En el estudio de las EDOs lineales se comprueba que hay escasas formas de resolver elementalmente la ecuación con coeficientes variables

$$[\mathrm{e}]\ \boxed{y''+a(x)y'+b(x)y=0}$$

Este capítulo trata una forma general (y única en muchas ocasiones) de abordarla: **suponer la solución desarrollada en serie de potencias e introducir esta serie en la ecuación para calcular sus coeficientes**. Hallar esos coeficientes es bastante sencillo (solamente algo pesado).

En la sección 2.1 recordaremos la definición de función **analítica** (función descrita por una serie de potencias convergente) y algunas manipulaciones matemáticas que se pueden hacer con ellas. **Si a y b son analíticas en** x_o (punto **regular**) siempre se podrán encontrar dos soluciones linealmente independientes de [e] en forma de serie de potencias por este camino: llevando la serie a la ecuación conseguiremos expresar sus coeficientes c_k en función de los dos primeros c_0 y c_1, que son las constantes arbitrarias que deben aparecer en la solución de cualquier EDO de segundo orden. Algunas veces podremos dar la expresión general del c_k, pero otras nos limitaremos a ir calculando coeficiente a coeficiente. Un teorema, que aceptaremos sin demostración, asegurará que las series solución convergen al menos en el intervalo en que las series de a y b lo hacían. Imponer datos iniciales en x_o será inmediato, pues tendremos que $y(x_o)=c_0$ y $y'(x_o)=c_1$.

Empezaremos 2.2 resolviendo elementalmente la ecuación de Euler [u] y pasaremos luego a resolver utilizando series la ecuación más general [e*]:

$$[\mathrm{u}]\ \boxed{x^2y''+axy'+by=0\,,\ a,b\in\mathbf{R}}\,,\quad [\mathrm{e}^*]\ \boxed{x^2y''+x\,a^*(x)\,y'+b^*(x)\,y=0}\,.$$

Si a^*, b^* son analíticas en $x=0$ se dirá que ese punto es **singular regular** (otros puntos x_o se llevan al origen haciendo $s=x-x_o$). Resolver [e*] es sólo algo más complicado (**método de Frobenius**) que en 2.1. Hallaremos primero una solución y_1 siempre de la forma $x^r\sum$ (siendo r la mayor de las raíces del '**polinomio indicial**') y a continuación otra y_2 independiente de la anterior, que unas veces (según sea la diferencia entre las raíces) será del mismo tipo y otras contendrá un término con el $\ln x$, que ya aparecía en Euler. Otro teorema no probado garantizará la convergencia de las series.

Es difícil obtener información de las series halladas (a menudo sin término general). Pero EDOs como [e] o [e*] aparecen resolviendo EDPs y hay libros (los de funciones especiales de la física) dedicados a las propiedades de las series solución de algunas de ellas (Legendre, Hermite, Bessel, ...). Pequeña muestra de tales estudios son las propiedades citadas en la sección 2.3.

Las soluciones por serie en torno a cualquier x_o (salvo que acaben siendo una función conocida) no informan sobre su comportamiento cuando $x\to\infty$. Para estudiarlo, en 2.4 miraremos el **punto del infinito**, punto $s=0$ de la ecuación que se obtiene haciendo $x=1/s$ en la inicial.

2.1 Funciones analíticas y puntos regulares

Se dice que una $f(x)$ real dada cerca de x_o por una **serie de potencias**:

$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_o)^k = c_0+c_1(x-x_o)+\cdots$ es **analítica** en $x=x_o$.

Desde ahora, $x=0$ (si no, $x-x_o=s$ llevaría a ese caso): $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$.

Cada serie de potencias tiene un **radio de convergencia** R tal que:

Si $R=0$, la serie sólo converge en $x=0$. Si $R=\infty$, converge $\forall x$.

Si $0<R<\infty$, converge si $|x|<R$ y diverge si $|x|>R$ (en $x=\pm R$ sí o no).

Además, si $0<x_o<R$, la serie converge uniformemente en $[-x_o,x_o]$.

El R se puede calcular en muchas ocasiones con el **criterio del cociente**:

Sean $\sum a_k$ y $p=\lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \Rightarrow \sum$ converge si $p<1$ y diverge si $p>1$.

Las series de potencias (donde convergen) se pueden **derivar e integrar término a término** y **sumar y multiplicar** como si fuesen polinomios:

Si $|x|<R$, $f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^{k-1}=c_1+2c_2x+\cdots$,

$f''(x)=\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2}=2c_2+6c_3x+\cdots$, ...

$$\int \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = C+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{k+1}x^{k+1} .$$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,\ |x|<R_f ,\ g(x)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k,\ |x|<R_g \Rightarrow \text{ si } |x|<\min\{R_f,R_g\} ,$$

$$f(x)+g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}[a_k+b_k]x^k ,\quad f(x)g(x)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+\cdots$$

[También f/g es analítica si tiene límite en $x=0$, con lo que lo son $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, ...].

Caso particular importante: $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}}{k!}x^k$, para f con infinitas derivadas en 0.

La mayoría de las funciones elementales coinciden con su serie de Taylor (y por tanto son analíticas) en todo el intervalo de convergencia de la serie:

$$\mathrm{e}^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\,,\ \operatorname{sen}x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,,\ \cos x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\,,\ \operatorname{sh}x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,,\ \operatorname{ch}x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}\,,\quad \forall x\in\mathbf{R}$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k,\ \ln(1+x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}\,,\ \arctan x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}\,,\ [1+x]^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots,\ |x|<1\,.$$

Aunque $f\in C^{\infty}(\mathbf{R})$ y su serie de Taylor converja $\forall x$ puede que ambas no coincidan, como le ocurre a $f(x)=\mathrm{e}^{-1/x^2}$, $f(0)=0$ $\big[$es $f^{(k)}(0)=0\ \forall k$, su serie de Taylor será $\sum 0\cdot x^k=0$ y por tanto no es analítica$\big]$. Para que una f lo sea, debe al menos tener infinitas derivadas en el punto, pero esto no es suficiente.

Ej 1. Hallemos de varias formas (algunas nada naturales) el desarrollo de $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$.

$$f(x)=-\frac{d}{dx}\frac{1}{1+x}\to\frac{1}{(1+x)^2}=-\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^k=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^k\,k\,x^{k-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^k\,(k+1)\,x^k \text{ si } |x|<1\,.$$

Otra forma: $(1+x)^{-2}=1-2x+\frac{-2(-2-1)}{2!}x^2+\frac{-2(-2-1)(-2-2)}{3!}x^3+\cdots=1-2x+3x^2-4x^3+\cdots,\ |x|<1\,.$

Producto: $\big[1-x+x^2-\cdots\big]\big[1-x+x^2-\cdots\big]=1+(-1-1)x+(1+1+1)x^2+\cdots=1-2x+3x^2-\cdots,\ |x|<1\,.$

También podemos ‘dividir’: buscar una $\sum c_k x^k$ tal que $\big[c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\cdots\big]\big[x^2+2x+1\big]=1$

$\Rightarrow c_0=1\,;\ \ 2c_0+c_1=0\to c_1=-2c_0=-2\,;\ \ c_0+2c_1+c_2=0\to c_2=-c_0-2c_1=3\,;\ \ldots$

[**El radio R del desarrollo de un cociente P/Q, con P y Q polinomios, simplificados los factores comunes, y siendo $Q(0)\neq 0$, es la distancia al origen de la raíz (real o compleja) de Q más próxima**].

Y ‘componiendo’ series: $\frac{1}{1+(2x+x^2)}=1-(2x+x^2)+(2x+x^2)^2+\cdots=1-2x+(-1+4)x^2+\cdots$

$x=x_o$ **es un punto regular de** [e] $y''+a(x)\,y'+b(x)\,y=0$ **si** a **y** b **son analíticas en** $x=x_o$. Si no lo son, se dice que $x=x_o$ es **punto singular**.

Sea $x=0$ regular. Admitirń a y b desarrollos si $|x|<R$, mínimo de los radios de a y b. Esperamos soluciones analíticas para $|x|<R$. Veamos un ejemplo:

Ej 2. $\boxed{(1+x^2)\,y''+2xy'-2y=0}$, es decir, $y''+\frac{2x}{1+x^2}y'-\frac{2}{1+x^2}y=0$,

$a(x)$ y $b(x)$ analíticas en $x=0$ (regular) con $R=1$ (en $\pm$i es $1+x^2=0$).

Sustituimos una serie arbitraria y sus derivadas en la ecuación inicial (no en la otra, para no desarrollar a y b) y hallemos sus coeficientes:

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k\ ,\quad y'=\sum_{k=1}^{\infty}kc_kx^{k-1}\ ,\quad y''=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^{k-2}\ \rightarrow$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}[k(k-1)c_kx^{k-2}+k(k-1)c_kx^k]+\sum_{k=1}^{\infty}2kc_kx^k-\sum_{k=0}^{\infty}2c_kx^k=0$$

[Se podría poner $k=0$ en las tres series, pues se anularía el primer término en la de $k=1$ y los dos primeros en la de $k=2$, pero así es clara la potencia con la que empieza cada una].

Vamos a **intentar escribir los** c_k **en función de los** 2 **primeros** c_0 y c_1. Como han de ser 0 los coeficientes de cada potencia de x, deducimos:

$$x^0:\ 2{\cdot}1{\cdot}c_2-2{\cdot}c_0=0\rightarrow c_2=c_0\,.\quad x^1:\ 3{\cdot}2{\cdot}c_3+[2-2]c_1=0\rightarrow c_3=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x^k:\ \ (k+2)(k+1)c_{k+2}+[k(k-1)+2k-2]c_k=0$$

[Escribimos aparte los primeros términos porque cada serie aporta términos desde distintos k; como potencia general eligimos x^k (la más repetida), pero también podríamos escoger x^{k-2}].

De la última igualdad deducimos la **regla de recurrencia** que expresa un coeficiente en función de los anteriores ya conocidos (aquí queda c_{k+2} en función sólo de c_k, pero en otros pueden aparecer varios); para facilitar los cálculos, **factorizamos los polinomios** que aparecen hallando sus raíces:

$$c_{k+2}=-\frac{(k+2)(k-1)}{(k+2)(k+1)}c_k=-\frac{k-1}{k+1}c_k\,,\ k=0,1,\ldots\ \Big[\text{O bien } c_k=-\frac{k-3}{k-1}c_{k-2}\,,\ \ k=2\ldots\Big].$$

A partir de la regla de recurrencia escribimos algunos c_k más (siempre en función de c_0 o c_1) con el objetivo de encontrar la expresión del **término general** de la serie (en muchos ejemplos esto no será posible, pero aquí sí):

$$c_4=-\tfrac{1}{3}c_2=-\tfrac{1}{3}c_0\,,\quad c_6=-\tfrac{3}{5}c_4=\tfrac{1}{5}c_0\,,\quad c_8=-\tfrac{5}{7}c_6=-\tfrac{1}{7}c_0\,,\ \ldots$$

$c_5=0$ por estar en función de $c_3=0$. Análogamente $c_7=c_9=\cdots=0$.

Por si no está todavía claro el c_{2k}, usamos la recurrencia 'desde arriba':

$$c_k=-\frac{k-3}{k-1}c_{k-2}=\frac{k-3}{k-1}\frac{k-5}{k-3}c_{k-4}=\frac{k-5}{k-1}c_{k-4}=-\frac{k-7}{k-1}c_{k-6}=\cdots$$

El numerador de c_{2k} es 1, el denominador $2k-1$ y el signo va alternando:

$$c_{2k}=(-1)^{k+1}\frac{1}{2k-1}c_0\,,\quad k=2,3,\ldots$$

Agrupando los términos que acompañan a c_0 y c_1 (indeterminados):

$$y=c_0\big[1+x^2-\tfrac{1}{3}x^4+\cdots\big]+c_1x=c_0\Big[1+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^{2k}}{2k-1}\Big]+c_1x=c_0y_1+c_1y_2\,.$$

La expresión final obtendida tiene la estructura clásica de las soluciones de las lineales de segundo orden. Pero para que lo sea de verdad, las series deben converger en un entorno de $x=0$, y además han de ser linealmente independientes y_1 y y_2. Esto es lo que sucede. La serie de y_1 (lo prueba el criterio del cociente) converge si $|x|<1$ y la 'serie' de y_2 (truncada a partir de su segundo término) converge $\forall x$. Y además el wronskiano de ambas soluciones en $x=0$ es 1 [pues $y_1(0)=1$, $y_1'(0)=0$, $y_2(0)=0$, $y_2'(0)=1$].

Si, en vez de la solución general, queremos la que cumple $y(0)=c$, $y'(0)=d$ (existe y es única por ser a y b analíticas en $x=0$), dada la forma de las series de y_1 e y_2, es inmediato que debe tomarse $c_0=c$, $c_1=d$.

La ecuación se podía haber resuelto sin series. Bastaba advertir que $y_2=x$ era una solución y hallar la y_1 mediante la fórmula citada en el apéndice:

$$y_1=y_2\int y_2^{-2}\,e^{-\int a}\,dx=x\int x^{-2}\,e^{-\int\frac{2x}{1+x^2}}\,dx=x\int\frac{dx}{x^2(1+x^2)}=-1-x\arctan x\,.$$

[su desarrollo, salvo el signo, coincide con el obtenido anteriormente].

Gran parte de lo visto en este ejemplo ocurre en general, como asegura el siguiente teorema que no demostraremos.

Si $x=0$ regular y R es el menor de los radios de convergencia de las series de a y b, la solución general de [e] $y''+a(x)y'+b(x)y=0$ es

$$y=c_0y_1+c_1y_2=c_0\big[1+\sum\big]+c_1\big[x+\sum\big]\,,\ c_0\,,\ c_1 \text{ arbitrarios}$$

Las series, que contienen potencias x^k con $k\geq 2$, convergen, al menos, si $|x|<R$. Sus coeficientes se determinan de forma única llevando una serie de potencias arbitraria a la ecuación (con las funciones $a(x)$ y $b(x)$ desarrolladas) y expresando sus coeficientes c_k, para $k\geq 2$, en función de c_0 y c_1. La solución única de [e] con $y(0)=y_o$, $y'(0)=y'_o$ se obtiene simplemente tomando $c_0=y_o$, $c_1=y'_o$.

[El desarrollo de a y b, desde luego, será innecesario si esas funciones son polinomios, y esto sucede en la mayoría de las ecuaciones que se resuelven por series en la física].

Para resolver [e] cerca de otro x_o regular, el **cambio de variable** $s=x-x_o$ (que no afecta a las derivadas por ser $ds/dx=1$) lleva a una ecuación en la variable s para la que $s=0$ es regular. Probaríamos entonces para hallar su solución la serie:

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}c_ks^k \quad \Big[\text{es decir, } y=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x-x_o)^k\Big].$$

Los cálculos del ejemplo 2 era demasiado sencillos. En general, y como pasa en el siguiente ejemplo, las cosas se complican es **imposible encontrar la expresión del término general**.

Ej 3. $\boxed{y''+(x-2)y=0\,,\ y(0)=2\,,\ y'(0)=1}$.

$x=0$ regular pues $a(x)=0$ y $b(x)=x-2$ son analíticas en todo **R**.

Llevando una serie arbitraria y sus derivadas a la ecuación:

$$y=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \to \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty}\left[c_k x^{k+1} - 2c_k x^k\right] = 0 \to$$

$$x^0:\ 2\cdot 1\cdot c_2 - 2\cdot c_0 = 0\,,\ c_2 = c_0\,.\quad x^1:\ 3\cdot 2\cdot c_3 + c_0 - 2\cdot c_1 = 0\,,\ c_3 = -c_0 + c_1\,.\quad \dots$$

$$x^{k-2}:\ k(k-1)c_k + c_{k-3} - 2c_{k-2} = 0\,,\ c_k = -\tfrac{1}{k(k-1)}c_{k-3} + \tfrac{2}{k(k-1)}c_{k-2}\,,\ k=3,4,\dots$$

(regla de recurrencia de tres términos que trae muchos más problemas que las de dos). Escribimos un par de términos más en función de c_0 y c_1 :

$$c_4 = -\tfrac{1}{12}c_1 + \tfrac{2}{12}c_2 = \tfrac{1}{6}c_0 - \tfrac{1}{12}c_1\ ;\ c_5 = -\tfrac{1}{20}c_2 + \tfrac{2}{20}c_3 = -\tfrac{1}{15}c_0 + \tfrac{1}{30}c_1$$

Paso a paso se puede ir calculando tantos términos como queramos.

La solución general es:

$$y = c_0\left[1 + x^2 - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{6}x^4 - \tfrac{1}{15}x^5 + \cdots\right] + c_1\left[x + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{12}x^4 + \tfrac{1}{30}x^5 + \cdots\right]$$

$$\xrightarrow{d.i.}\ y = 2 + x + 2x^2 + \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{10}x^5 + \cdots\,.$$ Converge $\forall x$ por el teorema.

Para calcular unos pocos términos (no para hallar muchos o expresar el término general) de la serie solución cerca de un punto regular (no se podrá hacer en los singulares regulares) se puede seguir el siguiente camino:

Haciendo $x=0$ en la ecuación: $y''(0)+(0-2)y(0)=0 \to y''(0)=4$.

Derivándola: $y'''+(x-2)y'+y=0 \xrightarrow{x=0} y'''(0)=2y'(0)-y(0)=0$.

Derivando otra vez: $y''''+(x-2)y''+2y'=0 \to y''''(0)=2y''(0)-2y'(0)=6$, ...

$$\to y(x)=y(0)+y'(0)x+\frac{y''(0)}{2}x^2+\frac{y'''(0)}{6}x^3+\cdots=2+x+\frac{4}{2}x^2+\frac{0}{6}x^3+\frac{6}{24}x^4+\cdots$$

La serie de antes no sirve con los datos $\boxed{y(2)=6\,,\ y'(2)=0}$. Hay que ir a 2:

$s=x-2 \to \boxed{y''+sy=0}$ (esta derivada es respecto a s, pero la seguimos llamando igual).

$$s=0 \text{ regular} \to y=\sum_{k=0}^{\infty}c_k s^k \to \sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_k s^{k-2}+\sum_{k=0}^{\infty}c_k s^{k+1}=0$$

$$\to s^0:\ 2c_2=0\,;\quad s^1:\ 6c_3+c_0=0\,,\ c_3=-c_0\,;\ \ldots\,;$$

$$s^{k-2}:\ k(k-1)c_k+c_{k-3}=0 \to c_k=-\frac{1}{k(k-1)}c_{k-3}\,;\ k=3,4,\ldots \to$$

$$c_5=c_8=\cdots=0\,;\ c_4=-\frac{1}{4\cdot3}c_1\,;\ c_6=-\frac{1}{6\cdot5}c_3=\frac{1}{6\cdot5\cdot3\cdot2}c_0\,;\ c_7=-\frac{1}{7\cdot6}c_4=\frac{1}{7\cdot6\cdot4\cdot3}c_1$$

$$\to y=c_0\Big[1-\frac{1}{6}s^3+\frac{1}{180}s^6+\cdots\Big]+c_1\Big[s-\frac{1}{12}s^4+\frac{1}{504}s^7+\cdots\Big]\xrightarrow{\text{datos}}$$

$$y=6-s^3+\frac{1}{30}s^6+\cdots=6-(x-2)^3+\frac{1}{30}(x-2)^6+\cdots$$

(Aquí se puede dar el término general, aunque queda poco compacto:

$$y=c_0\Big[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(x-2)^{3k}}{2\cdot5\cdots(3k-1)\cdot3\cdot6\cdots(3k)}\Big]+c_1\Big[x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(x-2)^{3k+1}}{3\cdot6\cdots(3k)\cdot4\cdot7\cdots(3k+1)}\Big]\Big).$$