homogéneas o no homogéneas en η, como pasará en los ejemplos de la página siguiente].

Ej 2. $\boxed{\begin{array}{l} u_t + cu_x = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{array}}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{c}$, $x - ct = K \to u_\eta = 0$, $u = p(x-ct)$ solución general.

$u(x,0) = p(x) = f(x) \to u(x,t) = f(x-ct)$, solución única.



Para dibujar la gráfica de u en función de x para cada $t=T$ fijo basta trasladar la de $f(x)$ una distancia cT (hacia la derecha si $c>0$). Se puede interpretar la solución como una onda que viaja a lo largo del tiempo.

[Situación similar se dará en la ecuación de ondas].

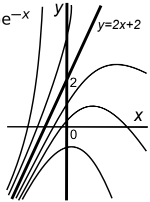
Ej 3. $\boxed{\begin{array}{l} (y-2x)\,u_y + u_x = y \\ u(0,y) = y-2 \end{array}}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{y-2x}{1}$, $y = Ce^x + 2x + 2$, $\begin{cases} \xi = (y-2x-2)e^{-x} \\ \eta = x \text{ (mejor)} \end{cases}$

$\to u_\eta = y = \xi e^\eta + 2\eta + 2 \to u = p(\xi) + \xi e^\eta + \eta^2 + 2\eta$,

$$u = p\big([y-2x-2]e^{-x}\big) + y + x^2 - 2 .$$

[Escogiendo $\eta = y$ no se podría despejar la x de $\xi = (\eta - 2x - 2)e^{-x}$].

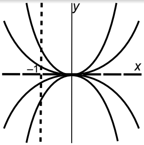
$p(y-2) + y - 2 = y - 2 \to p(v) = 0\ \forall v$, $u = y + x^2 - 2$.



Solución única porque $x=0$ nunca es tangente a las características, o, lo que es lo mismo, porque $T(y) = 0 \cdot y - 1 \cdot 1 = -1 \neq 0\ \forall y$.

Ejemplos con datos ‘buenos’ y ‘malos’

Ej 4. $\boxed{3yu_y+xu_x=3u-3}$ $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{3y}{x}\xrightarrow{\text{lineal}} y=Cx^3\,,\ \frac{y}{x^3}=C\,.$



Haciendo $\begin{cases}\xi=yx^{-3}\\ \eta=y\end{cases}\to\begin{cases}u_y=x^{-3}u_\xi+u_\eta\\ u_x=-3yx^{-4}u_\xi\end{cases}\to\ 3yu_\eta=3u-3\,,$

$u_\eta=\frac{u-1}{\eta}$ lineal (y separable), $u=p(\xi)\eta\underset{\text{a ojo}}{+1}=p\big(\frac{y}{x^3}\big)y+1\,.$

El dato ‘bueno’: $\boxed{u(-1,y)=y}\ \to -p(-y)\,y+1=y\,,\ p(v)=1+\frac{1}{v}\,,\ u=y+x^3+1\,.$

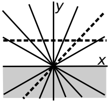
Con $\begin{cases}\xi=yx^{-3}\\ \eta=x\end{cases}\to u_\eta=\frac{3u-3}{\eta}\,,\ u=q(\xi)\eta^3+1=q\big(\frac{y}{x^3}\big)x^3+1\,,\ q(v)\overset{\uparrow}{=}1+v$

Solución única porque la recta $x=-1$ no es tangente a las características como se ve. O porque en el proceso de cálculo ha quedado $p(v)$ fijada de forma única $\forall v$. O porque $T=0\cdot 3y-1\cdot(-1)=1\neq 0$.

Ahora el ‘malo’: $\boxed{u(x,x^3)=x}\ \to\ p(1)x^3+1=x\ \big[\text{o } q(1)x^3+1=x\big].$

Imposible. Ninguna solución de la EDP cumple ese dato de Cauchy.

Ej 5. $\boxed{yu_y+xu_x=2u}$ $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\,,\ y=Cx\,.\ \begin{cases}\xi=y/x\\ \eta=y\end{cases}\to\ \eta u_\eta=2u\,,\ u=p(\xi)\eta^2\,.$



Imponemos dos datos a la solución general $u(x,y)=p\big(\frac{y}{x}\big)y^2$:

$\boxed{u(x,1)=x^3}\ \to p\big(\frac{1}{x}\big)=x^3,\ p(v)=\frac{1}{v^3}\,,\ u=\frac{x^3y^2}{y^3}=\frac{x^3}{y}\,.$ Solución única.

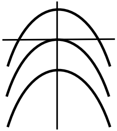
[Pero definida sólo si $y>0$, la solución de un problema de Cauchy, en principio, sólo es local].

$\boxed{u(x,x)=0}$. Dato sobre característica que dará infinitas o ninguna solución.

[Nos confirma que es característica el hecho de que $T(x)=1\cdot x-1\cdot x\equiv 0$].

Imponiendo el dato: $p(1)x^2=0\to p(1)=0$. Infinitas soluciones. Una para cada $p\in C^1$ que se anule en 1. [Por ejemplo son soluciones: $u\equiv 0\,,\ u=x^2-y^2$ ...].

Ej 6. $\boxed{2xu_y - u_x = 4xy}$ $\frac{dy}{dx} = -2x \rightarrow y + x^2 = K$ características.



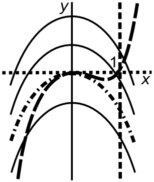
$\begin{cases} \xi = y+x^2 \\ \eta = y \end{cases} \rightarrow 2xu_\eta = 4xy\,,\; u_\eta = 2\eta \rightarrow u = p(\xi) + \eta^2 = p(y+x^2) + y^2$

$\begin{cases} \xi = y+x^2 \\ \eta = x \end{cases} \rightarrow -u_\eta = 4xy = 4\xi\eta - 4\eta^3 \rightarrow u = q(y+x^2) - 2yx^2 - x^4$

Analizamos la unicidad con diferentes datos de Cauchy:

$\boxed{u(1,y)=0} \rightarrow \begin{array}{l} p(y+1)+y^2=0,\; p(v)=-(v-1)^2 \\ q(y+1)-2y-1=0,\; q(v)=2v-1 \end{array} \rightarrow u = 2y - 2yx^2 - x^4 + 2x^2 - 1\,.$

[p ó q fijadas $\forall v$. $x=1$ no es tangente a las características].

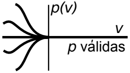


$\boxed{u(x,-x^2)=0} \rightarrow p(0) + x^4 = 0$. Imposible, no hay solución.

$\boxed{u(x,-x^2)=x^4} \rightarrow p(0)=0$. Cada $p \in C^1$ con $p(0)=0$ da una solución diferente y hay infinitas.

$\boxed{u(x,0)=0} \rightarrow p(x^2)=0$. Sólo queda fijada $p(v)=0$ si $v \geq 0$, pero no hay condición alguna sobre p si $v<0$.

Podemos elegir cualquier $p \in C^1$ que valga 0 para $v \geq 0$, con lo que existen infinitas soluciones en un entorno de $(0,0)$:
$u(x,y) = y^2$ si $y \geq -x^2$, pero está indeterminada si $y < -x^2$.



$\big[$En (0,0) es $y=0$ tangente a característica. Lo confirma $T = 1\cdot 2x - 0\cdot(-1)\,\big]$.

$\boxed{u(x, x^3-x^2) = x^4 - 2x^5} \rightarrow p(x^3) = -x^6,\; p(v) = -v^2\; \forall v,\; u = -2x^2y - x^4\; \forall (x,y)\,.$

Hay solución única pese a ser la G tangente a característica en $(0,0)$ $\big[$es $T = 2x + (3x^2 - 2x) = -3x^2\,\big]$.
A veces hay tangencia y existe solución única. La no tangencia es suficiente pero no necesaria.

Consideremos [E] $L[u] \equiv \boxed{A\,u_{yy} + B\,u_{xy} + C\,u_{xx} + D\,u_y + E\,u_x + H\,u = F(x,y)}$.

Nos limitamos al caso de que A, B, ..., H sean constantes (A, B, C no nulas a la vez). Como en las de primer orden, quizás un **cambio de variable** bien elegido mate términos de [E] y surja una ecuación que sepamos resolver. Analicemos la expresión en las nuevas variables que queda tras el cambio siguiente (con p,q,r,s constantes y jacobiano $J{=}ps{-}qr{\neq}0$):

$$\begin{cases} \xi = px+qy \\ \eta = rx+sy \end{cases} \longrightarrow \quad \begin{array}{l} u_y = qu_\xi + su_\eta \\ u_x = pu_\xi + ru_\eta \end{array} \quad , \quad \begin{array}{l} u_{yy} = q^2u_{\xi\xi} + 2qsu_{\xi\eta} + s^2u_{\eta\eta} \\ u_{xy} = pqu_{\xi\xi} + (ps+qr)u_{\xi\eta} + rsu_{\eta\eta} \\ u_{xx} = p^2u_{\xi\xi} + 2pru_{\xi\eta} + r^2u_{\eta\eta} \end{array} \longrightarrow$$

$$\big[q^2A+pqB+p^2C\big]u_{\xi\xi} + \big[2qsA+(ps+qr)B+2prC\big]u_{\xi\eta} + \big[s^2A+rsB+r^2C\big]u_{\eta\eta} + \cdots$$
$$= A^*u_{\xi\xi} + B^*u_{\xi\eta} + C^*u_{\eta\eta} + \cdots = F(\xi,\eta)$$ [los puntos son los términos en u_ξ , u_η , u].

Intentemos hacer $A^*{=}C^*{=}0$. Para ello debe ser: $\begin{array}{c} q^2A+pqB+p^2C=0 \\ s^2A+rsB+r^2C=0 \end{array}$.

Si $B^2{-}4AC{>}0$ y $A{\neq}0$ podemos elegir $p{=}r{=}1$ y $q,s{=}\frac{1}{2A}\big[-B\mp\sqrt{B^2-4AC}\,\big]$.

Si $B^2{-}4AC{=}0$, q , s coinciden y $J{=}0$. Y si es <0 , q y s serían complejas.

Además, es fácil ver que $(B^*)^2 - 4A^*C^* = [B^2-4AC]\,J^2$ (el signo de $B^2{-}4AC$ no varía con los cambios de coordenadas). Lo anterior lleva a definir:

$$\boxed{\text{Si } B^2-4AC \begin{array}{c} >0 \\ =0 \\ <0 \end{array} \text{ se dice, respectivamente, que la EDP [E] es } \begin{array}{l} \textbf{hiperbólica} \\ \textbf{parabólica} \\ \textbf{elíptica} \end{array}}$$

Forma canónica de cada tipo

Encontremos en cada caso la forma más sencilla en que podemos escribir [E] (**forma canónica**). Si es **hiperbólica**, hemos visto que se convierte con

$$\boxed{\begin{cases} \xi = x - \frac{B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}\,y \\ \eta = x - \frac{B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}\,y \end{cases}}$$

en $B^* u_{\xi\eta} + \cdots = F$. Como $(B^*)^2 > 0$, la **forma canónica** de las **hiperbólicas**: $\boxed{u_{\xi\eta} + \cdots = F^*}$.

A las dos familias $\xi = K$, $\eta = K$ se les llama **rectas características** de [E].

Si [E] es **parabólica**, sólo hay $\xi = x - \frac{B}{2A}y$ [**una** familia de características].

Con esa ξ se hace $A^* = 0$, y como $(B^*)^2 - 4A^*C^* = 0$ también $B^* = 0$. Para η podemos tomar cualquier r y s con $J \neq 0$. Se suele tomar $\eta = y$. Así con

$$\boxed{\begin{cases} \xi = x - \frac{B}{2A}\,y \\ \eta = y \end{cases}}$$

y dividiendo por C^* se obtiene la **forma canónica** de las **parabólicas**: $\boxed{u_{\eta\eta} + \cdots = F^*}$.

Si es **elíptica**, las ξ, η son rectas complejas: $\frac{2Ax-By}{2A} \pm \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{4AC-B^2}}{2A}\,y$ (no hay, pues, características reales). Y no es difícil comprobar que el cambio:

$$\boxed{\begin{cases} \xi = \frac{2Ax-By}{\sqrt{4AC-B^2}} \\ \eta = y \end{cases}}$$

lleva [E] a la **forma canónica** de las **elípticas**: $\boxed{u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \cdots = F^*}$.

[Para A, B, C no constantes, si es $B(x,y)^2 - 4A(x,y)C(x,y) > 0$, $= 0$ o < 0 en cada $(x,y) \in \Omega \subset \mathbf{R}^2$, se dice, respectivamente, que [E] es **hiperbólica**, **parabólica** o **elíptica** en Ω. Las características en este caso general son curvas integrales de EDOs de primer orden (quizás no resolubles)].

Ej 1. $\boxed{u_{yy}-4u_{xy}+5u_{xx}+u=0}$ $B^2-4AC=-4<0$, elíptica. Por tanto:

$$\begin{cases}\xi=x+2y\\ \eta=y\end{cases} \to \begin{array}{l} u_y=2u_\xi+u_\eta \\ u_x=u_\xi\end{array}, \begin{array}{l} u_{yy}=4u_{\xi\xi}+4u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta} \\ u_{xy}=2u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta} \\ u_{xx}=u_{\xi\xi}\end{array} \to \boxed{u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+u=0}.$$

Ej 2. $\boxed{4u_{yy}-4u_{xy}+u_{xx}=0}$ $\to B^2-4AC=0 \to$ parabólica.

El cambio aquí sería $\xi=x+\frac{y}{2}$, o mejor (son las mismas características):

$$\begin{cases}\xi=2x+y\\ \eta=y\end{cases} \to \begin{array}{l} u_y=u_\xi+u_\eta \\ u_x=2u_\xi\end{array}, \begin{array}{l} u_{yy}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta} \\ u_{xy}=2u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta} \\ u_{xx}=4u_{\xi\xi}\end{array} \to 4u_{\eta\eta}=0,\ \boxed{u_{\eta\eta}=0}.$$

Esta forma canónica se resuelve fácilmente: $u_\eta=p(\xi)$, $u=\eta\, p(\xi)+q(\xi)$.

Por tanto, la **solución general** de la ecuación es:

$\boxed{u(x,y)=y\,p(2x+y)+q(2x+y)}$, con p y q funciones C^2 arbitrarias.

En algunos casos, como en este, es posible hallar la **solución general** de [E] tras ponerla en forma canónica (en la mayoría, como en el ejemplo 1, será imposible). Describimos estos casos en la página siguiente.

Formas canónicas resolubles

Si sólo hay derivadas respecto a η: $\boxed{u_{\eta\eta}+E^*u_\eta+H^*u=F^*}$.

Es EDO lineal en η de orden 2, que se integra viendo la ξ como parámetro. Un par de constantes para cada ξ dan lugar a dos funciones arbitrarias de ξ en la solución. La ecuación, como vemos, debe ser parabólica.

Si sólo aparecen $u_{\xi\eta}$ **y una derivada primera**: $\boxed{\begin{array}{l} u_{\xi\eta}+D^*u_\xi=F^* \\ u_{\xi\eta}+E^*u_\eta=F^* \end{array}}$.

Haciendo en la primera $u_\xi=v$ se obtiene la de primer orden $v_\eta+D^*v=F^*$, resoluble viendo ξ como constante. La v contendrá una función arbitraria de ξ. Al integrarla para hallar la u aparece otra función arbitraria (de η). Todo es análogo si sólo aparece u_η. La ecuación es hiperbólica.

[En las EDOs de orden 2 aparecen dos constantes arbitrarias; aquí hay, en los dos casos, dos funciones arbitrarias (evaluadas en las características como ocurría en las EDPs de primer orden). Se ve que ninguna ecuación elíptica, ni la del calor u_t-u_{xx} son resolubles por este camino].

[Otras pocas EDPs más pueden llevarse a estas formas resolubles con cambios adicionales del tipo $u=e^{py}e^{qx}w$ que hacen desaparecer alguna derivada de menor orden o el término con u].

Ej 3. $\boxed{u_{yy}+5u_{xy}+4u_{xx}+3u_y+3u_x=9}$ $\to$ $B^2-4AC=9$, hiperbólica.

$$\frac{B\mp\sqrt{B^2-4AC}}{2A}=\frac{1}{4}\,,\ \left\{\begin{array}{l}\xi=x-y\\ \eta=x-4y\end{array}\right. \to \begin{array}{l} u_y=-u_\xi-4u_\eta \\ u_x=u_\xi+u_\eta \end{array},\ \begin{array}{l} u_{yy}=u_{\xi\xi}+8u_{\xi\eta}+16u_{\eta\eta} \\ u_{xy}=-u_{\xi\xi}-5u_{\xi\eta}-4u_{\eta\eta} \\ u_{xx}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta} \end{array}$$

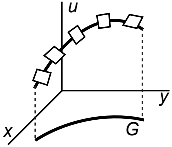
Entonces: $u_{\xi\eta}+u_\eta=-1$, del segundo tipo de antes. Para resolverla:

$$u_\eta=v \to v_\xi=-v-1\,,\ v=p^*(\eta)e^{-\xi}-1 \to u(\xi,\eta)=p(\eta)e^{-\xi}+q(\xi)-\eta\,.$$

Solución general: $\boxed{u(x,y)=p(x-4y)\,e^{y-x}+q(x-y)+4y-x}$, p, q arbitrarias.

¿Qué datos se piden a la EDP lineal [E] $L[u]=F$ de orden 2 para aislar una única solución? Para una EDO de orden 2 se fijaba el valor de la solución y de su derivada en el instante inicial. En una EDP de primer orden se daba el valor de u en toda una curva G (no característica). Cuando [E] era resoluble había dos funciones arbitrarias en la solución. Todo lleva a plantear el

Problema de Cauchy: encontrar la solución que tome unos valores dados de u y la derivada $u_{\mathbf{n}}$ en la dirección del vector normal sobre una curva G del plano xy.



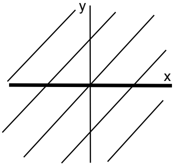
[Geométricamente: hallar la solución que contenga una curva dada y tenga en cada punto de ella unos planos tangentes también dados. La derivada normal $u_{\mathbf{n}}$ será casi siempre una derivada parcial: u_x o u_y].

En particular, si G es el eje x se tiene el **problema de valores iniciales**: dar la solución que cumple $u(x,0)=f(x)$, $u_y(x,0)=g(x)$. Y como en 1.1:

Teor. Si los datos son suaves y G no es tangente a las características en ningún punto, el problema de Cauchy tiene solución única en las proximidades de G.

El problema de Cauchy no es adecuado a toda EDP de segundo orden. Los problemas reales son mucho más variados: en unos casos hay condiciones iniciales y de contorno a la vez, en otros sólo de contorno... Además los datos de Cauchy se llevan mal con algunas EDPs. Para Laplace un problema de valores iniciales tiene solución única pero puede no tener 'dependencia continua' (variando poco los datos, varían mucho las soluciones).

Ej 4. $\boxed{\begin{array}{l} u_{yy}+2u_{xy}+u_{xx}-u_y-u_x=0 \\ u(x,0)=x\,,\; u_y(x,0)=0 \end{array}}$ $B^2-4AC\equiv 0$ parabólica



$x-\frac{B}{2A}y=x-y=K$ características. Como $y=0$ no es tangente a ellas, el problema endrá solución única.

La ecuación resulta ser resoluble y se puede comprobar:

$$\left\{\begin{array}{l} \xi=x-y \\ \eta=y \end{array}\right. \to u_{\eta\eta}-u_\eta=0 \to u=p(\xi)+q(\xi)\,e^{\eta}=p(x-y)+q(x-y)\,e^{y}\,.$$

Imponiendo los datos iniciales $\left[\,u_y=-p'+(q-q')\,e^{y}\,\right]$:

$$\left.\begin{array}{l} u(x,0)=p(x)+q(x)=x \\ u_y(x,0)=-p'(x)-q'(x)+q(x)=0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} p'(x)+q'(x)=1 \\ p'(x)+q'(x)=q(x) \end{array}\right\}$$

[p' y q' describen la misma derivada ordinaria en ambas ecuaciones]

$$\to q(x)=1\;\forall x \to p(x)=x-1\;\forall x \to \boxed{u(x,y)=x-y-1+e^{y}}\,,$$

solución determinada de forma única por los cálculos anteriores.