2.2 Ecuación de Euler y puntos singulares regulares

Empecemos con una EDO lineal de orden dos con **coeficientes variables**, que es resoluble por métodos elementales.

Ecuación de Euler: [u] $\boxed{x^2y''+axy'+by=h(x)}$, $x>0$.

Haciendo el cambio $x=e^s$ (o sea, $s=\ln x$): $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{ds}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x^2}\left[\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy}{ds}\right]$,

[u] pasa a ser la de coeficientes constantes: $\frac{d^2y}{ds^2}+(a-1)\frac{dy}{ds}+by=h(e^s)$,

de ecuación característica $\boxed{Q(\mu)\equiv\mu(\mu-1)+a\mu+b=0}$.

Sabemos resolver la segunda EDO. Deshaciendo el cambio, tenemos que la solución general de una ecuación de Euler **homogénea** es:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Si } \mu_1\neq\mu_2 \text{ reales, } y=c_1x^{\mu_1}+c_2x^{\mu_2}\\ \text{Si } \mu \text{ doble (real), } y=(c_1+c_2\ln x)\,x^{\mu}\\ \text{Si } \mu=p\pm qi\,,\ y=\left[c_1\cos(q\ln x)+c_2\,\mathrm{sen}(q\ln x)\right]x^p\end{array}}$$

(observemos que la ‘ecuación característica’ de una ecuación de Euler sería la que obtendríamos probando en la homogénea soluciones de la forma x^μ).

Ej 1. $\boxed{2xy''+y'=0}$, o sea $x^2y''+\frac{1}{2}xy'=0 \to \mu(\mu-1)+\frac{1}{2}\mu=0$.

Como $\mu=\frac{1}{2},0$, su solución general es $y=c_1x^{1/2}+c_2$ (para $x\geq 0$).

[Una solución válida también para $x\leq 0$ sería $y=c_1|x|^{1/2}+c_2$].

[Se podría resolver haciendo $y'=v$: $v'=-\frac{v}{2x} \to v=Cx^{-1/2}$, $y=Cx^{1/2}+K$].

Para la no homogénea se tiene siempre la **fórmula de variación de las constantes con** $f(x)=h(x)/x^2$. Y para la de coeficientes constantes en s , si $h(e^s)$ es del tipo adecuado, del método de **coeficientes indeterminados**.

Ej 2. Resolvamos $\boxed{x^2y''+xy'-y=2x}$. $\mu(\mu-1)+\mu-1=0$, $\mu=\pm 1\to$

solución general de la homogénea: $x_h=c_1x+c_2x^{-1}$ (válida aquí $\forall x\neq 0$).

$$|\mathbf{W}|(x)=\begin{vmatrix} x & x^{-1} \\ 1 & -x^{-2} \end{vmatrix}=-2x^{-1},\ f(x)=\tfrac{2}{x}\ \to$$

$$y_p=x^{-1}\int\frac{x2x^{-1}dx}{-2x^{-1}}-x\int\frac{x^{-1}2x^{-1}dx}{-2x^{-1}}=x\ln x-\tfrac{x}{2}\ \to$$

la solución de la no homogénea es $y=c_1x+\frac{c_2}{x}+x\ln x$ (metiendo el $-\frac{1}{2}$ en c_1).

La y_p se podría hallar tanteando en la $y''-y=e^s$ a la que lleva $x=e^s$. Sabemos que la y_p que debemos probar en ella es $y_p=Ase^s$, o lo que es lo mismo, podemos probar $y_p=Ax\ln x$ en la inicial:

$$y_p'=A[\ln x+1]\,,\ y_p''=\tfrac{A}{x}\ \to\ Ax+Ax=2x\ \to\ A=1\ \text{como antes.}$$

Volvamos a las soluciones por series. Suponemos en la sección que para [e] es $x=x_o$ **punto singular**, es decir, que a o b o ambas no son analíticas en él y no es aplicable lo visto en 2.1. Precisamente interesa conocer a menudo las soluciones cerca de sus puntos singulares. Sabremos decir algo de ellas en puntos ‘poco singulares’: los **singulares regulares** que definimos ahora.

Suponemos $x=0$ punto singular de [e] $y''+a(x)y'+b(x)y=0$. Para resolver en otro $x_o\neq 0$ singular, el cambio $s=x-x_o$ llevaría el problema a $s=0$.

Multiplicamos [e] por x^2 y llamamos $a^*(x)=xa(x)$, $b^*(x)=x^2b(x)$:

$$[\text{e}^*]\quad \boxed{x^2y''+x\,a^*(x)\,y'+b^*(x)\,y=0}\,.$$

$x=0$ es punto **singular regular** de [e*] si a^* y b^* son analíticas en $x=0$.

Ej 3. $\boxed{x(x-1)^2y''-xy'+(x-1)y=0}$, es decir, $y''-\frac{1}{(x-1)^2}y'+\frac{1}{x(x-1)}y=0$.

$x=0$ y $x=1$ son puntos singulares de la ella (los demás son regulares).

Como para [e*] $x^2y''-x\frac{x}{(x-1)^2}y'+\frac{x}{x-1}y=0$ son $a^*(x)=-\frac{x}{(x-1)^2}$ y $b^*(x)=\frac{x}{x-1}$ analíticas en $x=0$, este punto es singular regular.

Con $x-1=s$ obtenemos: $s^2(s+1)y''-(s+1)y'+sy=0$, $s^2y''-s\frac{1}{s}y'+\frac{s}{s+1}y=0$.

$-\frac{1}{s}$ no es analítica en 0 $\left(\frac{s}{s+1}\right.$ sí lo es$\left.\right)$. Así $x=1$ ($s=0$) es singular no regular.

[En torno a $x=1$ no sabremos resolver la ecuación por series (la teoría es complicada)].

Queremos resolver [e*] cerca de $x=0$ suponiendo a^* y b^* analíticas en él, o sea, que tienen desarrollo en serie si $|x|<R$ (mínimo de los radios de convergencia):

$$\boxed{a^*(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k^*x^k=a_0^*+a_1^*x+\cdots\ ,\quad b^*(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k^*x^k=b_0^*+b_1^*x+\cdots}\,.$$

[Normalmente será $a_0^*=a^*(0)$ y $b_0^*=b^*(0)$ salvo para funciones como $\frac{\operatorname{sen}x}{x}$].

[e*] se resolverá con el **método de Frobenius** del teorema de la sección. Intentemos intuir sus hipótesis y conclusiones. La [e*] más sencilla es la de Euler [$a^*(x)$ y $b^*(x)$ son 'series' de un solo término]. Es claro que no hay, en general, soluciones analíticas de [e*]. Como las hay de la forma x^r , se puede pensar que las de [e*] serán series que comienzann por términos x^r .

Probemos en [e*] la solución $y=x^r\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_kx^k=c_0x^r+c_1x^{r+1}+\cdots$ →

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)c_kx^{k+r}+\Big(\sum_{k=0}^{\infty}a_k^*x^k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)c_kx^{k+r}\Big)+\Big(\sum_{k=0}^{\infty}b_k^*x^k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+r}\Big)=0$$

El coeficiente de la potencia menor (x^r) dará: $\big[r(r-1)+a_0^*r+b_0^*\big]c_0=0$.

Si la serie ha de empezar por x^r, debe ser $c_0\neq0$. Los únicos r para los que pueden existir soluciones no triviales de la forma $x^r\sum$ son las raíces de:

$Q(r)\equiv r(r-1)+a_0^*\,r+b_0^*$, llamado **polinomio indicial** de [e*].

Esto coincide con Euler. Para ella, si $Q(r)$ tenía raíces distintas r_1 y r_2 , eran x^{r_1} y x^{r_2} dos soluciones independientes. Si la raíz era doble sólo había una de esa forma, y la segunda era la primera multiplicada por el $\ln x$. También es de esperar que en la solución general de [e*] aparezcan logaritmos.

Pero al resolver por series [e*] pueden aparecer problemas que no se daban en el caso particular de Euler, cuando r_1-r_2 es un entero positivo. Puede que en ese caso aparezca también un $\ln x$ como va a decir el teorema.

Podría Q tener raíces complejas, pero, por sencillez, las suponemos reales:

Teor

Supongamos que el polinomio indicial $Q(r)=r(r-1)+a_0^*r+b_0^*$ tiene raíces reales r_1 , r_2 con $r_1\geq r_2$. Entonces:

Siempre hay una solución de [e*] de la forma $y_1=x^{r_1}\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k$, $c_0\neq 0$.

La otra solución y_2 linealmente independiente es, según los casos:

a] Si r_1-r_2 no es cero ni entero positivo: $y_2=x^{r_2}\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k$, $b_0\neq 0$.

b] Si $r_1=r_2$, $y_2=x^{r_1+1}\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k+y_1\ln x$.

c] Si $r_1-r_2=1,2,3,\ldots$, $y_2=x^{r_2}\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k+dy_1\ln x$, $b_0\neq 0$, $d\in\mathbf{R}$.

Cada solución está definida al menos si $0<x<R$ y los coeficientes c_k , b_k y la constante d se pueden determinar sustituyendo cada una de las soluciones en la ecuación.

Se prueba que a partir de las soluciones anteriores se tienen otras válidas en $-R<x<0$ sin más que sustituir $\ln x$ por $\ln|x|$ y las expresiones del tipo x^r que preceden a las series por $|x|^r$. En el caso **c]** la constante d puede ser perfectamente 0 (como ocurre en las ecuaciones de Euler), con lo que, pese a todo, las dos soluciones independientes son de la forma $x^r\sum$.

El proceso de cálculo aquí es doble, y aún es más largo en los casos **b]** y **c]**.

Ej 4. $\boxed{2xy''+y'+xy=0}$, o sea, $x^2y''+x\frac{1}{2}y'+\frac{x^2}{2}y=0 \to a^*(x)=\frac{1}{2}\,,\ b^*(x)=\frac{x^2}{2}$.

a^* y b^* analíticas ($R=\infty$) $\Rightarrow x=0$ singular regular. Como $a_0^*=\frac{1}{2}$ y $b_0^*=0$,

el polinomio indicial es $r(r-1)+\frac{1}{2}r+0=r(r-\frac{1}{2}) \to r_1=\frac{1}{2}\,,\ r_2=0\,,\ r_1-r_2\notin\mathbf{N}$.

Las series solución linealmente independientes (una analítica y otra no) son:

$y_1=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+1/2},\ c_0\neq 0\,,\ \ y_2=\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_kx^k,\ b_0\neq 0$ (convergen $\forall x\in\mathbf{R}$, según el teorema).

$$y_1 \to \sum_{k=0}^{\infty}2(k+\tfrac{1}{2})(k-\tfrac{1}{2})c_kx^{k-1/2}+\sum_{k=0}^{\infty}(k+\tfrac{1}{2})c_kx^{k-1/2}+\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+3/2}=0 \to$$

[se derivan como las de potencias y las 3 series empiezan por $k=0$ al no irse términos al derivar]

$x^{-1/2}$: $\big[2(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}\big]c_0=0\cdot c_0=0\ \forall c_0$. $x^{1/2}$: $\big[2(\frac{3}{2})(\frac{1}{2})+\frac{3}{2}\big]c_1=0 \to c_1=0$.

$x^{k-1/2}$: $\big[2(k+\frac{1}{2})(k-\frac{1}{2})+(k+\frac{1}{2})\big]c_k+c_{k-2}=0 \to c_k=-\frac{1}{k(2k+1)}c_{k-2}\,,\ k=2,3,\ldots$

Por tanto: $c_3=c_5=\cdots=0\,,\ c_2=-\frac{1}{2\cdot 5}c_0\,,\ c_4=-\frac{1}{4\cdot 9}c_2=\frac{1}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 9}c_0\,,\ \ldots \to$

$$y_1=x^{1/2}\Big[1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2\cdot 4\cdots 2m\cdot 5\cdot 9\cdots(4m+1)}x^{2m}\Big]$$ (eligiendo, por ejemplo, $c_0=1$).

Para la otra solución: $\sum\limits_{k=0}^{\infty}2k(k-1)b_kx^{k-1}+\sum\limits_{k=0}^{\infty}kb_kx^{k-1}+\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_kx^{k+1}=0 \to$

x^0: $b_1=0$. x^1: $6b_2+b_0=0,\ b_2=-\frac{b_0}{6}$. x^{k-1}: $k(2k-1)b_k+b_{k-2}=0\,,\ k\geq 2 \to$

$b_3=b_5=\cdots=0\ ,\ b_4=-\frac{b_2}{4\cdot 7}=\frac{b_0}{2\cdot 4\cdot 3\cdot 7}\,,\ \ldots\,,\ y_2=1+\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2\cdot 4\cdots 2m\cdot 3\cdot 7\cdots(4m-1)}x^{2m}$.

Ej 5. $\boxed{x^2y''+(\frac{1}{4}-4x^2)y=0}$ $a^*(x)=0\,,\ b^*(x)=\frac{1}{4}-4x^2$ analíticas con $R=\infty$.

$r^2-r+\frac{1}{4}=0\,,\ r=\frac{1}{2}$ doble, $y_1=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+1/2}\to\sum\limits_{k=0}^{\infty}\big[k^2c_kx^{k+1/2}-4c_kx^{k+5/2}\big]=0\ \to$

$x^{1/2}:\ 0\cdot c_0=0\,,\ c_0$ cualquiera; $x^{3/2}:\ c_1=0\,;\ \ x^{k+1/2}:\ k^2c_k-4c_{k-2}=0\,;$

$c_k=\frac{4c_{k-2}}{k^2}$ regla de recurrencia $\to c_3=c_5=\cdots=0\,,\ c_2=c_0\,,\ c_4=\frac{4c_2}{16}=\frac{c_0}{4}\,,\ c_6=\frac{c_4}{9}=\frac{c_0}{36}\,,\ldots$

$$y_1=x^{1/2}\big[1+x^2+\tfrac{1}{4}x^4+\tfrac{1}{36}x^6+\cdots\big]\ \to\ y_1'=\tfrac{1}{2}x^{-1/2}+\tfrac{5}{2}x^{3/2}+\tfrac{9}{8}x^{7/2}+\cdots$$

Como es raíz doble, seguro que la otra solución contiene un logaritmo:

$$y_2=x^{3/2}\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k+y_1\ln x\ \to\ y_2'=\sum_{k=0}^{\infty}(k+\tfrac{3}{2})b_kx^{k+1/2}+\tfrac{1}{x}y_1+y_1'\ln x\,,$$

$$y_2''=\sum_{k=0}^{\infty}(k+\tfrac{3}{2})(k+\tfrac{1}{2})b_kx^{k-1/2}-\tfrac{1}{x^2}y_1+\tfrac{2}{x}y_1'+y_1''\ln x\ \to$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\big[(k+1)^2b_kx^{k+3/2}-4b_kx^{k+7/2}\big]-y_1+2xy_1'+\ln x\big[x^2y_1''+(\tfrac{1}{4}-4x^2)y_1\big]=0\,.$$

Lo que acompaña a $\ln x$ **siempre se anula** por ser y_1 solución.

Operamos como siempre, utilizando los desarrollos de y_1 e y_1' de arriba:

$\to\ x^{3/2}:\ b_0=0\,;\ \ x^{5/2}:\ 4b_1+4=0\,,\ b_1=-1\,;\ \ x^{7/2}:\ 9b_2-4b_0=0\,,\ b_2=0\,;$

$x^{9/2}:\ 16b_3-4b_1+2=0\,,\ b_3=-\frac{3}{8}\,;\ \ldots\ \ \to\ y_2=-x^{5/2}-\frac{3}{8}x^{9/2}+\cdots+y_1\ln x\,.$

[Desde que vimos la 1/2 doble, sabíamos mucho sobre sus soluciones. Que ninguna (salvo la trivial) era analítica. O que todas tienden a 0 cuando $x\to 0^+$, pues recordemos que $x^a\ln x\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow}0$, si $a>0$].

El ejemplo 5 muestra que es más largo cálcular y_2 en el caso **b]** del teorema que en el **a]**. Y también lo es en el **c]**. Para ver si hay logaritmos o no (si es o no $d\neq 0$) basta tener algunos términos de la y_1 .

Ej 6. $\boxed{xy''+2e^x y'=0}$. Se puede resolver sin series, pero usemos Frobenius:

$x=0$ singular regular $\left[a^*(x)=2e^x\,,\ b^*(x)\equiv 0 \text{ analíticas } \forall x\right]$. $r_1=0\,,\ r_2=-1\,.$

$y_1=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ se ve (¡a ojo!) que es $y_1\equiv 1$. La otra: $y_2=\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{k-1}+d\ln x \to$

$$y_2'=\sum_{k=0}^{\infty}(k-1)b_k x^{k-2}+\frac{d}{x}\,,\quad y_2''=\sum_{k=0}^{\infty}(k-1)(k-2)b_k x^{k-3}-\frac{d}{x^2}\ \to$$

$$\frac{2b_0}{x^2}+2b_3x+\cdots-\frac{d}{x}+\left[2+2x+x^2+\tfrac{1}{3}x^3+\cdots\right]\left[\frac{d}{x}-\frac{b_0}{x^2}+b_2+2b_3x+\cdots\right]=0\to$$

x^{-2}: $2b_0-2b_0=0\to b_0$ indeterminado como debía.

x^{-1}: $-d+2d-2b_0=0\ \to\ d=2b_0$ (aparecen, pues, logaritmos).

x^{0}: $2d-b_0+2b_2=0\ \to\ b_2=\frac{1}{2}b_0-d=-\frac{3}{2}b_0\,.$

x^{1}: $2b_3+d-\frac{1}{3}b_0+2b_2+4b_3=0\ \to\ b_3=\frac{2}{9}b_0\ \cdots$

$\to\ y_2=2\ln x+\frac{1}{x}-\frac{3}{2}x+\frac{2}{9}x^2+\cdots$ [No podemos dar el término general].

Resolvamos la ecuación ahora sin series: $y'=v\ \to\ v'=-\frac{2e^x}{x}v\ \to$

$$v=C\,e^{-\int 2x^{-1}e^x dx}=C\,e^{\int(-2/x-2-x-x^2/3+\cdots)dx}=C\,x^{-2}e^{-2x-x^2/2-x^3/9+\cdots}$$

$$=\frac{C}{x^2}\left[1+(-2x-\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{9}x^3-\cdots)+\tfrac{1}{2}(-2x-\tfrac{1}{2}x^2-\cdots)^2+\tfrac{1}{6}(-2x-\cdots)^3+\cdots\right]\to$$

$$y=K+C\int\left[\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+\frac{3}{2}-\frac{4x}{9}+\cdots\right]dx=K-C\left[2\ln x+\frac{1}{x}-\frac{3}{2}x+\frac{2}{9}x^2+\cdots\right].$$

En el caso **c]** con $d=0$ si se sustituye la y_2 en vez de la y_1, se pueden obtener ambas series de un tirón, pues al calcular la segunda vuelve a surgir la primera. Pero si fuera $d\neq 0$ sólo se llegaría así a la solución trivial $y=0$ y se debería empezar desde el principio, incluyendo el término con el logaritmo.

Ej 8. $\boxed{x^2y''+xy'+(x^2-\frac{1}{4})y=0}$ $x=0$ singular regular, con $r=\pm\frac{1}{2}$.

Frobenius nos da las soluciones $y_1=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+1/2}$, $y_2=\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_kx^{k-1/2}+dy_1\ln x$.

Probemos y_2 apostando por $d=0$ [esta ecuación será la de Bessel con $p=1/2$]:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big[(k-\tfrac{1}{2})(k-\tfrac{3}{2})b_kx^{k-1/2}+(k-\tfrac{1}{2})b_kx^{k-1/2}-\tfrac{1}{4}b_kx^{k-1/2}+b_kx^{k+3/2}\Big]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\Big[k(k-1)b_kx^{k-1/2}+b_kx^{k+3/2}\Big]=0\ \to$$

$x^{-1/2}$: $0b_0=0$, $\forall b_0$. $x^{1/2}$: $0b_1=0$, b_1 también indeterminado.

$x^{3/2}$: $b_2=-\frac{1}{2}b_0$. $x^{5/2}$: $b_3=-\frac{1}{6}b_1$. $b_k=-\frac{b_{k-2}}{k(k-1)}=\frac{b_{k-4}}{k(k-1)(k-2)(k-3)}=\cdots$

$\boxed{y=x^{-1/2}\Big[b_0\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!}+b_1\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!}\Big]}$, o sea, $\boxed{y=b_0\frac{\cos x}{\sqrt{x}}+b_1\frac{\operatorname{sen}x}{\sqrt{x}}}$.

[Es fácil de comprobar con el cambio $y=x^{-1/2}u$ que lleva a $u''+u=0$].

La ecuación de **Legendre** es [L] $\boxed{(1-x^2)y''-2xy'+py=0}$, $p\geq 0$.

[En muchos textos se escribe esta ecuación poniendo $p(p+1)$ en vez de p].

$a(x)=\frac{-2x}{1-x^2}$, $b(x)=\frac{p}{1-x^2}$ analíticas en $|x|<1 \Rightarrow$ hay series solución en $x=0$.

$$y=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \to \sum_{k=2}^{\infty}\left[k(k-1)c_k x^{k-2}-k(k-1)c_k x^k\right]-\sum_{k=1}^{\infty}2kc_k x^k+\sum_{k=0}^{\infty}pc_k x^k=0 \to$$

$$x^0:\ 2\cdot 1\cdot c_2+p\cdot c_0=0,\ c_2=-\tfrac{p}{2\cdot 1}c_0\ ;\quad x^1:\ 3\cdot 2\cdot c_3+(p-2)\cdot c_1=0,\ c_3=-\tfrac{p-2}{3\cdot 2}c_1\ ;\ \ldots$$

$$x^k:\ (k+2)(k+1)c_{k+2}+[p-k(k+1)]c_k=0 \to c_{k+2}=-\frac{p-k(k+1)}{(k+2)(k+1)}c_k\ ,\ k=0,1,\ldots$$

$$\to c_4=-\tfrac{p-6}{4\cdot 3}c_2=\tfrac{p(p-6)}{4!}c_0\ ;\quad c_5=-\tfrac{p-12}{5\cdot 4}c_3=\tfrac{(p-2)(p-12)}{5!}c_1\ ,\ \ldots \to$$

$$y=c_0\left[1-\tfrac{p}{2}x^2+\tfrac{p(p-6)}{4!}x^4+\cdots\right]+c_1\left[x-\tfrac{p-2}{6}x^3+\tfrac{(p-2)(p-12)}{5!}x^5+\cdots\right]=c_0y_1+c_1y_2\ .$$

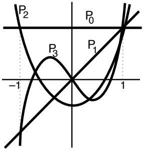
Si $p=n(n+1)$, $n\in\mathbf{N}$, y_1 (n par) o y_2 (n impar) es un polinomio de grado n :

$$p=0 \to y_1=1\ ,\quad p=6 \to y_1=1-3x^2\ ,\quad p=20 \to y_1=1-10x^2+\tfrac{35}{3}x^4\ ,\ \ldots$$

$$p=2 \to y_2=x\ ,\quad p=12 \to y_2=x-\tfrac{5}{3}x^3\ ,\quad p=30 \to y_2=x-\tfrac{14}{3}x^3+\tfrac{21}{5}x^5\ ,\ \ldots$$

Se llama **polinomio de Legendre de grado** n al P_n solución de [L] con $p=n(n+1)$ que cumple $P_n(1)=1$:

$$\boxed{\begin{array}{l} P_0=1\ ,\quad P_1=x\ ,\quad P_2=\tfrac{3}{2}x^2-\tfrac{1}{2}\ ,\quad P_3=\tfrac{5}{2}x^3-\tfrac{3}{2}x\ , \\ P_4=\tfrac{35}{8}x^4-\tfrac{15}{4}x^2+\tfrac{3}{8}\ ,\ P_5=\tfrac{63}{8}x^5-\tfrac{35}{4}x^3+\tfrac{15}{8}x\ ,\ \ldots \end{array}}$$



Los P_{2m} tienen simetría par y los P_{2m+1} impar. P_{2m+1} y P'_{2m} se anulan en 0.
P_n tiene n ceros reales, todos en $(-1,1)$. $P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ fórmula de **Rodrigues**
Los P_n son **ortogonales**: $\int_{-1}^{1} P_n P_m\,dx=0$, si $m\neq n$; $\int_{-1}^{1} P_n^2\,dx=\frac{2}{2n+1}$.
P_n son las únicas soluciones de [L] **acotadas a la vez en** $x=1$ **y** $x=-1$.

Para intentar comprobar lo último resolvemos en $x=1$, haciendo $s=x-1$:
$[L_1]$ $s(s+2)y''+2(s+1)y'-py=0$, $a^*(s)=\frac{2(s+1)}{s+2}$, $b^*(s)=-\frac{ps}{s+2}$ analíticas para $|s|<2$
$s=0$ es singular regular, y es $r=0$ doble $\forall p$. Por tanto sus soluciones son:

$$y_1=\sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k \quad \text{e} \quad y_2=|s|\sum_{k=0}^{\infty} b_k s^k+y_1\ln|s|\,,\quad c_0=1\,,$$

y las series convergen al menos si $|s|<2$. Podemos ya afirmar que y_1 está acotada $\forall p$ en $s=0$ ($x=1$), mientras que y_2 no lo está ($\to-\infty$ si $s\to 0$).
Calculemos y_1 y comprobemos que si $p=n(n+1)$ salen los P_n. Debe ser:

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left[k(k-1)c_k s^k+2k(k-1)c_k s^{k-1}\right]+\sum_{k=1}^{\infty}\left[2kc_k s^k+2kc_k s^{k-1}\right]-\sum_{k=0}^{\infty} pc_k s^k=0\ \to$$

$$c_k=\frac{p-k(k-1)}{2k^2}\,c_{k-1}\,,\ k=1,2,\ldots\to\ y_1(s)=1+\frac{p}{2}s+\frac{p[p-2]}{16}s^2+\cdots$$

Si $p=n(n+1)$, la recurrencia dice que c_{n+1} y los siguientes se anulan:
$p=0\to y_1=1$; $p=2\to y_1=1+s=x$; $p=6\to y_1=1+3s+\frac{6\cdot 4}{16}s^2=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$; ...
Faltaría probar (es difícil) que si $p\neq n(n+1)$ la y_1 no está acotada cuando $s\to-2$ ($x\to-1$).

También ligada a problemas físicos: [H] $\boxed{y''-2xy'+2py=0}$.

Tiene solución analítica convergente en todo **R**. Resolvemos: $y=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \rightarrow$

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2}-\sum_{k=1}^{\infty} 2kc_k x^k+\sum_{k=0}^{\infty} 2pc_k x^k=0 \rightarrow c_k=2\frac{k-2-p}{k(k-1)}c_{k-2}\,,\ k=2,3,\dots$$

$$\rightarrow y=c_1\Big[1+\sum_{n=1}^{\infty} 2^n\frac{(-p)(2-p)\cdots(2n-2-p)}{(2n)!}x^{2n}\Big]+c_2\Big[x+\sum_{n=1}^{\infty} 2^n\frac{(1-p)(3-p)\cdots(2n-1-p)}{(2n+1)!}x^{2n+1}\Big]$$

Como en Legendre, [H] tiene solución polinómica si $p\in\mathbf{N}$. Si $p=2m$, la y_1 pasa a ser un P_{2m}, y si $p=2m+1$ es y_2 la que se convierte en un P_{2m+1}:

$$p=0 \rightarrow y_1=1\,;\ p=1 \rightarrow y_2=x\,;\ p=2 \rightarrow y_1=1-2x^2\,;\ p=3 \rightarrow y_2=x-\tfrac{2}{3}x^3\,;\ \dots$$

Los **polinomios de Hermite** $H_n(x)$ son las soluciones polinómicas tales que los términos con potencias más altas de x son de la forma $2^n x^n$, es decir:

$$\boxed{H_0=1\,;\ \ \mathrm{H}_1=2x\,;\ \ H_2=4x^2-2\,;\ \ H_3=8x^3-12x\,;\ \dots}$$

[En los apuntes se habla de su **función generatriz** y de otra fórmula de **Rodrigues**].

En cuántica la que aparece es $u''+(2p+1-x^2)u=0$. Haciendo $u=ye^{-x^2/2}$ en ella se tiene [H]. Sus **únicas soluciones que** $\rightarrow 0$ **si** $|x|\rightarrow\infty$ y que interesan físicamente son las $u_n(x)=e^{-x^2/2}H_n(x)$, llamadas **funciones de Hermite** de orden n. Como los P_n, se puede ver que también las u_n son **ortogonales**, ahora en $(-\infty,\infty)$ [Lo comprobamos abajo exclusivamente cuando $n=0,1$]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_n u_m\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} H_n H_m e^{-x^2}dx=0\,,\ \text{si } m\neq n\,;\quad \int_{-\infty}^{\infty} u_n^2\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} H_n^2 e^{-x^2}dx=2^n n!\sqrt{\pi}\,.$$

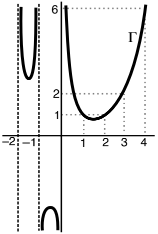
$$\int_{-\infty}^{\infty} u_0u_1=\int_{-\infty}^{\infty} 2xe^{-x^2}=0\,,\ \int_{-\infty}^{\infty} u_0^2=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}=\sqrt{\pi}\,,\ \int_{-\infty}^{\infty} u_1^2=-2xe^{-x^2}\Big|_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty} 2e^{-x^2}=2\sqrt{\pi}\,].$$

Función gamma y ecuación de **Bessel**

Para expresar compactamente las soluciones de la última ecuación de interés físico (la de Bessel) utilizaremos las propiedades de la **función gamma** (que generaliza el factorial para números no enteros) definida por la impropia:

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx \text{ si } s>0\,,$$

extendida a $s<0$ mediante $\Gamma(s)=\frac{\Gamma(s+n)}{(s+n-1)\cdots(s+1)s}$ si $-n<s<-n+1\,,\ n\in\mathbf{N}$.



Se cumplen para la Γ las siguientes igualdades:

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}dx=1\,;\ \Gamma(\tfrac{1}{2})=2\int_0^\infty e^{-u^2}du=\sqrt{\pi}\,;\ \Gamma(s+1)=-e^{-x}x^s\Big|_0^\infty+s\Gamma(s)=s\Gamma(s)$$

$$\to\ \Gamma(s+n)=(s+n-1)\cdots(s+1)\,s\,\Gamma(s)\ \to\ \Gamma(n+1)=n!\,,\ n\in N$$

La ecuación de **Bessel** es [B] $\boxed{x^2y''+xy'+[x^2-p^2]y=0}$, $p\geq 0$.

$x=0$ es singular regular con $r^2-p^2=0\,,\ r_1=p\,,\ r_2=-p$. Entonces

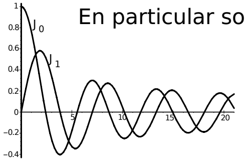
$$y_1=x^p\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k\,,\ x>0\,,\quad (\text{acotada en } x=0\ \forall p\,)$$

es una solución con una serie que converge en todo **R**. Llevándola a [B]:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big[k(2p+k)c_kx^{p+k}+c_kx^{p+k+2}\Big]=0\,;\ c_k=-\frac{c_{k-2}}{k(2p+k)}\,,\ k=2,3,\ldots\,,\ c_1=0=c_3=\cdots=0$$

$$c_2=-\frac{c_0}{2^2(p+1)}\,;\ c_4=\frac{c_0}{2^4 2(p+1)(p+2)}\,;\ \ldots\ \to\ y_1=c_0\,x^p\Big[1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}m!(p+1)\cdots(p+m)}\Big]$$

Eligiendo $c_0=\frac{1}{2^p\Gamma(p+1)}$, $\boxed{J_p(x)\equiv\Big[\frac{x}{2}\Big]^p\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(p+m+1)}\Big[\frac{x}{2}\Big]^{2m}}$ **[función de Bessel de primera especie y orden** p **]**



En particular son: $J_0(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m!)^2}\big[\frac{x}{2}\big]^{2m}$, $J_1(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(m+1)!}\big[\frac{x}{2}\big]^{2m+1}$.

Todas oscilan y $J_p\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\big[x-(2p+1)\frac{\pi}{4}\big]$ si x grande.

Cada J_p tiene infinitos ceros en $(0,\infty)$:

los de J_0 son: 2.4048, 5.5201, 8.6532, . . . ,

y los de J_1 : 3.8317, 7.0156, 10.1735, ...

Frobenius, si $r_1-r_2=2p\neq 0,1,\dots$, da la otra solución (no acotada en $x=0$):

$$y_2=x^{-p}\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k\ ,\ x>0\ \Big(\text{llevándola a [B] se tiene } J_{-p}(x)\equiv\big[\tfrac{x}{2}\big]^{-p}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(p+m+1)}\big[\tfrac{x}{2}\big]^{2m}\Big).$$

Si $p\notin\mathbf{N}$, pero $2p\in\mathbf{N}$ $\big(p=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\dots\big)$, podría y_2 contener un $\ln x$ pero no es así (caso **c]** de Frobenius con $d=0$). De hecho, haciendo $p=\frac{1}{2}$ en $J_{\pm p}$ se tiene:

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{x}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{2^{2m+1}m!(m+\frac{1}{2})\cdots\frac{1}{2}\,\Gamma(\frac{1}{2})}=\boxed{\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\mathrm{sen}\,x}\ ,\quad J_{-\frac{1}{2}}(x)=\cdots=\boxed{\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x}\ .$$

Se prueba $J_{p+1}=\frac{2p}{x}J_p-J_{p-1}\Rightarrow$ las $J_{\frac{2n+1}{2}}$, $n\in\mathbf{Z}$, son **funciones elementales**.

Para $p=n\in\mathbf{N}$ hay que hallar las y_2 de Frobenius (y se obtiene un $\ln x$). Por ejemplo, para $p=0$ (que seguro contiene logaritmos) :

$$y_2=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(m!)^2}\Big[1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\Big]\Big[\frac{x}{2}\Big]^{2m}+J_0(x)\ln x\equiv K_0(x)$$ **[función de Bessel de 2^a especie y orden** 0 **]**

Nos será útil en el futuro conocer estas propiedades de las derivadas:

$$\frac{d}{dx}\big[x^pJ_p(x)\big]=x^pJ_{p-1}(x)\ ,\quad \frac{d}{dx}\big[x^{-p}J_p(x)\big]=-x^{-p}J_{p+1}(x)\ \Big(\text{En particular, } \begin{matrix}[xJ_1]'=J_0\\ [J_0]'=-J_1\end{matrix}\Big).$$

Nos ocupamos de las soluciones para grandes x. Pocas EDOs se resuelven integrando. Y las series solución (salvo que se identifiquen con funciones elementales) no dan esa información, ni convergiendo $\forall x$. Para ver qué sucede cuando $x\to\infty$, lo natural es hacer el **cambio de variable** $x=1/s$ y estudiar sus soluciones cuando $s\to 0^+$, que será fácil si $s=0$ (el **punto del infinito** de la ecuación inicial) es regular o singular regular para la nueva.

A diferencia del cambio $s=x-x_o$ que no cambia las derivadas, hacer $x=1/s$ exige la regla de la cadena. Usando puntos para las derivadas respecto a s:

$$x=\frac{1}{s}\to y'=\dot{y}\,\frac{ds}{dx}=-\frac{1}{x^2}\,\dot{y}\;,\;y''=\frac{1}{x^4}\,\ddot{y}+\frac{2}{x^3}\,\dot{y}\to\boxed{y'=-s^2\dot{y}\;,\;y''=s^4\ddot{y}+2s^3\dot{y}}\,.$$

Ej 1. $\boxed{(1+x^2)y''+xy'-y=0}$ Veamos su comportamiento para x grande:

$$x=\frac{1}{s}\to(1+\tfrac{1}{s^2})s^4\ddot{y}+(1+\tfrac{1}{s^2})2s^3\dot{y}-\frac{s^2}{s}\dot{y}-y=s^2(1+s^2)\ddot{y}+s(1+2s^2)\dot{y}-y=0\,.$$

Para esta ecuación $s=0$ es singular regular, con $r=\pm 1$. Sus soluciones son:

$$y_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_k s^{k+1}=c_0 s+c_1 s^2+\cdots\,,\;c_0\neq 0\,;\quad y_2=\sum_{k=0}^{\infty}b_k s^{k-1}+dy_1\ln s\,,\;b_0\neq 0\,.$$

Si $s\to 0^+$, $y_1\to 0$, mientras que $y_2\to\infty$ (si $b_0>0$, sea $d=0$ ó $d\neq 0$). Luego sabemos que, si $x\to\infty$, unas soluciones tienden a 0 y otras tienden a ∞. Como $y_1=x$ es solución que salta a la vista, podemos resolver y comprobar:

$$y_2=x\int x^{-2}e^{-\int a\,dx}dx=x\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}=-\sqrt{1+x^2}\to y=c_1x+c_2\sqrt{1+x^2}\,.$$

Hay soluciones que claramente $\to\infty$ y las $C(x-\sqrt{1+x^2})=\dfrac{-C}{x+\sqrt{1+x^2}}\xrightarrow[x\to\infty]{}0$.

Para Hermite y Bessel este camino parecería adecuado para estudiar sus soluciones para x gordo, pero, por desgracia, $s=0$ es **singular no regular** en ambos casos. Aunque para **Legendre** lo interesante sucede en $[-1,1]$, vamos a analizar su punto del infinito. En 2.3 obtuvimos sus series solución en $x=0$ [hablan de $|x|<1$] y en torno a $x=1$ [hablan de $x\in(-1,3)$].

$$[\mathrm{L}]\ (1-x^2)y''-2xy'+py=0 \overset{x=1/s}{\longrightarrow} [\mathrm{L}_\infty]\ s^2(s^2-1)\ddot{y}+2s^3\dot{y}+py=0\ .$$

Para $[\mathrm{L}_\infty]$ es $s=0$ singular regular, con $a^*(s)=2s^2/(s^2-1)$, $b^*(s)=p/(s^2-1)$ analíticas en $|s|<1$. Las series solución de $[\mathrm{L}_\infty]$ convergerán al menos en ese intervalo y de ellas podremos extraer información, por tanto, sobre las soluciones de [L] para $|x|>1$. Como el polinomio indicial de $[\mathrm{L}_\infty]$ tiene para todo $p\geq 0$ una raíz $r_1=\frac{1}{2}\big[1+\sqrt{1+4p}\,\big]>0$ deducimos, por ejemplo, que siempre hay soluciones de [L] que tienden a 0 para $x\to\infty$.

$$\Big[\text{Pues } y_1(s)=s^{r_1}\sum_{k=0}^{\infty}c_k s^k\to 0 \text{ si } s\to 0^+ \text{, o sea, } y_1(x)=x^{-r_1}\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^{-k}\xrightarrow[x\to\infty]{} 0\ \Big].$$

Resolvamos por series $[\mathrm{L}_\infty]$ si $p=0$ (único p para el que $s=0$ es regular):

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}c_k s^k \to c_k=\frac{k-2}{k}c_{k-2}\ ,\ k=2,3,\dots$$

$$\to\ y=c_0+c_1\big[s+\tfrac{1}{3}s^3+\tfrac{1}{5}s^5+\cdots\big]=c_0+c_1\big[x^{-1}+\tfrac{1}{3}x^{-3}+\tfrac{1}{5}x^{-5}+\cdots\big],$$

serie (no de potencias) que da las soluciones para $|x|>1$ (donde converge).

O bien: $(1-x^2)v'=-2xv$, $v=\frac{c_1}{1-x^2}$, $y=c_0+c_1\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|=c_0+c_1\ln\left|\frac{1+s}{1-s}\right|$, $x,s\neq\pm 1$.