Sea $f(x)$ definida en $\mathbf{R}$ y absolutamente integrable $\left[\int_{-\infty}^{\infty}|f|<\infty\right]$.
La **transformada de Fourier** de f es la función $\hat{f}(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,e^{ikx}\,dx$.

$f\in C^1(\mathbf{R})$ y absolutamente integrable $\Rightarrow f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(k)\,e^{-ikx}dk\ \ \forall x\in\mathbf{R}$.

[Algunos libros no ponen la constante $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ en la definición de $\hat{f}$ y ponen $\frac{1}{2\pi}$ en la fórmula de inversión; también se puede ver en la primera fórmula e^{-ikx} y en la segunda e^{ikx}].

Se llama a f **transformada inversa** de Fourier de $\hat{f}$. Vamos a denotar también $\mathcal{F}[f]=\hat{f}$ y $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}]=f$. Es evidente que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^{-1}$ son lineales.

Veamos sus teoremas básicos. Es importante que la $\mathcal{F}$ 'mata' derivadas:

$f,f',f''\in C(\mathbf{R})$ y absolutamente integrables $\Rightarrow \mathcal{F}[f']=-ik\hat{f}$, $\mathcal{F}[f'']=-k^2\hat{f}$.

$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(k)\,e^{ika}]=f(x-a)$. Si $h(x)=\begin{cases}1, & x\in[a,b]\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$, $\mathcal{F}[h]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{ikb}-e^{ika}}{ik}$.

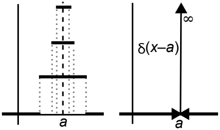
$$\mathcal{F}\left(e^{-ax^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2a}}\,e^{-k^2/4a},\quad \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-ak^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2a}}\,e^{-x^2/4a},\quad a>0.$$

La **convolución** de f y g es la función $(f*g)(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-s)\,g(s)\,ds$.
Se tiene $f*g=g*f$, y $\mathcal{F}(f*g)=\mathcal{F}(f)\,\mathcal{F}(g)$, si las transformadas existen.

La δ, la función paso y un esquema

Hallemos la transformada de la ‘función’ **delta de Dirac**, cuya definición seria exige la ‘teoría de las distribuciones’, pero que no es difícil de manejar formalmente. La $\delta(x-a)$ se puede intuitivamente ‘definir’ como el ‘límite’ cuando $n\to\infty$ de

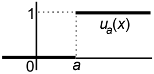
$$f_n(x)=\begin{cases} n \text{ si } x\in\left[a-\frac{1}{2n},\, a+\frac{1}{2n}\right] \\ 0 \text{ en el resto}\end{cases}$$



Esta $\delta(x-a)$ tiene las siguientes propiedades (nos bastarán para trabajar):

$$\delta(x-a)=0 \text{ si } x\neq a\,;\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)\,dx=1\,;\ \underset{f\text{ continua}}{\int_b^c f(x)\,\delta(x-a)\,dx}=\begin{cases} f(a) \text{ si } a\in[b,c] \\ 0 \text{ si } a\notin[b,c]\end{cases},$$

$$\delta(x-a)=\frac{d}{dx}u_a(x)\,,\ \text{siendo } u_a(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x<a \\ 1 \text{ si } x\geq a\end{cases},\ \textbf{función paso}.$$

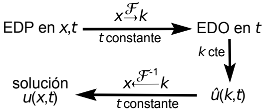


$$\boxed{\mathcal{F}[\delta(x-a)]}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)\,e^{ikx}\,dx=\boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ika}}\,.$$

[Formalmente esta función de k no posee transformada inversa (no tiende a 0 en $t\pm\infty$), pero con la $\mathcal{F}$ se suele ser riguroso justificando los resultados al final].

Aplicando a una EDP en dos variables la $\mathcal{F}$ en una de ellas aparece una EDO para la $\hat{u}$ (en la otra variable). Resolviéndola se halla $\hat{u}$. Hallando la u de la que proviene o con la fórmula de inversión se puede a veces escribir explícitamente la solución. En muchos casos u queda en términos de integrales no calculables.

En cada paso se debe tener claro cuáles son las variables y cuales las constantes. En lo que sigue, haremos lo esquematizado a la derecha, pues nuestras ecuaciones serán en (x,t) y siempre haremos la transformada en la x.



Primer ejemplo

Ej 1. $\boxed{\begin{cases} u_t + u_x = g(x) \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}}$ Aplicamos la $\mathcal{F}$ en la x (se supone que u, g y f son 'buenas' y que se pueden usar los teoremas).

Utilizando la linealidad, el teorema 2 y el hecho de que:

$$\mathcal{F}[u_t] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\, e^{ikx} dx = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, e^{ikx} dx = \hat{u}_t \to \begin{cases} \hat{u}_t - ik\hat{u} = \hat{g}(k) \\ \hat{u}(k,0) = \hat{f}(k) \end{cases},$$

lineal de primer orden en t cuya solución tiene una constante para cada k:

$$\hat{u}(k,t) = p(k)\, e^{ikt} - \frac{\hat{g}(k)}{ik}\text{, con } p \text{ arbitraria} \overset{\text{d.i.}}{\to} \hat{u} = \hat{f}(k)\, e^{ikt} + \hat{g}(k)\Big[\frac{e^{ikt}-1}{ik}\Big].$$

Por tanto, a la vista de dos transformadas conocidas y de la convolución:

$$u(x,t) = f(x-t) + \sqrt{2\pi}\, g(x) * h(x) \quad \text{siendo} \quad h(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [0,t] \\ 0 \text{ en el resto} \end{cases}.$$

Como $\int_0^t g(x-u)\, du = -\int_x^{x-t} g(s)\, ds$, deducimos que $\boxed{u = f(x-t) + \int_{x-t}^{x} g(s)\, ds}$.

Obsérvese que la expresión anterior nos da la solución del problema si $f \in C^1$ y g continua, aunque no sean absolutamente integrables, que era necesario para aplicar la transformada. Esta situación es típica utilizando la $\mathcal{F}$.

[La solución la podemos calcular también con las técnicas de la sección 1.1:

$$\frac{dt}{dx} = 1 \to \begin{cases} \xi = x - t \\ \eta = x \end{cases} \to u_\eta = g(\eta) \to u(x,t) = p(x-t) + \int_0^x g(s)\, ds \to$$

$$p(x) + \int_0^x g(s)\, ds = f(x) \to u = f(x-t) - \int_0^{x-t} g(s)\, ds + \int_0^x g(s)\, ds \quad \text{como antes}].$$

Ej 2. $\boxed{\begin{cases} u_{tt}+u_{tx}-2u_{xx}=0 \\ u(x,0)=f(x),\, u_t(x,0)=0 \end{cases}}$ Aplicando $\mathcal{F}$: $\begin{cases} \hat{u}_{tt}-\mathrm{i}k\hat{u}_t+2k^2\hat{u}=0 \\ \hat{u}(k,0)=\hat{f}(k),\, \hat{u}_t(k,0)=0 \end{cases}$.

Las ecuaciones lineales con coeficientes constantes complejos se resuelven igual que las de reales. A través del polinomio característico:

$$\mu^2-\mathrm{i}k\mu+2k^2=0 \to \mu=2\mathrm{i}k,-\mathrm{i}k \to \hat{u}(k,t)=p(k)\,e^{2\mathrm{i}kt}+q(k)\,e^{-\mathrm{i}kt}$$

Imponiendo los datos iniciales: $\begin{array}{l} p(k)=\frac{1}{3}\hat{f}(k) \\ q(k)=\frac{2}{3}\hat{f}(k) \end{array} \to \hat{u}(k,t)=\frac{2}{3}\hat{f}(k)\,e^{-\mathrm{i}kt}+\frac{1}{3}\hat{f}(k)\,e^{2\mathrm{i}kt}$.

Y como $\mathcal{F}^{-1}\big[\hat{f}(k)\,e^{\mathrm{i}ka}\big]=f(x-a)$, concluimos: $\boxed{u(x,t)=\frac{2}{3}f(x+t)+\frac{1}{3}f(x-2t)}$.

[Solución válida $\forall f\in C^2$, tenga o no transformada].

De nuevo el ejemplo es resoluble también por otros caminos, vistos en 1.2:

$$B^2-4AC=9 \quad \begin{array}{c}\text{hiperbólica de}\\ \text{coeficientes}\\ \text{constantes}\end{array} \to \begin{cases} \xi=x+t \\ \eta=x-2t \end{cases} \to \begin{cases} u_{xx}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta} \\ u_{xt}=u_{\xi\xi}-u_{\xi\eta}-2u_{\eta\eta} \\ u_{tt}=u_{\xi\xi}-4u_{\xi\eta}+4u_{\eta\eta} \end{cases} \to$$

$$u_{\xi\eta}=0 \to u=p(\xi)+q(\eta)=p(x+t)+q(x-2t)\text{, solución general.}$$

$$\begin{cases} u(x,0)=p(x)+q(x)=f(x) \\ u_t(x,0)=p'(x)-2q'(x)=0,\ p(x)=2q(x)+C \end{cases} \quad \begin{array}{l} q(x)=\frac{1}{3}f(x)-\frac{C}{3} \\ \downarrow \\ p(x)=\frac{2}{3}f(x)+\frac{C}{3} \end{array} \to$$

$$u(x,t)=\frac{2}{3}f(x+t)+\frac{1}{3}f(x-2t)\,.$$

$$\boxed{(\mathrm{P})\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0\,,\ x\in\mathbf{R},\ t>0 \\ u(x,0)=f(x)\,,\ u \text{ acotada}\end{cases}}$$ [no tendremos otro método para resolverlo]

Suponemos u y f suficientemente regulares y que tienden a 0 en $\pm\infty$ lo suficientemente rápido como para poder utilizar los teoremas. Aplicando la $\mathcal{F}$ en la x a la ecuación y al dato inicial se tiene el problema:

$$\begin{cases} \hat{u}_t + k^2\hat{u} = 0 \\ \hat{u}(k,0)=\hat{f}(k)\end{cases} \quad \text{cuya solución es} \quad \hat{u}(k,t)=\hat{f}(k)\,\mathrm{e}^{-k^2t}$$

La solución será la convolución de las transformadas inversas de cada uno de los factores (la del segundo es conocida):

$$\boxed{u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\,\mathrm{e}^{-(x-s)^2/4t}\,ds \equiv \int_{-\infty}^{\infty} G(x,s,t)\,f(s)\,ds} \quad [1]$$

$G(x,s,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\,\mathrm{e}^{-(x-s)^2/4t}$ es la **solución fundamental** de la ecuación del calor

[temperatura del punto x en el tiempo t debida a una f inicial de la forma $\delta(x-s)$].

Una vez deducida [1], en vez de justificar los pasos que llevaron a ella, se prueba que proporciona realmente la solución de (P) con hipótesis más amplias de las que nos permiten aplicar la $\mathcal{F}$. En concreto, para cualquier f acotada y continua a trozos, [1] nos da la solución única acotada de (P) que es continua para $t\geq 0$ a excepción de los puntos de $t=0$ en que f es discontinua.

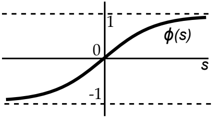
De [1] se deduce también que, según este modelo matemático, el calor (a diferencia de las ondas) se propaga a **velocidad infinita**: si $f>0$ en un entorno de un x_o y 0 en el resto, es claro que $u(x,t)>0$ por pequeño que sea t y grande que sea $|x-x_o|$. También se ve que u es C^∞ para $t>0$ aunque f sea discontinua (¡aunque sea $f(x)=\delta(x-s)$!). En las ondas se conservaban los picos iniciales.

Ej 3. Sea primero $\boxed{f(x)=u_0(x)=\begin{cases}0,\ x<0\\ 1,\ x\geq 0\end{cases}}$ $\rightarrow\ u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-(x-s)^2/4t}\,ds$.

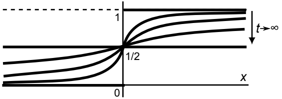
Hacemos el cambio $v=\frac{s-x}{2\sqrt{t}}\ \rightarrow\ u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-x/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-v^2}dv$, que se puede poner:

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x/2\sqrt{t}} e^{-v^2}dv+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-v^2}dv=\frac{1}{2}\Big[1+\phi\Big(\frac{x}{2\sqrt{t}}\Big)\Big],\ \ \phi(s)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{s} e^{-v^2}dv\,.$$

ϕ es la 'función error' muy habitual en teoría de probabilidades.



Hemos usado: $\int_0^\infty e^{-v^2}dv=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $\int_{-\infty}^\infty e^{-v^2}dv=\sqrt{\pi}$.



Como se observa, la solución, suave si $t>0$, tiende hacia $1/2$ para todo x cuando $t\rightarrow\infty$.

Si $\boxed{f(x)=e^{-x^2}}$, completamos cuadrados y hacemos un cambio de variable:

$$u=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}e^{-\frac{(x-s)^2}{4t}}ds=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t+1}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\bullet)^2}ds\quad \text{con}\quad \bullet=\frac{s\sqrt{4t+1}-\frac{x}{\sqrt{4t+1}}}{2\sqrt{t}}\,.$$

Haciendo $z=\bullet$ se obtiene: $u=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{4t+1}}e^{-\frac{x^2}{4t+1}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}dz=\frac{1}{\sqrt{1+4t}}\,e^{-\frac{x^2}{1+4t}}$.

Pero sale mucho más corto aplicando directamente $\mathcal{F}$:

$$\begin{cases}\hat{u}_t=-k^2\hat{u}\\ \hat{u}(k,0)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-k^2/4}\end{cases}\ \rightarrow\ \hat{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{-\frac{k^2(1+4t)}{4}}\ \rightarrow\ u=\frac{1}{\sqrt{1+4t}}\,e^{-\frac{x^2}{1+4t}}\,.$$

Ej 4. $\boxed{\begin{array}{l} u_t-u_{xx}+2tu=0\,,\ x\in\mathbf{R},\,t>0 \\ u(x,0)=f(x)\,,\ u \text{ acotada}\end{array}}$ Resolver y deducir $u(x,t)$ para $f(x)\equiv 1$.
$[\,\mathcal{F}(1)$ no existe y no se puede hacer con $u(x,0)=1\,]$.

$$\begin{cases} \hat u_t+(k^2+2t)\hat u=0 \\ \hat u(k,0)=\hat f(k)\end{cases} \to u(\hat{k},t)=p(k)\,e^{-k^2t-t^2} \xrightarrow{d.i.} u(\hat{k},t)=\hat f(k)\,e^{-t^2}e^{-k^2t} \to$$

$$u(x,t)=e^{-t^2}f(x)*\mathcal{F}^{-1}(e^{-k^2t})=\frac{e^{-t^2}}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\,e^{-(x-s)^2/4t}\,ds\,.$$

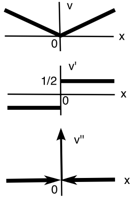
Para $f(x)\equiv 1$, $u=\frac{e^{-t^2}}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-s)^2/4t}ds=\frac{e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}du=\left[\,\frac{s-x}{2\sqrt{t}}=u\,\right]=\boxed{e^{-t^2}}\,.$

Un problema con la δ en el que sólo sabemos hallar la solución para $x=0$:

Ej 5. $\boxed{\begin{array}{l} u_t-u_{xx}=\delta(x)\,,\ x\in\mathbf{R},\,t>0 \\ u(x,0)=0\end{array}}$ $\begin{cases} \hat u_t+k^2\hat u=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ \hat u(k,0)=0\end{cases}$, $\hat u=\frac{1-e^{-k^2t}}{k^2\sqrt{2\pi}}$ [no es la transformada de nadie conocido].

Con el primer teorema: $u=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-e^{-k^2t}}{k^2}e^{-ikx}dk$, difícil en general, pero:

$$u(0,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-e^{-k^2t}}{k^2}dk=-\frac{1-e^{-k^2t}}{2\pi k}\Big]_{-\infty}^{\infty}+\frac{t}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-k^2t}dk=\boxed{\sqrt{\frac{t}{\pi}}}\,.$$



Para evitar la δ usamos que $v=\frac{1}{2}|x|$ satisface $v''=\delta(x)$:

$$w=u+\frac{|x|}{2} \to \begin{cases} w_t-w_{xx}=0 \\ w(x,0)=\frac{|x|}{2}\end{cases} \to w=\frac{1}{4\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}|s|\,e^{-(x-s)^2/4t}ds$$

$$w(0,t)=\frac{1}{4\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}|s|e^{-s^2/4t}ds=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty}se^{-s^2/4t}ds$$

$$=-\sqrt{\frac{t}{\pi}}\,e^{-s^2/4t}\Big]_0^{\infty}=\sqrt{\frac{t}{\pi}}\,.$$

Último ejemplo (con la **delta** y para la cuerda infinita)

Empujamos hacia arriba en el punto central de la cuerda:

Ej 6. $\boxed{\begin{array}{l} u_{tt}-u_{xx}=\delta(x)\,,\ x\in\mathbf{R}, t\geq 0 \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 \end{array}}$ Aplicando la $\mathcal{F}$: $\begin{cases} \hat{u}_{tt}+k^2\hat{u}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ \hat{u}(k,0)=\hat{u}_t(k,0)=0 \end{cases} \rightarrow$

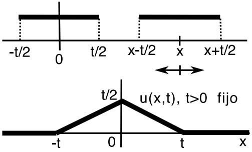
$$\hat{u}=p(k)\cos kt+q(k)\,\mathrm{sen}\,kt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,k^2} \xrightarrow{d.i.} \hat{u}(k,t)=\frac{1-\cos kt}{\sqrt{2\pi}\,k^2}=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\mathrm{sen}\,\frac{k}{2}t}{k}\right]^2 .$$

$h(x)=\begin{cases} 1\,, & x\in[-b,b] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} \rightarrow \mathcal{F}(h)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{ikb}-e^{-ikb}}{ik}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{\mathrm{sen}\,bk}{k}$ [caso particular de resultado conocido]

La u será, por tanto, la convolución de una h de este tipo consigo misma.

En concreto: $u=\frac{1}{2}\int_{\infty}^{\infty} h(x-s)\,h(s)\,ds$, donde $h(x)=\begin{cases} 1\,, & x\in[-t/2,t/2] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$.

Discutiendo si el integrando es 1 ó 0 según los valores de x se concluye:



Si $x\leq -t$ ó si $x\geq t$ es $u=0$.

Si $x\in[-t,0]$, $u=\frac{1}{2}\big[x+\frac{t}{2}-\big(-\frac{t}{2}\big)\big]=\frac{1}{2}[x+t]$.

Si $x\in[0,t]$, $u=\frac{1}{2}\big[\frac{t}{2}-\big(x-\frac{t}{2}\big)\big]=\frac{1}{2}[t-x]$.

Es decir, $u(x,t)=\begin{cases} 0\,, & \text{si } |x|\geq t \\ \frac{1}{2}\big[t-|x|\big], & \text{si } |x|\leq t \end{cases}$.

Para hacerlo sin la $\mathcal{F}$ usamos la v del ejemplo 5 y hacemos $w=u+v$:

$$\begin{cases} w_{tt}-w_{xx}=0 \\ w(x,0)=|x|/2\,, w_t(x,0)=0 \end{cases} \rightarrow u=\frac{1}{4}\big[|x+t|+|x-t|\big]-\frac{1}{2}|x| .$$

Discutiendo los valores absolutos se llega a la solución de arriba.