

3.2. Series de Fourier

Cualquier función f , suficientemente buena en $[a,b]$, **se puede desarrollar en serie de las autofunciones** de un (P_s) , es decir:

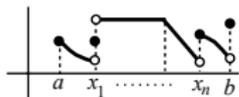
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x) \quad \text{con} \quad c_n = \frac{\langle f, y_n \rangle}{\langle y_n, y_n \rangle}, \quad n=1, 2, \dots$$

Pues si la serie es integrable término a término, por ser las y_n ortogonales:

$$\int_a^b r f y_m dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b r y_n y_m dx = c_m \int_a^b r y_m^2 dx.$$

[El r es el de la ecuación en forma autoadjunta, y muchas veces será 1].

Es difícil precisar para qué funciones f esa serie (**serie de Fourier de f**) converge realmente hacia f en $[a,b]$. Aunque se puede exigir menos, nosotros pediremos que f sea C^1 a trozos, condición que cumplirán las f que nos aparecerán.



T1. Si f es C^1 a trozos en $[a,b]$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, y_n \rangle}{\langle y_n, y_n \rangle} y_n(x)$ converge hacia $f(x)$ en los $x \in (a,b)$ en que f es continua y en los que es discontinua hacia $\frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)]$.

[El teorema no dice nada sobre la convergencia en los extremos a y b . Sí sabremos decir lo que ocurre en las series 'en senos' y 'en cosenos'].

Series trigonométricas

$$(P_1) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(L) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \text{ e } y_n = \left\{ \sin \frac{n\pi x}{L} \right\}, n = 1, 2, \dots \rightarrow$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \text{ con } b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, n = 1, 2, \dots \quad [s]$$

Pues es $r(x) \equiv 1$ y $\langle y_n, y_n \rangle = \int_0^L \left[\sin \frac{n\pi x}{L} \right]^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L \left[1 - \cos \frac{2n\pi x}{L} \right] dx = \frac{L}{2}$.

[s] es la **serie de Fourier en senos** de f . Su serie **en cosenos** la da:

$$(P_2) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = y'(L) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, y_n = \left\{ \cos \frac{n\pi x}{L} \right\}, n = 0, 1, \dots \quad [y_0 = \{1\}]$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \text{ con } a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, n = 0, 1, \dots \quad [c]$$

Pues $\langle y_0, y_0 \rangle = \int_0^L 1^2 dx = L$, $\langle y_n, y_n \rangle = \int_0^L \left[\cos \frac{n\pi x}{L} \right]^2 dx = \frac{L}{2}, n \geq 1$.

[Poniendo $\frac{a_0}{2}$ en la serie, la fórmula del a_n vale también para a_0].

Las series en **senos impares** y **cosenos impares** las dan los problemas:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y'(L) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = \frac{[2n-1]^2 \pi^2}{2^2 L^2}, y_n = \left\{ \sin \frac{[2n-1]\pi x}{2L} \right\}, n = 1, 2, \dots \\ \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = y(L) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = \frac{[2n-1]^2 \pi^2}{2^2 L^2}, y_n = \left\{ \cos \frac{[2n-1]\pi x}{2L} \right\}, n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad \langle y_n, y_n \rangle = \frac{L}{2}.$$

fórmula para series trigonométricas y primer ejemplo

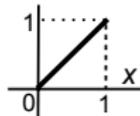
Por tanto, **en estos 4 casos** la fórmula para el cálculo del c_n de la serie es:

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) y_n(x) dx$$

[No olvidando el $a_0/2$ de las series en cosenos, únicas con ese término (en las otras las sumas empiezan en $n=1$)].

[En otros desarrollos se deberá usar la fórmula general $c_n = (f, y_n) / (y_n, y_n)$].

Ej 1. Desarrollemos $f(x) = x, x \in [0, 1]$ en senos, en cosenos y en cosenos impares:



$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} n\pi x, \text{ ya que}$$

$$b_n = 2 \int_0^1 x \operatorname{sen} n\pi x dx = -\left. \frac{2x \cos n\pi x}{n\pi} \right]_0^1 + \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \cos n\pi x dx = -\frac{2 \cos n\pi}{n\pi}.$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \cos n\pi x = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} \cos(2m-1)\pi x,$$

$$\text{pues } a_0 = 2 \int_0^1 x dx = 1, \quad a_n = 2 \int_0^1 x \cos n\pi x dx = \frac{2[\cos n\pi - 1]}{n^2 \pi^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

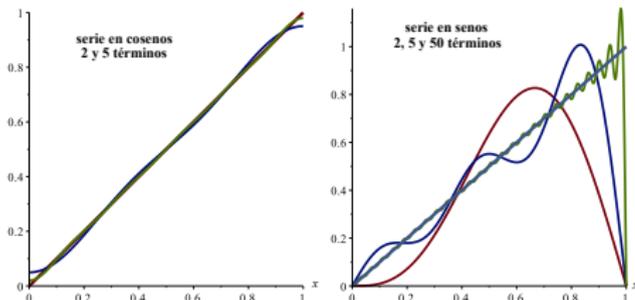
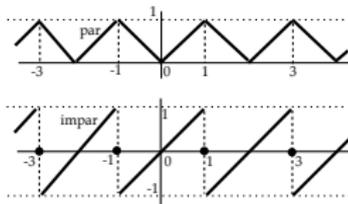
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(2n-1)} - \frac{8}{\pi^2(2n-1)^2} \right] \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2}, \text{ pues } c_n = 2 \int_0^1 x y_n dx = \dots$$

Las tres convergerán hacia $f(x)$ para cada $x \in (0, 1)$. En los extremos el teorema no lo dice (para la tercera no daremos teoría para decirlo).

Cada sumando de una **serie en senos** ($\sin \frac{n\pi x}{L}$) es impar y de periodo $2L$ y la serie tendrá las mismas propiedades. Si f , definida en $[0, L]$, se extiende **impar** a $[-L, L]$ y luego de forma $2L$ -**periódica** a todo \mathbf{R} , la suma de la serie será esa función extendida. Donde ésta sea continua, la serie tenderá hacia su valor (y si no, hacia el valor medio). Aparecerán discontinuidades en algún **extremo** del intervalo inicial salvo si es $f(0)=f(L)=0$.

Una **serie en cosenos** (de sumandos pares y periódicos) convergerá hacia la **extensión par** y $2L$ -**periódica** de la f inicial, lo que no crea nuevas discontinuidades en los extremos.

Ej 1*. Sabemos estudiar los extremos en dos series del ejemplo 1. La de senos no converge hacia f en todo $[0, 1]$ (en $x=1$ la suma es 0 (cada seno lo es)). La de cosenos convergerá en todo $[0, 1]$.



Comprobamos con Maple. La suma de 2 y 5 términos de la serie en cosenos da una buena aproximación y parece converger uniformemente. La de senos, en cambio se ajusta mal cerca de $x=1$ al valor real, incluso con 50 términos.

[Cerca de las discontinuidades aparecerán siempre ese tipo de 'picos'. Es el llamado **'fenómeno de Gibbs'**].

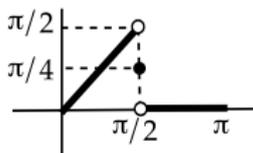
una función 'rota' desarrollada en senos impares

Ej 2. Desarrollemos $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$ en autofunciones de $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y'(\pi) = 0 \end{cases}$.

Problema conocido: $\lambda_n = \frac{(2n-1)^2}{2^2}$, $y_n = \left\{ \sin \frac{(2n-1)x}{2} \right\}$, $n = 1, 2, \dots$ $\langle y_n, y_n \rangle = \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} \rightarrow c_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin \frac{(2n-1)x}{2} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} x \sin \frac{(2n-1)x}{2} dx \\ &= -\left. \frac{4x \cos \frac{(2n-1)x}{2}}{\pi(2n-1)} \right|_0^{\pi/2} + \frac{4}{\pi(2n-1)} \int_0^{\pi} \cos \frac{(2n-1)x}{2} dx = \frac{8 \sin \frac{(2n-1)\pi}{4}}{\pi(2n-1)^2} - \frac{2 \cos \frac{(2n-1)\pi}{4}}{2n-1}. \end{aligned}$$

La serie converge hacia f en los $x \in (0, \pi)$ donde es continua, y hacia $\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$ en los que es discontinua. En particular, para $x = \frac{\pi}{2}$ la suma ha de ser $\frac{\pi}{4}$.



Por tanto, se tiene que:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{(2n-1)\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{8 \sin^2 \left(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)}{\pi(2n-1)^2} - \frac{\sin \frac{(2n-1)\pi}{2}}{2n-1} \right] = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{\pi}{4},$$

puesto que $\sin^2 \left(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2} [1 - \cos(n\pi - \frac{\pi}{2})] = \frac{1}{2}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

La igualdad de arriba da el valor de la suma de esta serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

[No es raro obtener sumas de series desconocidas a partir de un desarrollo de Fourier].

$$(P_p) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(-L) = y(L), y'(-L) = y'(L) \end{cases} \quad \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, y_n = \left\{ \cos \frac{n\pi x}{L}, \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right\}, \\ n = 0, 1, \dots, y_0 = \{1\}.$$

lleva la siguiente **serie de Fourier en senos y cosenos** en $[-L, L]$:

$$[p] \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right], \text{ con coeficientes:}$$

$$[1] \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad \text{y} \quad [2] \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \\ n = 0, 1, 2, \dots \qquad \qquad \qquad n = 1, 2, \dots$$

[Las fórmulas [1]-[2] valen para desarrollar una f definida inicialmente en cualquier otro intervalo $[a, a+2L]$ (cambiando los límites a la integral)].

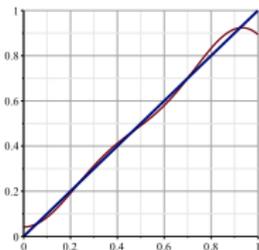
La serie [p] también converge hacia $f(x)$ donde es continua. Y también se puede decir lo que pasa en los **extremos** $-L$ y L por definir una función **$2L$ -periódica** en todo **\mathbf{R}** . Hablamos también de **convergencia uniforme**:

T2. Extendamos f, C^1 a trozos en $[-L, L]$, de forma $2L$ -periódica. Entonces la serie [p] converge hacia $f(x)$ en los puntos en que su extensión es continua (y, si no, hacia $\frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)]$). Además [p] convergerá uniformemente en todo intervalo cerrado sin discontinuidades de la f extendida.

Ej 4. Desarrollemos $f(x)=x, x \in [0,1]$ en las autofunciones del ejemplo 4: $\{\cos w_n x\}$ con $\tan w_n = \frac{1}{w_n}$ [$r(x)=1$].

$$\langle \cos w_n x, \cos w_n x \rangle = \int_0^1 \cos^2 w_n x \, dx = \frac{1}{2} + \frac{\sin w_n \cos w_n}{2w_n} = \frac{w_n^2 + \cos^2 w_n}{2w_n^2} = \frac{2 + w_n^2}{2(1 + w_n^2)},$$

$$\langle x, \cos w_n x \rangle = \int_0^1 x \cos w_n x \, dx = \frac{2 \cos w_n - 1}{w_n^2} \rightarrow x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(2 \cos w_n - 1)}{w_n^2 + \cos^2 w_n} \cos w_n x.$$



[Con el ordenador hallamos varios coeficientes y dibujamos algunas sumas parciales de la serie. Primero aproximamos los w_n :

$$w_1 \approx 0.8603, w_2 \approx 3.4256, w_3 \approx 6.4373, w_4 \approx 9.5293 \dots$$

De ellos deducimos los c_n :

$$c_1 \approx 0.5223, c_2 \approx -0.4614, c_3 \approx 0.0460, c_4 \approx -0.0651 \dots$$

A la izquierda están dibujadas x y la cuarta suma parcial. Parece que converge también en los extremos, cosa que no sabíamos].

Ej 5. Ahora $f(x)=e^x$ en las del Ej 5: $y_0 = \{1\}$, $y_n = \{e^x[\sin n\pi x - n\pi \cos n\pi x]\}$.

$$\text{Era } r(x)=e^{-2x} \rightarrow c_0 = \frac{\langle e^x, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = \frac{\int_0^1 e^{-x} dx}{\int_0^1 e^{-2x} dx} = \frac{1 - e^{-1}}{(1 - e^{-2})/2} = \frac{2e}{e+1}.$$

$$\langle e^x, y_n \rangle = \left[-\frac{1}{n\pi} \cos n\pi x - \sin n\pi x \right]_0^1 = \frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \quad (\text{se anula si } n \text{ par}).$$

$$\langle y_n, y_n \rangle = \int_0^1 [\sin^2 n\pi x + n^2 \pi^2 \cos^2 n\pi x - n\pi \sin 2n\pi x] dx = \frac{1 + n^2 \pi^2}{2}.$$

$$\text{El desarrollo es: } e^x = \frac{2e}{e+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2[1 - (-1)^n]}{n\pi[1 + n^2 \pi^2]} e^x (\sin n\pi x - n\pi \cos n\pi x).$$

3.3. Problemas no homogéneos

$$(P_f) \begin{cases} [p(x)y']' + g(x)y = f(x) \\ \alpha y(a) - \alpha' y'(a) = \beta y(b) + \beta' y'(b) = 0 \end{cases} \quad p \in C^1, g, f \in C, p > 0 \text{ en } [a, b],$$

y sea (P_h) el problema homogéneo asociado ($f \equiv 0$). Entonces:

T1.

El problema (P_f) tiene solución única si y sólo si (P_h) tiene sólo la $y \equiv 0$. Si (P_h) tiene soluciones no triviales $\{y_h\}$ entonces según sea $\int_a^b f(x)y_h(x) dx \stackrel{=}{\neq} 0$, (P_f) tiene infinitas soluciones ninguna solución.

$$\begin{matrix} 1 \rightarrow 1 \\ \infty \rightarrow \infty \\ 0 \rightarrow 0 \end{matrix}$$

Gran parte del teorema sale de imponer los datos de contorno a la solución general $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p$, por las propiedades de los sistemas algebraicos lineales: tienen solución única si y sólo si el sistema homogéneo tiene sólo la trivial.

Ej 2.

$$\begin{cases} xy'' + 2y' = 3x - 4 \\ 2y(1) + y'(1) = y(2) = 0 \end{cases}$$

Para ver cuántas soluciones tiene empezamos mirando el homogéneo (P_h) :

$$xy'' + 2y' = 0 \xrightarrow{\text{Euler o } y' = v} y = c_1 + \frac{c_2}{x}, y' = -\frac{c_2}{x^2} \rightarrow \begin{cases} 2c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + \frac{c_2}{2} = 0 \end{cases} \cdot \{y_h\} = \left\{1 - \frac{2}{x}\right\}.$$

$$\text{Forma S-L: } [x^2 y']' = 3x^2 - 4x. \int_1^2 (3x^2 - 4x) \left(1 - \frac{2}{x}\right) dx = \int_1^2 (3x^2 - 10x + 8) dx = 0.$$

\Rightarrow el problema no homogéneo tiene **infinitas soluciones**.

$$[O \text{ resolviendo la no homogénea: } y = c_1 + \frac{c_2}{x} + \frac{x^2}{2} - 2x \rightarrow c_2 = 4 - 2c_1, \forall c_1].$$

$$(P_{AB}) \left\{ \begin{array}{l} [p(x)y']' + g(x)y = f(x) \\ \alpha y(a) - \alpha' y'(a) = A, \beta y(b) + \beta' y'(b) = B \end{array} \right., \quad p \in C^1, g, f \in C, p > 0 \text{ en } [a, b],$$

T2. (P_{AB}) tiene solución única $\Leftrightarrow (P_h)$ tiene sólo la solución $y \equiv 0$.

[Y si (P_h) tiene infinitas soluciones, (P_{AB}) puede tener infinitas o ninguna].

Aunque en (P_{AB}) sea $f(x) \equiv 0$, **si (al menos) una condición de contorno es no homogénea, las propiedades son las típicas de uno no homogéneo.** Como en el siguiente ejemplo.

Ej 4. Discutamos cuántas soluciones tiene

$$(P_a) \left\{ \begin{array}{l} xy'' - y' = 0 \\ y'(1) + ay(1) = 0, y(2) = 1 \end{array} \right.$$

Comenzamos analizando cuántas tiene el homogéneo: $y = c_1 + c_2 x^2 \rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(1) + ay(1) = 2c_2 + ac_1 + ac_2 = 0 \\ y(2) = c_1 + 4c_2 = 0 \end{array} \right. \rightarrow \begin{cases} [2-3a]c_2 = 0 \\ c_1 = -4c_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \equiv 0 \text{ si } a \neq \frac{2}{3} \\ y = x^2 - 4 \text{ si } a = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Si $a \neq \frac{2}{3}$, (P_a) tiene solución única. Para $a = \frac{2}{3}$ se puede ver directamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(1) + \frac{2}{3}y(1) = \frac{2}{3}[c_1 + 4c_2] = 0 \\ y(2) = c_1 + 4c_2 = 1 \end{array} \right. \rightarrow \text{no existe solución de } (P_{2/3}).$$

También podemos (más largo) convertirlo en un (P_f) y aplicar el teorema 1. Para ello hallamos una v del tipo $v = Mx + N$ que cumpla las condiciones:

$$v = 5 - 2x, w = y - v \rightarrow (P_w) \left\{ \begin{array}{l} xw'' - w' = -2 \\ w'(1) + \frac{2}{3}w(1) = w(2) = 0 \end{array} \right. \quad \left[\frac{w'}{x} \right]' = -\frac{2}{x^2} \text{ autoadjunta.}$$

$$\int_1^2 \left[-\frac{2}{x^2} \right] [x^2 - 4] dx = 2 \neq 0 \Rightarrow (P_w) \text{ [y por tanto } (P_{2/3}) \text{] no tiene solución.}$$

Sturm-Liouville no homogéneos

Si es $(P_\lambda) \begin{cases} [py']' - qy + \lambda ry = f(x) \\ \alpha y(a) - \alpha' y'(a) = \beta y(b) + \beta' y'(b) = 0 \end{cases}$ y (P_s) el homogéneo ($f \equiv 0$),

para cada λ surge un problema de los anteriores ($g = -q + \lambda r$). Por tanto:

T3. (P_λ) tiene solución única $\Leftrightarrow \lambda$ no es autovalor de (P_s) .
 Si λ_n es autovalor con autofunción $\{y_n\}$,
 (P_{λ_n}) no tiene solución según sea $\int_a^b f y_n dx \neq 0$
 tiene infinitas $\quad \quad \quad = 0$.

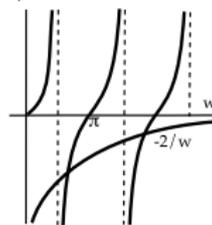
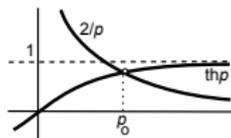
Ej 5. $\begin{cases} y'' + \lambda y = 1 \\ y'(0) = y'(1) - 2y(1) = 0 \end{cases}$ Veamos cuántas soluciones tiene. Los λ_n del homogéneo pueden ser negativos ($\beta\beta' < 0$).

$\lambda < 0$: $y = c_1 e^{px} + c_2 e^{-px} \rightarrow c_1(p[e^p - e^{-p}] - 2[e^p + e^{-p}]) = 0$

Hay autovalor $\lambda_0 = -p_0^2$ si $\text{th } p_0 = \frac{2}{p_0}$, con $y_0 = \{\text{ch}(p_0 x)\}$.

$\lambda = 0$: $y = c_1 + c_2 x \rightarrow c_2 = 0 = c_1 \rightarrow \lambda = 0$ no es autovalor.

$\lambda > 0$: $y = c_1 \cos wx + c_2 \sin wx \rightarrow c_1(w \sin w + 2 \cos w) = 0 \rightarrow$
 Infinitos $\lambda_n = w_n^2$ si $\tan w_n = -\frac{2}{w_n}$, con $y_n = \{\cos(w_n x)\}$.



Por tanto, si $\lambda \neq \lambda_n$ hay solución única de (P_λ) .

Si $\lambda = \lambda_0$, como $\int_0^1 \text{ch}(p_0 x) dx \neq 0$, (P_λ) no tiene solución.

Si $\lambda = \lambda_n$, $\int_0^1 \cos(w_n x) dx = \frac{\text{sen } w_n}{w_n} \neq 0 \Rightarrow (P_\lambda)$ tampoco la tiene.