Un problema de valores iniciales para una EDO de orden 2 con coeficientes continuos tiene solución única. Las cosas cambian si imponemos las condiciones en los extremos de un intervalo $[a,b]$. Los problemas de contorno pueden tener infinitas soluciones como:

$$\begin{cases} y''(x)+y(x)=0 \\ y(0)=0,\ y(\pi)=0 \end{cases} \;\rightarrow\; y=C\operatorname{sen}x \text{, con } C \text{ arbitraria.}$$

Aparecerá un parámetro λ al utilizar la **separación de variables** del capítulo 4. Convendrá escribir la ecuación de la siguiente forma:

$$(\mathrm{P})\begin{cases} (py')'-qy+\lambda r\,y=0 \\ \alpha y(a)-\alpha' y'(a)=\beta y(b)+\beta' y'(b)=0 \end{cases}$$

problema de Sturm-Liouville separado

Nuestro objetivo será **hallar los valores de λ para los que hay soluciones no triviales** [**autovalores** de (P)] y esas **soluciones no triviales** correspondientes a cada λ [**autofunciones** de (P)].

Tras varios ejemplos para $y''+\lambda y=0$ (la más habitual separando variables) veremos qué (P) con p,q,r buenas tiene las mismas propiedades. Hay una sucesión infinita de autovalores λ_n y las autofunciones para λ distintos son **ortogonales** entre sí. Se verá también algo de los problemas **periódicos** y de los **singulares**.

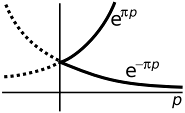
Después veremos que cualquier función f que sea C^1 a trozos se puede escribir como una **serie de autofunciones** de un problema de Sturm-Liouville, lo que será muy útil en la resolución de EDPs. En particular desarrollaremos en variadas series Fourier en **senos** y en **cosenos** como estas dos:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \ , \quad f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} \ .$$

Separando variables en Laplace aparecerán además problemas de contorno con la ecuación o algún dato de contorno no homogéneos. Por eso, estudiaremos problemas de ese tipo. Para ellos, ni $y=0$ es solución, ni lo son los múltiplos de una solución dada. La existencia de soluciones dependerá de si existen o no soluciones no triviales del problema homogéneo. Tendrán solución única en el último caso, e infinitas o ninguno si el homogéneo tiene infinitas.

La notación en todo este capítulo será $y(x)$, pero en separación de variables las funciones de nuestros problemas de contorno serán $X(x)$, $Y(y)$, $R(r)$, $\Theta(\theta)$, ...

Ej 1. $\boxed{(\mathrm{P}_1)\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(0)=0,\ y(\pi)=0\end{cases}}$ $\mu^2+\lambda=0 \to \mu=\pm\sqrt{-\lambda}$. Según λ:



Si $\lambda<0$, $y=c_1\,\mathrm{e}^{px}+c_2\,\mathrm{e}^{-px}$, con $p=\sqrt{-\lambda}>0$.

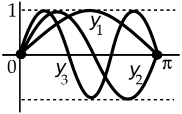
$$\begin{array}{ll} y(0)=c_1+c_2=0 & \to c_2=-c_1 \searrow \\ y(\pi)=c_1\,\mathrm{e}^{\pi p}+c_2\,\mathrm{e}^{-\pi p}=0 & \quad c_1[\mathrm{e}^{\pi p}-\mathrm{e}^{-\pi p}]=0 \end{array}$$

$\to c_1=c_2=0$ $\left(\mathrm{e}^{\pi p}\neq\mathrm{e}^{-\pi p}\text{ si } p>0\right)$. Ningún $\lambda<0$ es autovalor.

Si $\lambda=0$, $y=c_1+c_2x \to \begin{array}{l} c_1=0 \\ c_1+c_2\pi=0 \end{array}$, $y\equiv 0$. $\lambda=0$ tampoco lo es.

Y para $\lambda>0$ es $y=c_1\cos wx+c_2\,\mathrm{sen}\,wx$, con $w=\sqrt{\lambda}>0$ $\to$

$\begin{array}{l} y(0)=c_1=0 \downarrow \\ y(\pi)=c_2\,\mathrm{sen}\,w\pi=0 \end{array}$. Para tener solución no trivial debe ser $c_2\neq 0$.



Para ello, $w\pi=\pi\sqrt{\lambda}=n\pi \to \lambda_n=n^2$, $n=1,2,\ldots$

Para ellos hay soluciones $y_n=c_2\,\mathrm{sen}\,nx\equiv\{\mathrm{sen}\,nx\}$.

$$\int_0^\pi \mathrm{sen}\,nx\,\mathrm{sen}\,mx\,dx \overset{m\neq n}{=} \frac{1}{2}\Big[\frac{\mathrm{sen}(n-m)x}{n-m}-\frac{\mathrm{sen}(n+m)x}{n+m}\Big]_0^\pi=0.$$

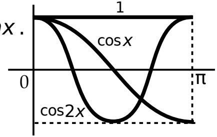
(P_1) tiene una **sucesión infinita de autovalores** $\lambda_n=n^2$, $n=1,2,\ldots$
Las **autofunciones** $y_n=\{\mathrm{sen}\,nx\}$ son un **espacio de dimensión** 1.
La n**-sima autofunción posee** $n-1$ **ceros en el intervalo** $(0,\pi)$.
y_n distintas son **ortogonales** $\left[\text{para el producto escalar } \langle u,v\rangle=\int_0^\pi u\,v\,dx\right]$.

Ej 2. $\boxed{(\mathrm{P}_2)\ \begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y'(0)=0,\ y'(\pi)=0 \end{cases}}$ Imponemos estas nuevas condiciones:

$$\lambda<0 \to \left.\begin{matrix} y'(0)=p[c_1-c_2]=0 \\ y'(\pi)=p[c_1\,e^{\pi p}-c_2\,e^{-\pi p}]=0 \end{matrix}\right\} \to c_2=c_1\,,\ c_1[e^{\pi p}-e^{-\pi p}]=0 \to y\equiv 0\,.$$

$$\lambda=0 \to \left.\begin{matrix} y'(0)=c_2=0 \\ y'(\pi)=c_2=0 \end{matrix}\right\} \to \lambda=0 \text{ autovalor con autofunción } \ y_0=c_1=\{1\}\,.$$

$$\lambda>0 \to \left.\begin{matrix} y'(0)=wc_2=0 \downarrow \\ y'(\pi)=-wc_1 \operatorname{sen} w\pi=0 \end{matrix}\right\} \to \lambda_n=n^2,\ y_n=c_1\cos nx\,.$$



Los $\lambda_n=n^2$ y autofunciones $y_n=\{\cos nx\}$, $n=0,1,\dots$
(se suelen escribir así, poniendo $\{1\}$ como el caso particular $\{\cos 0\}$)
tienen las mismas propiedades del ejemplo 1. La autofunción que ocupa el lugar n se vuelve a anular $n-1$ veces y sigue habiendo ortogonalidad:

$$\int_0^\pi \cos nx\,\cos mx\,dx=\int_0^\pi \frac{\cos(n-m)x+\cos(n+m)x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}(n-m)x}{n-m}+\frac{\operatorname{sen}(n+m)x}{n+m}\right]_0^\pi=0\,.$$

Ej 3. $\boxed{(\mathrm{P}_3)\ \begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y'(0)=0,\, y(1)=0 \end{cases}}$ Vuelve a tener las mismas propiedades.
Se comprueba (ver apuntes) que no hay $\lambda\le 0$.

$\lambda>0$: $y=c_1\cos wx+c_2 \operatorname{sen} wx$. $y'(0)=0 \to c_2=0 \to y(1)=c_1\cos w=0$

$$\to w_n=\frac{2n-1}{2}\pi,\ \lambda_n=\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4},\ y_n=\left\{\cos\frac{2n-1}{2}\pi x\right\},\ n=1,2,\dots$$

Sea $y''+a(x)y'+b(x)y+\lambda c(x)y=0$, con $a,b,c\in C$, $c(x)>0$ en $[a,b]$.
La reescribimos en forma '**autoadjunta**' o **Sturm-Liouville**'.
Multiplicando por $e^{\int a}$ y agrupando los dos primeros sumandos

$$\big[e^{\int a}y'\big]'+be^{\int a}y+\lambda ce^{\int a}y\equiv\big[py'\big]'-qy+\lambda ry=0\,,\ p\in C^1,\, q,r\in C\,,\, p,r>0\,.$$

Se llama **problema de Sturm-Liouville separado regular** a:

$$(\mathrm{P_s})\ \begin{cases}[py']'-qy+\lambda r\,y=0\\ \alpha y(a)-\alpha' y'(a)=0\,,\ \beta y(b)+\beta' y'(b)=0\ \ \text{(condiciones separadas)}\end{cases}$$

donde $p\in C^1$, $q,r\in C$, $p,r>0$ en $[a,b]$, $|\alpha|+|\alpha'|\,,\ |\beta|+|\beta'|\neq 0$.

Los ejemplos vistos eran $(\mathrm{P_s})$. Este teorema generaliza sus propiedades:

T. Los autovalores son una sucesión $\lambda_1<\lambda_2<\cdots$ que tiende a ∞.
Las $\{y_n\}$ son un espacio vectorial de dimensión 1 para cada n y cada y_n posee exactamente $n-1$ ceros en el intervalo (a,b).
Las autofunciones asociadas a λ_n diferentes son ortogonales en $[a,b]$ respecto al peso r, es decir:

$$\langle y_n,y_m\rangle=0\,,\ \text{si}\ n\neq m\,,\ \ \text{siendo}\ \langle u,v\rangle\equiv\int_a^b r\,u\,v\,dx.$$

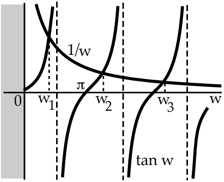
$\alpha\alpha',\,\beta\beta'\geq 0$, $q(x)\geq 0$ en $[a,b]$ $\Rightarrow$ todos los autovalores $\lambda_n\geq 0$.
En particular, para $y(a)=y(b)=0$ $[\,\alpha'=\beta'=0\,]$ todos los $\lambda_n>0$.

Ej 4. $\boxed{(\mathrm{P}_4)\ \begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y'(0)=y'(1)+y(1)=0 \end{cases}}$ Como $\alpha\alpha'=0$, $\beta\beta'>0$, $q\equiv 0$, miramos sólo los $\lambda\geq 0$.

$\lambda=0$: $y=c_1+c_2x$, $\begin{array}{l} y'(0)=c_2=0 \\ y'(1)+y(1)=c_1+2c_2=0 \end{array}$ $\to y\equiv 0$. No autovalor.

$\lambda>0$: $y=c_1\cos wx+c_2\,\mathrm{sen}\,wx$. $y'(0)=wc_2=0$

$\to y'(1)+y(1)=c_1[\cos w-w\,\mathrm{sen}\,w]=0$.



No es posible dar exactamente los λ_n, pero infinitos w_n cumplirán $\tan w_n=\frac{1}{w_n}$ (anulando el corchete) y se podrán hallar aproximadamente.

La y_n para cada $\lambda_n=w_n^2$ será $\{\cos w_nx\}$.

Estas y_n serán ortogonales.

[Respecto al peso $r=1$, puesto que la ecuación $[y']'+\lambda y=0$ ya está en forma autoadjunta].

[La mayoría de los problemas de S-L no son resolubles, pues pocas EDOs lineales de segundo orden lo son elementalmente (las de coeficientes constantes y pocas más), y aunque lo sean pueden darse situaciones similares a las de este ejemplo].

[Para analizar la existencia de autovalores negativos en este tipo de problemas (aquí fue innecesario) se buscan tangentes hiperbólicas en vez de tangentes].

Ej 5. $\boxed{(P_5)\left\{\begin{array}{l} y''-2y'+\lambda y=0 \\ y'(0)=y'(1)=0 \end{array}\right.}$ $\begin{array}{c}\mu^2-2\mu+\lambda=0, \\ \mu=1\pm\sqrt{1-\lambda}.\end{array}$ $\left[e^{-2x}y'\right]'+\lambda e^{-2x}y=0$.

Sabemos que $\lambda\geq 0$, pero debemos mirar $\lambda <,=,> 1$:

$$\lambda<1: \quad \begin{array}{c} y=c_1\,e^{(1+p)x}+c_2\,e^{(1-p)x},\ p=\sqrt{1-\lambda} \\ y'=c_1(1+p)\,e^{(1+p)x}+c_2(1-p)\,e^{(1-p)x}\end{array} \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} c_1[1+p]+c_2[1-p]=0 \\ c_1[1+p]e^{1+p}+c_2[1-p]e^{1-p}=0 \end{array} \rightarrow c_2(1-p)e[e^{-p}-e^{p}]=0 \rightarrow \begin{array}{c} p=1\ (\lambda=0) \\ y_0=\{1\}. \end{array}$$

$$\lambda=1: \quad \begin{array}{c} y=[c_1+c_2x]\,e^{x} \\ y'=[c_1+c_2+c_2x]\,e^{x} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} c_1+c_2=0 \\ c_1+2c_2=0 \end{array} \rightarrow y\equiv 0 \text{ . No autovalor.}$$

$$\lambda>1: \quad \begin{array}{c} y=[c_1\cos wx+c_2\operatorname{sen} wx]\,e^{x},\ w=\sqrt{\lambda-1} \\ y'=\big[(c_1+c_2w)\cos wx+(c_2-c_1w)\operatorname{sen} wx\big]e^{x} \end{array} \rightarrow c_1+c_2w=0$$

$$\rightarrow y'(1)=c_2\,e(1+w^2)\operatorname{sen} w=0 \ \rightarrow\ w=n\pi,\ n=1,2,\dots \ \rightarrow$$

$$\lambda_n=1+n^2\pi^2,\ \ y_n=\left\{e^{x}[\operatorname{sen} n\pi x-n\pi\cos n\pi x]\right\},\ \ n=1,2,\dots$$

Las autofunciones serán ortogonales respecto al peso $r(x)=e^{-2x}$:

$$\int_0^1 e^{-x}[\operatorname{sen} n\pi x-n\pi\cos n\pi x]\,dx=0$$

$$\int_0^1[\operatorname{sen} n\pi x-n\pi\cos n\pi x][\operatorname{sen} m\pi x-m\pi\cos m\pi x]\,dx=0 \ \ (m\neq n)$$

Separando variables aparece también este problema no separado, pues se mezclan los valores en los dos extremos del intervalo.

Ej 7. $\boxed{(\mathrm{P}_7)\ \begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(-\pi)=y(\pi),\, y'(-\pi)=y'(\pi) \end{cases}}$ [Esto equivalen a pedir que y sea 2π-periódica].

$\lambda<0 \rightarrow \begin{matrix} c_1[e^{\pi p}-e^{-\pi p}]-c_2[e^{\pi p}-e^{-\pi p}]=0 \\ c_1[e^{\pi p}-e^{-\pi p}]+c_2[e^{\pi p}-e^{-\pi p}]=0 \end{matrix}, \begin{vmatrix} e^{\pi p}-e^{-\pi p} & e^{-\pi p}-e^{\pi p} \\ e^{\pi p}-e^{-\pi p} & e^{\pi p}-e^{-\pi p} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$

el sistema tiene solución única $c_1=c_2=0$. No hay $\lambda<0$.

$\lambda=0 \rightarrow \begin{matrix} c_1-c_2\pi=c_1+c_2\pi \\ c_2=c_2 \end{matrix}$ se cumple si $c_2=0$ y $\forall c_1$: $y_0=c_1=\{1\}$.

$\lambda>0 \rightarrow \begin{matrix} 2c_2 \operatorname{sen} \pi w=0 \\ 2c_1 w \operatorname{sen} \pi w=0 \end{matrix} \rightarrow \operatorname{sen} \pi w=0 \rightarrow \lambda_n=n^2,\ n=1,2,\ldots$

Para esos λ_n los datos se cumplen para todo c_1 y todo c_2.

Las autofunciones: $y_n=c_1\cos nx+c_2 \operatorname{sen} nx \equiv \{\cos nx, \operatorname{sen} nx\}$.

[Exigir simplemente que y sea 2π-periódica lleva a lo mismo].

Tiene también infinitos autovalores $\lambda_n=n^2$, $n=0,1,2,\ldots$ que $\rightarrow\infty$, pero ahora las autofunciones $y_0=\{1\}$, $y_n=\{\cos nx, \operatorname{sen} nx\}$ son un espacio vectorial de dimensión 2 (si $n>0$). Se comprueba que las autofunciones diferentes siguen siendo ortogonales entre sí.

Ej 9. $\boxed{(\mathrm{P}_9)\ \begin{cases} xy''+2y'+\lambda xy=0 \\ y \text{ acotada en } x=0,\ y(1)=0 \end{cases}}$ $\rightarrow [x^2y']'+\lambda x^2y=0$.

Haciendo $u=xy$ sale $u''+\lambda u=0 \rightarrow y=c_1\frac{\cos wx}{x}+c_2\frac{\operatorname{sen} wx}{x}$, $\lambda>0$.

y acotada en $x=0 \rightarrow c_1=0$ (pues $\frac{\cos wx}{x}\rightarrow\infty$, $\frac{\operatorname{sen} wx}{x}\rightarrow w$, si $x\rightarrow 0^+$).

$y(1)=0 \rightarrow \operatorname{sen} w=0$, $\lambda_n=n^2\pi^2$, $y_n=\{\operatorname{sen} n\pi x/x\}$, $n=1,2,\ldots$

[Ortogonales, como es fácil ver, respecto al peso $r(x)=x^2$].

[Imponiendo $y(0)=0$, $y(1)=0$, la única solución sería $y\equiv 0\ \forall\lambda$].

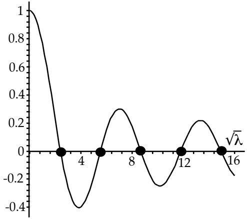
Ej 10. $\boxed{(\mathrm{P}_{10})\ \begin{cases} xy''+y'+\lambda xy=0 \\ y \text{ acotada en } x=0,\ y(1)=0 \end{cases}}$ $\rightarrow [xy']'+\lambda xy=0$. $r(x)=x$.

Con el cambio $s=\sqrt{\lambda}\,x=wx$, la ecuación se convierte en la de Bessel de orden 0:

$s\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{dy}{ds}+sy=0 \rightarrow y=c_1J_0(wx)+c_2K_0(wx)$.

La acotación impone $c_2=0 \rightarrow c_1J_0(w)=0$.
Los autovalores son los $\lambda_1<\lambda_2<\cdots$ cuyas raíces son los infinitos ceros de J_0 .

$\left[\, w_1\approx 2.40,\ w_2\approx 5.52,\ w_3\approx 8.65,\ \ldots\,\right]$.



Para esos $\lambda_n=w_n^2$ las autofunciones son $y_n=\left\{J_0(w_nx)\right\}$.

El problema 9 anterior surge, por ejemplo, tratando ondas o calor en el espacio y el 10, más complicado, si esas ecuaciones son en el plano. Este último 11 sale resolviendo la ecuación de Laplace en la esfera. Como en los anteriores se anulará p ó r en algún extremo del intervalo (p en ambos aquí). Y las condiciones fuertes de anulación de los ($\mathrm{P_s}$) regulares deben ser sustituidas por las más débiles de **acotación**.

[Otro tipo de singulares con datos discontinuos o en intervalos infinitos no se ven en este curso].

Ej 11. $\boxed{(\mathrm{P}_{11}) \begin{cases} \left[(1-x^2)y'\right]'+\lambda y=0 \\ y \text{ acotada en } x=\pm 1 \end{cases}}$ Ecuación de Legendre con λ en vez de p.

Sabemos que sus únicas soluciones acotadas a la vez en 1 y en -1 son los polinomios de Legendre $P_n(x)$, que aparecen si $\lambda=n(n+1)$, $n=0,1,2,\ldots$

$$P_0=1\ ,\quad P_1=x\ ,\quad P_2=\tfrac{3}{2}x^2-\tfrac{1}{2}\ ,\quad P_3=\tfrac{5}{2}x^3-\tfrac{3}{2}x\ ,\ \ldots$$

Los autovalores son $\lambda_n=n(n+1)$, $n=0,1,\ldots$ y las autofunciones los $\{P_n\}$, que cumplen, como dijimos en 2.3:

$$\int_{-1}^{1} P_n P_m\,dx=0 \text{ si } m\neq n\,,\qquad \int_{-1}^{1} P_n^2 dx=\frac{2}{2n+1}\,,\qquad \big[\,r(x)=1\,\big].$$