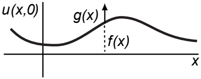
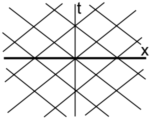
Tiene solución única dependiente continuamente de los datos el

problema puro de valores iniciales: $$(\mathrm{P}_1)\ \begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=F(x,t)\,,\ x,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=f(x)\,,\,u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$$



para la **cuerda infinita**. Hallemos su solución (es la única ecuación clásica resoluble por este camino) para $F\equiv 0$. Como $B^2-4AC=4c^2$, es hiperbólica. A partir de las expresiones halladas en la página 9:

$$\begin{cases} \xi=x+ct \\ \eta=x-ct \end{cases} \to \begin{cases} u_{xx}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta} \\ u_{tt}=c^2[u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}] \end{cases} \to -4c^2u_{\xi\eta}=0\,,$$



$$\boxed{u_{\xi\eta}=0}\ \text{forma canónica} \to u_\xi=p^*(\xi)\,,\ u=p(\xi)+q(\eta)\,.$$

La **solución general** es $\boxed{u(x,t)=p(x+ct)+q(x-ct)}$, $p\,q\in C^2$ arbitrarias.

Imponemos los datos para dar la solución del problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} p(x)+q(x)=f(x) \\ cp'(x)-cq'(x)=g(x) \end{cases} \to \begin{cases} p'(x)+q'(x)=f'(x) \\ p'(x)-q'(x)=\frac{1}{c}g(x) \end{cases} \to 2p'(x)=f'(x)+\tfrac{1}{c}g(x)$$

$$\to p(x)=\tfrac{1}{2}f(x)+\tfrac{1}{2c}\int_0^x g(s)\,ds+k \to q(x)=\tfrac{1}{2}f(x)-\tfrac{1}{2c}\int_0^x g(s)\,ds-k \to$$

fórmula de D'Alembert $$\boxed{u(x,t)=\tfrac{1}{2}\big[f(x+ct)+f(x-ct)\big]+\tfrac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)\,ds}$$

[Para que u sea C^2, debe $f\in C^2$ y $g\in C^1$].

Única solución por imponer datos sobre la recta $t=0$ no característica.

Problema para la cuerda acotada

Otro problema bien planteado es el de la **cuerda acotada** cuyos extremos se mueven verticalmente según $h_0(t)$ y $h_L(t)$ dadas (que estén fijos es un caso particular). Hay entonces dos **condiciones de contorno** adicionales:

$$\boxed{(\mathrm{P}_2)\left\{\begin{array}{l} u_{tt}-c^2u_{xx}=F(x,t)\,,\ x\in[0,L],\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=f(x)\,,\ u_t(x,0)=g(x) \\ u(0,t)=h_0(t)\,,\ u(L,t)=h_L(t) \end{array}\right.}$$

Demostremos su **unicidad** (veremos que la solución existe, como en otros casos, hallándola explícitamente [en 1.4 mediante extensiones o en 4.2 por separación de variables]. Sean u_1 y u_2 soluciones de (P_2) y sea $u=u_1-u_2$.

Entonces u cumple: $(\mathrm{P}_0)\left\{\begin{array}{l} u_{tt}-c^2u_{xx}=0\,,\ x\in[0,L]\,,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=u(0,t)=u(L,t)=0 \end{array}\right.$

Queremos ver que $u\equiv 0$. Integremos la identidad:

$$u_t[u_{tt}-c^2u_{xx}]=\tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial t}[u_t^2+c^2u_x^2]-c^2\tfrac{\partial}{\partial x}[u_tu_x]$$

para x entre 0 y L y t entre 0 y T , suponiendo u solución de (P_0):

$$\tfrac{1}{2}\int_0^L\big[u_t^2+c^2u_x^2\big]_{(x,0)}^{(x,T)}dx-c^2\int_0^T\big[u_tu_x\big]_{(0,t)}^{(L,t)}dt=\tfrac{1}{2}\int_0^L\big[u_t(x,T)^2+c^2u_x(x,T)^2\big]dx=0$$

pues $u_{tt}-c^2u_{xx}=u_t(x,0)=u_x(x,0)=u_t(0,t)=u_t(L,t)=0$.

El último corchete es ≥ 0 y es función continua de x . Para que la integral se anule debe ser $u_t(x,T)=u_x(x,T)=0$ si $0\leq x\leq L$ y para cualquier T. Por tanto $u(x,t)$ es constante y como $u(x,0)=0$ debe ser $u=u_1-u_2\equiv 0$. Hay unicidad.

Problemas bien planteados para el calor

Para la **varilla infinita**: $\boxed{(\mathrm{P}_3)\ \begin{cases} u_t - ku_{xx} = F(x,t)\,,\ x\in\mathbf{R},\ t>0 \\ u(x,0)=f(x)\,,\ u \text{ acotada} \end{cases}}$.

$t=0$ es característica y no es buen problema de valores iniciales. Basta un solo dato, la distribución inicial de temperaturas, para fijar las posteriores.
[No podemos dar arbitrariamente la $u_t(x,0)$ pues debe ser $u_t(x,0)=kf''(x)+F(x,0)$ si u es solución].

Para la **varilla acotada** hay condiciones de contorno de varios tipos, con diferentes significados físicos. Si los extremos $x=0$ y $x=L$ están a lo largo del tiempo a **temperaturas dadas** $h_0(t)$ y $h_L(t)$ se tiene:

$$\boxed{(\mathrm{P}_4)\ \begin{cases} u_t - ku_{xx} = F(x,t)\,,\ x\in(0,L),\ t>0 \\ u(x,0)=f(x)\,,\ u(0,t)=h_0(t)\,,\ u(L,t)=h_L(t) \end{cases}}$$

Si se fija el **flujo de calor** en los extremos obtenemos:

$$\boxed{(\mathrm{P}_5)\ \begin{cases} u_t - ku_{xx} = F(x,t)\,,\ x\in(0,L),\ t>0 \\ u(x,0)=f(x)\,,\ u_x(0,t)=h_0(t)\,,\ u_x(L,t)=h_L(t) \end{cases}}$$

[En particular, si $h_0(t)=h_L(t)=0$, los extremos están **aislados**].

Un tercer tipo de condiciones de contorno combina u y u_x:

$$\boxed{u(0,t)-au_x(0,t)=h_0(t) \text{ ó } u(L,t)+bu_x(L,t)=h_L(t)\,, \text{ con } a,b>0} \,.$$

Expresan la **radiación libre** hacia un medio a temperatura dada (si $x=L$ está más (menos) caliente que h_L entonces se irradia (chupa) calor puesto que $u_x=(h_L-u)/b<0$ (>0) y el flujo de calor es siempre en sentido opuesto al gradiente de las temperaturas; lo mismo sucede con el otro extremo).

(P_4) ó (P_5) (o cualquiera de los otros 7 problemas que aparecen combinando los 3 tipos de condiciones descritos) son todos problemas bien planteados.

Probemos su unicidad. Si u_1 y u_2 son soluciones, $u=u_1-u_2$ satisface el problema con $F=f=h_0=h_L=0$. Nuestro objetivo es deducir que $u\equiv 0$.

Multiplicando la ecuación por u e integrando en x entre 0 y L se tiene:

$$\int_0^L uu_t dx-k\int_0^L uu_{xx}dx=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L u^2dx-k\big[uu_x\big]_{(0,t)}^{(L,t)}+k\int_0^L u_x^2dx=0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\int_0^L \big[u(x,t)\big]^2dx\leq 0$$

[si $u=0$ ó $u_x=0$ en los extremos la última implicación es clara, pues $k>0$; es también fácil verlo si $u-au_x=0,\ a>0$ ó si $u+bu_x=0,\ b>0$; no se puede probar la unicidad para $a<0$ ó $b<0$ (físicamente inadmisible)].

La última integral es una función $U(t)$ no creciente ($U'\leq 0$), que cumple $U(0)=0$ (pues $u(x,0)=0$) y es $U(t)\geq 0$ (integrando positivo). De las tres afirmaciones se deduce que $U(t)\equiv 0\Rightarrow u\equiv 0$. Unicidad.

Una forma diferente de probar la unicidad de algunos problemas (que permite probar la dependencia continua) es utilizar un **principio del máximo** que se ajuste al problema. Por ejemplo, para (P_4) sería útil este:

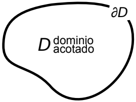
Si u es continua en $[0,T]\times[0,L]$ y satisface $u_t-ku_{xx}=0$ en $(0,T)\times(0,L)$, los valores máximo y mínimo de u se alcanzan o bien en $t=0$ o bien en $x=0$ ó bien en $x=L$.

[Si la temperatura inicial en la varilla y la de sus extremos no superan un valor M, no se puede dar en su interior una temperatura mayor que M. Para probar la unicidad para los otros problemas de la ecuación del calor, necesitaríamos otros principios del máximo diferentes].

Problemas para Laplace

Son problemas de contorno. Los dos más importantes:

Problema de Dirichlet: $(\mathrm{P}_D)\begin{cases}\Delta u = F \text{ en } D\\ u = f \text{ en } \partial D\end{cases}$ **Problema de Neumann:** $(\mathrm{P}_N)\begin{cases}\Delta u = F \text{ en } D\\ u_{\mathbf{n}} = f \text{ en } \partial D\end{cases}$



Siendo D abierto conexo acotado de $\mathbf{R}^2$, ∂D su frontera y $u_{\mathbf{n}}$ la derivada en la dirección del vector normal unitario exterior $\mathbf{n}$.

Si vemos la EDP describiendo una distribución estacionaria de temperaturas en una placa, en (P_D) se dan las temperaturas en el borde y en (P_N) fijamos el flujo de calor en dirección normal al borde.

Si F, f y ∂D son buenas, (P_D) es un problema bien planteado que en 4.3 se resolverá en recintos sencillos. Probemos ahora su unicidad mediante la **fórmula de Green** (que generaliza la integración por partes a $\mathbf{R}^2$):

$$\boxed{\text{Si } u \in C^2(D)\cap C^1(\overline{D}) \text{, entonces } \iint_D u\,\Delta u\, dxdy = \oint_{\partial D} u\, u_{\mathbf{n}}\, ds - \iint_D \|\nabla u\|^2\, dxdy\,.}$$

$\Big[$Identidad $u\Delta u = \operatorname{div}[u\nabla u] - \|\nabla u\|^2$ y teorema de la divergencia $\iint_D \operatorname{div}\mathbf{f}\, dxdy = \oint_{\partial D} \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\, ds\Big]$.

Si u_1, u_2 soluciones de (P_D), $u = u_1 - u_2$ cumple el problema con $F = f = 0$.

La fórmula de Green dice entonces que:

$$\iint_D \|\nabla u\|^2\, dxdy = 0 \Rightarrow \nabla u = \mathbf{0} \Rightarrow u = cte \Rightarrow u \equiv 0 \ (\text{pues } u = 0 \text{ en } \partial D).$$

Las complicaciones de Neumann

Para el (P$_N$) la situación se complica. En primer lugar, **para que** (P$_N$) **pueda tener solución es necesario que** F **y** f **satisfagan la relación**:

$$\boxed{\iint_D F\,dxdy = \oint_{\partial D} f\,ds}$$

[basta aplicar el teorema de la divergencia a ∇u para verlo].

Además, si (P$_N$) tiene solución, contendrá una constante arbitraria [lo que podíamos esperar, ya que ecuación y condición de contorno sólo contienen derivadas]. También se ve que si queremos repetir la prueba de la unicidad, se pueden dar todos los pasos excepto la última implicación. Se dice que el **problema de Neumann** (P$_N$) **tiene unicidad salvo constante**.

También se imponen a Laplace condiciones de contorno del tipo $u+au_{\mathbf{n}}=f$, $a>0$, y también tienen interés los problemas mixtos en que en parte de ∂D hay condiciones tipo Dirichlet, en otra de tipo Neumann... (todos ellos son problemas bien planteados).

En 4.3 aparecerán también problemas en recintos D no acotados. Para tener unicidad, además de los datos en ∂D, hay que exigir un 'adecuado comportamiento' en el infinito.

1.4. Ecuación de la cuerda vibrante

En 1.3 vimos que las características de $\boxed{(\mathrm{P}_1)\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=0\,,\ x,t\in\mathbf{R} \\ u(x{,}0)=f(x)\,,\,u_t(x{,}0)=g(x)\end{cases}}$,

eran $x\pm ct=K$, la solución general $\boxed{u(x,t)=p(x+ct)+q(x-ct)}$, $p,q\in C^2$ arbitrarias, y la solución única de (P$_1$), satisfaciendo ya los datos iniciales:

$$[1]\quad \boxed{u(x,t)=\tfrac{1}{2}\big[f(x+ct)+f(x-ct)\big]+\tfrac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)\,ds}$$

fórmula de D'Alembert

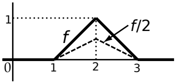
[Para ser $u\in C^2$ (solución **clásica o regular**), debe $f\in C^2$ y $g\in C^1$. Si u es continua pero no C^2 se llama '**solución débil**'. Habría que probar la unicidad pues más funciones valen como soluciones].

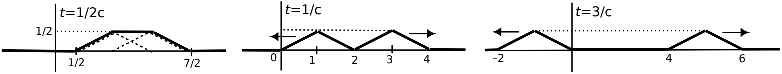
La solución de (P_1) es suma de dos ondas que viajan a velocidad c, una hacia las x crecientes y otra hacia las decrecientes. Viendo [1]:

Si llamamos $G(x)\equiv\frac{1}{2c}\int_0^x g(s)\,ds\,,\ q(x)=\frac12 f(x)\underset{\longrightarrow}{-G(x)}\,,\ p(x)=\frac12 f(x)\underset{\longleftarrow}{+G(x)}\,.$

Para dibujar la solución $u(x,t)$ en diferentes instantes t, identificadas estas ondas viajeras, basta trasladar sus gráficas y sumarlas (gráficamente). Esto es especialmente sencillo si sólo hay f.

Ej 1. Sea $f=0$ salvo un triángulo en torno a 2 y sea $g=0$. Dibujemos la solución para varios t. Basta trasladar las dos ondas que viajan $\big[$aquí ambas son $\frac12 f(x)\,\big]$:





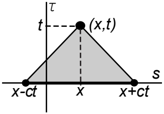
Ha costado muy poco dibujar y predecir la evolución de esta solución débil [bastante costaría dar la expresión analítica de la solución para todo x y todo t]. Los picos iniciales siguen indefinidamente.

El problema es: $\boxed{(\mathrm{P}_2)\ \begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=F(x,t)\,,\ x,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=f(x),\ u_t(x,0)=g(x)\end{cases}}$

Con resultados de derivación de integrales, se prueba que su solución es:

$$[2]\quad \boxed{u(x,t)=\tfrac{1}{2}\big[f(x+ct)+f(x-ct)\big]+\tfrac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)\,ds+\tfrac{1}{2c}\int_0^t\int_{x-c[t-\tau]}^{x+c[t-\tau]}F(s,\tau)\,ds\,d\tau}$$

Sólo depende $u(x,t)$ de los valores de f en $x-ct$ y $x+ct$, puntos de corte con el eje x de las características que pasan por (x,t), y de los de g en el intervalo $[x-ct,x+ct]$. A este intervalo se le llama **dominio de dependencia** del punto (x,t). Se comprueba también que el recinto descrito por la integral doble es el triángulo del plano $s\tau$ limitado por $\tau=0$ y esas características. Así pues, para hallar la solución u en un punto (x,t) se necesita exclusivamente: i) los valores de F en el triángulo, ii) los de g en toda su base, iii) los de f en $x-ct$ y $x+ct$.



Ej 3. $\boxed{\begin{array}{l} u_{tt}-u_{xx}=2 \\ u(x,0)=x\,,\ u_t(x,0)=3\end{array}}$ Utilizando directamente [2]:

$$u=\tfrac{1}{2}\big[x+t+x-t\big]+\tfrac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}3\,ds+\int_0^t\int_{x-[t-\tau]}^{x+[t-\tau]}ds\,d\tau=x+3t+2\int_0^t[t-\tau]\,d\tau=x+3t+t^2.$$

A veces es fácil hallar una solución v de la ecuación no homogénea y evitar el cálculo de la integral doble, pues $w=u-v$ lleva a un problema con $F=0$, resoluble con [1]. Si F depende sólo de x o de t se puede buscar una $v(x)$ o una $v(t)$. Aquí, por ejemplo, la mejor que se puede encontrar es:

$$v_{tt}=2\ \to\ v=t^2+3t\ \to\ \begin{cases} w_{tt}-w_{xx}=0 \\ w(x,0)=x,\ w_t(x,0)=0\end{cases}\ \to\ w=x\ \to\ u=x+3t+t^2\,.$$

Resolvamos el primer problemas con **condiciones de contorno**:

$$\boxed{(\mathrm{P}_3)\ \begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=0\,,\ x\geq 0,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=f(x)\,,\ u_t(x,0)=g(x)\,,\ u(0,t)=0 \end{cases}}$$

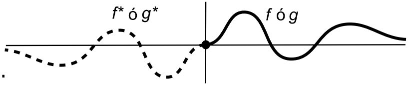
[para que no esté rota, debe ser $f(0)=0$].

La fórmula [1] exige funciones definidas $\forall x$ y ni f ni g están definidas si $x<0$. ¿Cómo extenderlas a todo **R**? Si llamamos f^* y g^* a sus extensiones y se debe cumplir la condición de contorno:

$$u(0,t)=\tfrac{1}{2}\big[f^*(ct)+f^*(-ct)\big]+\tfrac{1}{2c}\int_{-ct}^{ct} g^*(s)\,ds=0\,,$$

es claro que f^* y g^* han de ser **impares respecto a** 0, es decir,

$$f^*(-x)=-f^*(x)\ ;\ g^*(-x)=-g^*(x)\ .$$



Así pues, la solución de (P_3) es la del problema (para la cuerda infinita):

$$\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=0\,,\ x,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=f^*(x)\,,\ u_t(x,0)=g^*(x) \end{cases}$$

$$\boxed{u(x,t)=\tfrac{1}{2}\big[f^*(x+ct)+f^*(x-ct)\big]+\tfrac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g^*(s)\,ds} \quad [3]$$

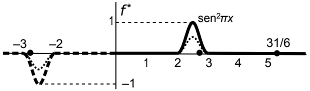
pues u cumple la EDP, las condiciones iniciales para $x\geq 0$, y la de contorno. Las dificultades prácticas del uso de esta solución es que f^* y g^* tendrán, en general, diversas expresiones en distintos intervalos.

Ej 4. $\boxed{\begin{array}{l} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\geq 0\,,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\begin{cases} \operatorname{sen}^2\pi x\,,\ x\in[2,3] \\ 0\,,\ x\in[0,2]\cup[3,\infty) \end{cases},\ u_t(x,0)=u(0,t)=0 \end{array}}$

a) Hallar $u\big(\frac{7}{6},4\big)$.
b) Dibujar $u(x,2)$, $u(x,4)$.

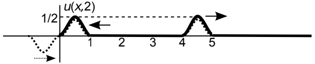
La solución es $u(x,t)=\frac{1}{2}\big[f^*(x+t)+f^*(x-t)\big]$, con f^* impar respecto al origen.

[f^* es función C^1. Sería $-\operatorname{sen}^2\pi x$ en $[-3,-2]$, pero no lo necesitamos para lo que se pide].

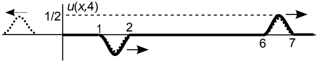


a) $u\big(\frac{7}{6},4\big)=\frac{1}{2}\Big[f^*\big(\frac{31}{6}\big)+f^*\big(-\frac{17}{6}\big)\Big]$

$$\underset{f^*\text{ impar}\uparrow}{=}\frac{1}{2}\Big[f\big(\tfrac{31}{6}\big)-f\big(\tfrac{17}{6}\big)\Big]=-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\frac{17\pi}{6}=-\frac{1}{8}\,.$$



b) Para dibujar basta trasladar rígidamente la gráfica de $\frac{1}{2}f^*$ a izquierda y derecha 2 unidades en un caso y 4 en otro y sumar.



portada de apuntes

Para $t=2$, la onda que se mueve hacia la izquierda está llegando a $x=0$; en $t=4$ se ha reflejado e invertido y ahora viaja hacia la derecha.

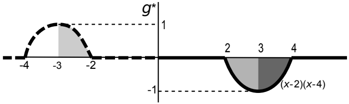
[Esta reflexión e inversión siempre se da en extremos con condición $u=0$, lo que permite predecir fácilmente la evolución de estas perturbaciones localizadas en la f. Si f fuese no nula, por ejemplo, en todo $[0,\infty)$ o si la no nula fuese la g, las cosas, gráficamente, se pueden complicar mucho].

Ejemplo de cuerda semi-infinita con g

Ej 5. $\boxed{\begin{array}{l} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\geq 0\,,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=0\,,\ u_t(x,0)=\begin{cases} (x-2)(x-4)\,,\ x\in[2,4] \\ 0\,,\ \text{resto de } [0,\infty) \end{cases} \\ u(0,t)=0 \end{array}}$

a) Hallar el valor de $u(3\,,6)$.

b) Hallar $u(3\,,t)$ para $t\geq 7$
y para $1\leq t\leq 5$.



Para aplicar D'Alembert extendemos g a una g^* impar definida en todo $\mathbf{R}$:

Entonces $u(x,t)=\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}g^*(s)\,ds$ será la solución del problema para todo x,t.

a) $u(3,6)=\frac{1}{2}\int_{-3}^{9}g^* \underset{\text{impar}}{=} \frac{1}{2}\int_3^4(s^2-6s+8)\,ds=\left[\frac{s^3}{6}-\frac{3s^2}{2}\right]_3^4+4=-\frac{13}{3}+4=-\frac{1}{3}$.

b) Para $t\geq 7$ es $3-t\geq -4$ y $3+t\geq 10$.

Por tanto, $u(3,t)=\frac{1}{2}\int_{3-t}^{3+t}g^*=0$, pues las áreas se cancelan.

Para $1\leq t\leq 5$ es $-2\leq 3-t\leq 2$ y $3+t\geq 4$, y así g^* sólo es no nula en $[2,4]$:

$$u(3,t)=\frac{1}{2}\int_2^4(s^2-6s+8)\,ds=-\frac{2}{3}\quad \text{[el doble de la de arriba].}$$

Por la imparidad no se ha necesitado, para hacer los cálculos anteriores, conocer la expresión de g^* para $x\leq 0$, pero sería fácil de escribir:

Para $x\in[-4,-2]$ es $g^*(x)=-(x+2)(x+4)$ y claramente es 0 en el resto.
(cambiando x por $-x$ y el signo)

Con esta expresión se obtendrían (trabajando más) los mismos valores.

$$\boxed{(\mathrm{P}_4)\ \begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=F(x,t)\,,\ x\geq 0,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=f(x)\,,\ u_t(x,0)=g(x)\,,\ u(0,t)=h_0(t)\end{cases}}$$

[debe ahora ser $f(0)=h_0(0)$].

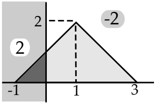
Primero **debemos hacer la condición de contorno homogénea** hallando una v que la cumpla y haciendo $w=u-v$, ya que entonces será $w(0,t)=0$.

La v más clara (no siempre la mejor) es: $v(t)=h_0(t)$.

Una vez que tenemos la condición de contorno homogénea, la solución del problema en w la da [2] si sustituimos sus f, g y F por f^*, g^* y F^*, siendo ésta última la **extensión impar de F mirándola como función de x**.

Ej 6. $\boxed{\begin{array}{l} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\geq 0\,,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0\,, u(0,t)=t^2\end{array}}$ Hallemos $u(1,2)$. [En los apuntes está $u(x,t)$].

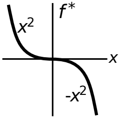
Con $w=u-t^2$ queda:



$$\begin{cases} w_{tt}-w_{xx}=-2 \\ w(x,0)=w_t(x,0)=w(0,t)=0\end{cases},\quad \begin{cases} w_{tt}-w_{xx}=\begin{cases} 2\,,\ x<0 \\ -2\,,\ x>0\end{cases} \\ w(x,0)=w_t(x,0)=0\end{cases}$$

$$\to w(1,2)=\tfrac{1}{2}\iint_\triangle F^*=\tfrac{1}{2}\Big[(2)\text{ área } +(-2)\text{ área } \Big]=-3\to\ u(1,2)=1\,.$$

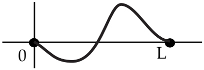
Podríamos lograr un problema sin F, encontrando una v mejor.
Tanteando se ve que $v=x^2+t^2$ cumple la condición y la EDP:



$$w=u-v\to\begin{cases} w_{tt}-w_{xx}=0 \\ w(x,0)=-x^2 \\ w_t(x,0)=w(0,t)=0\end{cases}\to\ \begin{cases} w_{tt}-w_{xx}=0\,,\ x,t\in\mathbf{R} \\ w(x,0)=f^*(x) \\ w_t(x,0)=0\end{cases}$$

$$\to w(1,2)=\tfrac{1}{2}[f^*(3)+f^*(-1)]=-4\to\ u(1,2)=5-4=1\,.$$

La cuerda acotada y fija en los extremos

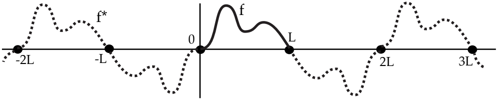


$$(\mathrm{P}_5)\ \begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=0\,,\ x\in[0,L]\,,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=f(x)\,,\ u_t(x,0)=g(x) \\ u(0,t)=u(L,t)=0 \end{cases}$$

[debe ser $f(0)=f(L)=0$].
[Reaparecerá en 4.2].

Para hallar su solución única con la fórmula de D'Alembert extendemos f y g a $[-L,L]$ de forma **impar respecto a** 0 y luego de forma $2L$-**periódica** a todo $\mathbf{R}$, es decir, llamando f^* y g^* a estas extensiones:

$$f^*(-x)=-f^*(x)\,,\ f^*(x+2L)=f^*(x)\,,\quad g^*(-x)=-g^*(x)\,,\ g^*(x+2L)=g^*(x)\,.$$



(entonces f^* y g^* también serán impares respecto a L).

La solución de (P_5) se obtiene aplicando [3] al siguiente problema (por la imparidad de los datos se cumplen también las condiciones de contorno):

$$\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=0\,,\ x,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=f^*(x)\,,\ u_t(x,0)=g^*(x) \end{cases}$$

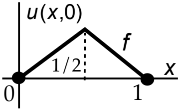
Para que la u dada por [3] sea C^2 (regular) deben $f\in C^2[0,L]$ y $g\in C^1[0,L]$ y además:
$f(0)=f(L)=f''(0)=f''(L)=g(0)=g(L)=0$ [f' y g' existen en 0 y L por la imparidad].

[Si las condiciones de contorno fuesen para u_x (describe el hecho de dejar al extremo de la cuerda subir y bajar libremente) se deberían extender f y g de forma **par**. Por ejemplo,

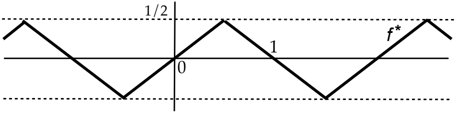
$$u_x(0,t)=\tfrac{1}{2}\big[f^{*\prime}(ct)+f^{*\prime}(-ct)\big]+\tfrac{1}{2c}\big[g^*(-ct)-g^*(ct)\big]=0 \Rightarrow g^* \text{ par y } f^{*\prime} \text{ impar } \Rightarrow f^* \text{ par}\big].$$

Cuerda pulsada en el centro

Ej 7. $\boxed{\begin{array}{l} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\in[0,1],\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\begin{cases} x\,, & 0\le x\le 1/2 \\ 1-x\,, & 1/2\le x\le 1 \end{cases} \\ u_t(x,0)=u(0,t)=u(L,t)=0 \end{array}}$ (Puede representar la pulsación de la cuerda de una guitarra).



Es difícil dar explícitamente $u(x,t)$ $\forall x,t$ por tener f^* muchas expresiones (exigiría discutir en qué intervalos están $x+t$ y $x-t$):



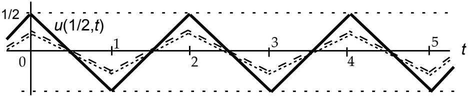
$$f^*(x)=\begin{cases} \cdots \\ -1-x, & -3/2\le x\le -1/2 \\ x\,, & -1/2\le x\le 1/2 \\ 1-x\,, & 1/2\le x\le 3/2 \\ x-2\,, & 3/2\le x\le 5/2 \\ \cdots \end{cases}$$

Algo más fácil es escribir la u para t o x fijos. Y es muy fácil hallarla para un (x,t) dado. No se necesita siquiera la expresión de f^*. Por ejemplo:

$$u\big(\tfrac{1}{4},3\big)=\tfrac{1}{2}\big[f^*\big(\tfrac{13}{4}\big)+f^*\big(-\tfrac{11}{4}\big)\big]\underset{\substack{\uparrow \\ f^*\text{ es 2-periódica}}}{=}\tfrac{1}{2}\big[f^*\big(-\tfrac{3}{4}\big)+f^*\big(-\tfrac{3}{4}\big)\big]\underset{\substack{\uparrow \\ f^*\text{ es impar}}}{=}-f\big(\tfrac{3}{4}\big)=-\tfrac{1}{4}\,.$$

Tampoco se precisa conocer f^* para hacer dibujos: basta trasladar y sumar.

Dibujemos: $u\big(\tfrac{1}{2},t\big)=\tfrac{1}{2}\Big[f^*\big(\tfrac{1}{2}+t\big)+f^*\big(\tfrac{1}{2}-t\big)\Big]=\tfrac{1}{2}\Big[f^*\big(\tfrac{1}{2}+t\big)-f^*\big(t-\tfrac{1}{2}\big)\Big]$.



La gráfica tiene periodo 2. Esto es general: por las propiedades de f^* y g^* la solución es $\frac{2L}{c}$**−periódica**.

$$\boxed{(\mathrm{P}_6)\ \begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=F(x,t)\,,\ x\in[0,L],\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=f(x)\,,\ u_t(x,0)=g(x) \\ u(0,t)=h_0(t)\,,\ u(L,t)=h_L(t)\end{cases}}$$

(**hay fuerzas externas y movemos los extremos**)

Primero se anulan los datos de contorno, dando una v y haciendo $w=u-v$.

Tanteando se llega a $\boxed{v(x,t)=\big[1-\frac{x}{L}\big]h_0(t)+\frac{x}{L}h_L(t)}$ [a veces conviene buscar otra].

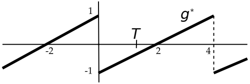
La solución del problema en w la da [2] con las extensiones impares f^*, g^* y F^* (vista F como función de x), en vez de f, g y F.

Ej 8. $\boxed{\begin{array}{l} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\in[0,2],\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=t\,,\ u(2,t)=0\end{array}}$

Hallemos la solución para $t\in[0,2]$.

Primero usamos $v=t(1-\frac{x}{2})\xrightarrow{u=w+v}$

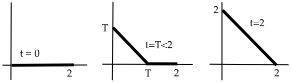
$$\begin{cases} w_{tt}-w_{xx}=0\,,\ x\in[0,2] \\ w_t(x,0)=\frac{x}{2}-1 \\ w(x,0)=w(0,t)=w(2,t)=0\end{cases},\quad \begin{cases} w_{tt}-w_{xx}=0\,,\ x\in\mathbf{R} \\ w(x,0)=0 \\ w_t(x,0)=g^*(x)\end{cases},\quad w=\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}g^*.$$



Sea $T\in[0,2]$ fijo. Como $[x-T,x+T]$ no contiene valores negativos si $x\geq T$:

$$w(x,T)=\begin{cases} \frac{1}{2}\int_{x-T}^{0}\big(\frac{s}{2}+1\big)ds+\frac{1}{2}\int_{0}^{x+T}\big(\frac{s}{2}-1\big)ds=x\big(\frac{T}{2}-1\big),\ x\in[0,T] \\ \frac{1}{2}\int_{x-T}^{x+T}\big(\frac{s}{2}-1\big)ds=T\big(\frac{x}{2}-1\big),\ x\in[T,2]\end{cases}$$

$$\rightarrow\ u(x,T)=\begin{cases} T-x\,,\ x\in[0,T] \\ 0\,,\ x\in[T,2]\end{cases}$$



La perturbación viaja a velocidad 1. La cuerda debe estar quieta si $x\geq T$.

Ondas en el espacio con simetría radial

Acabemos la sección viendo que las **ondas** $u_{tt}-c^2\Delta u=0$ **en el espacio con simetría radial** se reducen a cuerdas semi-infinitas. Pasando el Δu a esféricas y quitando las derivadas respecto a θ y ϕ se llega a:

$$\boxed{(\mathrm{P}_r)\ \begin{cases} u_{tt}-c^2\big[u_{rr}+\frac{2}{r}u_r\big]=0\,,\ r\geq 0,\ t\in\mathbf{R} \\ u(r,0)=f(r)\,,\ u_t(r,0)=g(r) \end{cases}}$$

Con el cambio $\boxed{v=ur}$, la ecuación pasa a ser la $v_{tt}-c^2v_{rr}=0$ de la cuerda. Y como u debe ser acotada, aparece la condición $v(0,t)=0\cdot u(0,t)=0$.

Así pues, el problema en v es del tipo (P_3) que vimos antes:

$$\boxed{\begin{cases} v_{tt}-c^2v_{rr}=0\,,\ r\geq 0,\ t\in\mathbf{R} \\ v(r,0)=rf(r)\equiv F(r),\ v_t(r,0)=rg(r)\equiv G(r),\ v(0,t)=0 \end{cases}}\ .$$

Si F^* y G^* son las extensiones impares de $F(r)$ y $G(r)$ la solución de (P_r) es:

$$\boxed{u(r,t)=\frac{1}{2r}\big[F^*(r+ct)+F^*(r-ct)\big]+\frac{1}{2cr}\int_{r-ct}^{r+ct}G^*(s)\,ds}\ ,$$

que podemos escribir $u(r,t)=\frac{1}{r}p(r+ct)+\frac{1}{r}q(r-ct)$ e interpretar como suma de dos ondas esféricas, cuyos radios disminuyen o crecen a velocidad c. La magnitud de la perturbación propagada es inversamente proporcional a r.

[En el plano no hay cambio similar y las cosas se complican bastante aquí y separando variables].