

4. Separación de variables

Este método da la solución de EDPs en forma de **serie de Fourier** (para problemas planteados en un **intervalo finito** en una de las variables), único camino posible en muchos casos.

En 4.1 se tratan los problemas **homogéneos** y **no homogéneos** para el **calor** (y ecuaciones similares) en 2 variables.

En 4.2 se hace lo mismo para la ecuación de **ondas**, comparando con los resultados obtenidos en la sección 1.4 a partir de la fórmula de D'Alembert.

[Este pdf incluye esas dos secciones y las dos siguientes van en otro].

En 4.3 se resuelve **Laplace** en cartesianas y en polares. Todas las condiciones serán de contorno (a veces no escritas explícitamente cuando trabajemos en polares).

En 4.4 se ven algunos problemas con **tres variables** con dos (en vez de un) problemas de contorno. Aparecerán los polinomios de **Legendre** (resolviendo Laplace en la esfera) y las J_n de **Bessel** (vibración de un tambor).

4.1. Separando en el **calor**. El método general

Homogéneos: Buscamos soluciones de la forma $u(x, t) = X(x)T(t)$ cumpliendo las condiciones homogéneas. Obtendremos infinitas soluciones de ese tipo resolviendo algún **problema de contorno** (casi siempre para $X'' + \lambda X = 0$) y otra EDO homogénea (de primer orden para el calor). Construiremos $u(x, t) = \sum c_n X_n(x) T_n(t)$ con ellas y sólo faltará calcular los c_n de la serie imponiendo el **dato inicial** y haciendo un **desarrollo de Fourier**.

No homogéneos: Se lleva a la EDP con la $F(x, t)$ desarrollada una serie cuyos términos serán **productos de las autofunciones X_n del problema homogéneo por funciones $T_n(t)$ a determinar de la otra variable**. Se obtiene la solución resolviendo la familia de EDOs lineales no homogéneas que surgen, con las condiciones que se deducen de las iniciales.

Si son las **condiciones de contorno no homogéneas**, primero se hace un **cambio de variable** $w = u - v$.

[En la ecuación de ondas las EDOs para las T_n serán de segundo orden, en Laplace también, y en polares serán ecuaciones de Euler].

Primer problema **homogéneo** para el calor

Sea $[P_1] \begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0, & x \in (0, L), t > 0 & [E] \\ u(x, 0) = f(x) & & [I] \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & & [C] \end{cases}$

$$u = XT \rightarrow XT' - kX''T = 0, \quad \frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT} \quad (\text{mejor que } \frac{kX''}{X} = \frac{T'}{T}).$$

Como el primer miembro es función sólo de x y segundo de sólo t deben ser iguales a una constante:

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{k} \frac{T'}{T} = -\lambda \quad (\text{con } -\lambda \text{ queda la ecuación famosa de 3.1}).$$

Obtenemos dos EDOs: $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 & [1] \\ T' + \lambda k T = 0 & [2] \end{cases}$.

Nos interesan sólo las soluciones que cumplen [C]:

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0. \text{ Igualmente, } X(L) = 0.$$

($T(t) \equiv 0 \Rightarrow u \equiv 0$ y no se cumpliría la condición inicial).

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad X_n = \left\{ \sin \frac{n\pi x}{L} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots \\ \rightarrow T' = -\frac{kn^2 \pi^2}{L^2} T \rightarrow T_n = \left\{ e^{-kn^2 \pi^2 t / L^2} \right\}.$$

Para cada n son soluciones de [E] cumpliendo [C] las funciones

$$u_n(x, t) = \left\{ e^{-kn^2\pi^2 t/L^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Suponemos que también lo hace la serie infinita:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-kn^2\pi^2 t/L^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad [3]$$

Para que se cumpla la condición inicial [I] debe ser:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = f(x) \Rightarrow c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

La solución de [P₁] es la serie [3] con estos coeficientes.

Si f es C^1 a trozos, se prueba que la serie converge y define una función C^∞ en $[0, L] \times (0, \infty)$. Es $u=0$ en $x=0$ y $x=L$. Y la condición inicial se cumple en este sentido: la $u(x, t)$ dada por la serie para $t > 0$ y por $u(x, 0) = f(x)$ es continua salvo en los puntos de $t=0$ en que f es discontinua.

Aunque f sea discontinua, la solución es C^∞ para todo $t > 0$ por pequeño que sea: a diferencia de las ondas, las discontinuidades desaparecen en el calor instantáneamente, como dijimos al resolverla con la \mathcal{F} .

Como $u_n \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \quad \forall n$ (y es buena la convergencia), $u(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \quad \forall x \in [0, L]$.

[La varilla **tiende a ponerse a 0 grados**, como era esperable].

Condiciones no homogéneas de contorno

$$[P_2] \begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0, & x \in (0, L), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & u(0, t) = T_0, u(L, t) = T_L \end{cases} \quad \begin{matrix} T_0, T_L \\ \text{constantes} \end{matrix}$$

Si las condiciones de contorno son **no homogéneas** se debe primero hacerlas 0 [de $X(0)T(t) = T_0$ no sale nada].

Una $v(x)$ que las cumple es la recta: $v = [1 - \frac{x}{L}]T_0 + \frac{x}{L}T_L$.

Haciendo $w = u - v$ el problema se lleva a uno como $[P_1]$:

$$\begin{cases} w_t - kw_{xx} = 0, & x \in (0, L), t > 0 \\ w(x, 0) = f(x) - v(x), & w(0, t) = w(L, t) = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$u(x, t) = [1 - \frac{x}{L}]T_0 + \frac{x}{L}T_L + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-kn^2\pi^2 t/L^2} \sin \frac{n\pi x}{L} = v + w,$$

$$\text{con } c_n = \frac{2}{L} \int_0^L [f(x) - v(x)] \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

$v(x)$ representa la **distribución estacionaria** hacia la que tienden las temperaturas en la varilla, pues $w \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$.

[Si T_0 y T_L dependen de t , la v de antes (vista ya en 1.4 para la cuerda) sigue cumpliendo los datos de contorno. Pero la EDP para w es, en general, no homogénea y v pierde su significado físico. Con otros datos de contorno se buscan $v(x, t)$ distintas. A veces serán rectas, quizás otras funciones...].

Un ejemplo y principio de los problemas **no homogéneos**

Ej 1.
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = 1, & u(0, t) = 1, u(1, t) = 0 \end{cases}$$

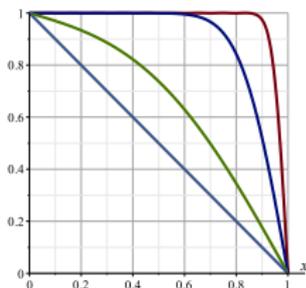
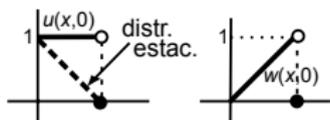
Operando se llega a:

$$u(x, t) = 1 - x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-n^2 \pi^2 t} \operatorname{sen}(n\pi x),$$

que tiende hacia la distribución $v(x) = 1 - x$.

[No importa que para $t=0$ sea incoherente el dato inicial con el de contorno en $x=1$].

La solución para $t=0.001, 0.01, 0.1, 1$ (usando 20 s umandos de la serie) se ve a la derecha.



En lo problemas no homogéneos probaremos siempre una **serie de autofunciones del homogéneo** (que se calculan previamente).

$$[P_3] \begin{cases} u_t - ku_{xx} = F(x, t), & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

(Tomamos $L = \pi$ para abreviar las expresiones).

[Si las condiciones de contorno fuesen no homogéneas se empezaría con un cambio $w = u - v$ para que lo fuesen].

sigue el problema no homogéneo

Las autofunciones del $[P_1]$ eran $\{\sin nx\}$, $n=1, 2, \dots$. Llevamos a la EDP y al dato inicial esta serie que ya cumple los datos de contorno:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin nx \quad \text{con } T_n(t) \text{ funciones a determinar.}$$

Suponemos que se puede derivar término a término:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [T'_n(t) + kn^2 T_n(t)] \sin nx = F(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \sin nx \rightarrow$$

$$B_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(x, t) \sin nx \, dx \quad (\text{desarrollo de } F \text{ en senos para } t \text{ fijo}).$$

Para cada n será $T'_n + kn^2 T_n = B_n(t)$. Y del dato inicial:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin nx = f(x) \Rightarrow T_n(0) = c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

Tenemos la $T_n(t)$ y la solución de $[P_3]$ resolviendo estos problemas para EDOs lineales:

$$\begin{cases} T'_n + kn^2 T_n = B_n(t) \\ T_n(0) = c_n \end{cases}$$

(con la fórmula de las lineales de primer orden o, a veces, tanteando, si se puede usar coeficientes indeterminados).

$$[P_4] \begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0, & x \in (0, L), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0 \end{cases}$$

Separando variables aparecen las mismas EDOs que en $[P_1]$, pero cambian las condiciones de contorno de la X :

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(L) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad X_n = \left\{ \cos \frac{n\pi x}{L} \right\}.$$

Para estos λ se tienen las $T_n = \{e^{-kn^2 \pi^2 t / L^2}\} \quad [T_0 = \{1\}]$.

Probamos pues la serie: $u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-kn^2 \pi^2 t / L^2} \cos \frac{n\pi x}{L}$.

Y la condición inicial da aquí: $u(x, 0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} = f(x)$.

Los a_n serán pues: $a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 0, 1, \dots$

La varilla (aislada) tiende cuando $t \rightarrow \infty$ al valor medio de las temperaturas iniciales: $a_0/2 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx$.

Para $u_x(0, t) = F_0(t)$, $u_x(L, t) = F_L(t)$, en general, no hay $v(x, t)$ que sea recta y la EDP en w normalmente será no homogénea.

A un no homogéneo se lleva: $u(x, t) = T_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cos \frac{n\pi x}{L}$.

Ejemplos de los apuntes con datos de contorno variados

Ej 2.
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = u_x(0, t) = 0, & u_x(1, t) = 2 \end{cases} \quad v = x^2 \text{ cumple los datos de contorno.}$$

$$w = u - x^2 \rightarrow \begin{cases} w_t - w_{xx} = 2 \\ w(x, 0) = -x^2, w_x(0, t) = w_x(1, t) = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$w = T_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cos n\pi x \rightarrow T'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [T'_n + n^2 \pi^2 T_n] \cos n\pi x = 2 \quad [\text{ya desarrollada}].$$

$$T_0(0) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \cos n\pi x = -x^2 = -\frac{1}{3} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2 \pi^2} \cos n\pi x \rightarrow$$

$$\begin{cases} T'_0 = 2 \\ T_0(0) = -\frac{1}{3} \end{cases}, \quad \begin{cases} T'_n + n^2 \pi^2 T_n = 0 \\ T_n(0) = a_n \end{cases}. \quad u = 2t + x^2 - \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{-n^2 \pi^2 t} \cos n\pi x.$$

Ej 3.
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = t \operatorname{sen} x, & x \in (0, \frac{\pi}{2}), t > 0 \\ u(x, 0) = u(0, t) = u_x(\frac{\pi}{2}, t) = 0 \end{cases} \quad \text{Son condiciones nuevas y se necesitan sus autofunciones:}$$

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X'(\frac{\pi}{2}) = 0 \rightarrow X_n = \{\operatorname{sen}(2n-1)x\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \operatorname{sen}(2n-1)x \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} [T'_n + (2n-1)^2 T_n] \operatorname{sen}(2n-1)x = t \operatorname{sen} x.$$

Se tienen las EDOs: $T'_1 + T_1 = t$ y $T'_n + (2n-1)^2 T_n = 0, \quad n > 1.$

$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \operatorname{sen}(2n-1)x = 0 \Rightarrow T_n(0) = 0 \quad \forall n.$ La única $T_n \neq 0$ la da:

$$\begin{cases} T'_1 + T_1 = t \\ T_1(0) = 0 \end{cases} \rightarrow T_1 = Ce^{-t} + t - 1 \xrightarrow{d.i.} C = 1. \quad u = (e^{-t} + t - 1) \operatorname{sen} x \text{ solución única.}$$

más ejemplos (con datos de contorno no nulos)

Ej 4.

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = 1, & u_x(0, t) = 0, u(\pi, t) = e^{-4t} \end{cases}$$

Es clara $v(t) = e^{-4t}$
(luego damos una mejor).

$$\xrightarrow{w=u-v} \begin{cases} w_t - 4w_{xx} = 4e^{-4t} \\ w(x, 0) = w_x(0, t) = w(\pi, t) = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{[no homogéneo].} \\ X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X(\pi) = 0 \end{matrix} \rightarrow$$

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cos \frac{(2n-1)x}{2} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} [T'_n + (2n-1)^2 T_n] \cos \frac{(2n-1)x}{2} = 4e^{-4t}.$$

$$\begin{cases} T'_n + (2n-1)^2 T_n = B_n e^{-4t}, & B_n = \frac{16(-1)^{n+1}}{\pi(2n-1)} \\ T_n(0) = 0 \text{ (del dato inicial)} \end{cases} \rightarrow T_n = \frac{16(-1)^{n+1} [e^{-4t} - e^{-(2n-1)^2 t}]}{\pi(2n-3)(2n-1)(2n+1)}.$$

Cumplen la EDP v productos de soluciones de $X'' + \lambda X = 0$ y $T' + 4\lambda T = 0 \quad \forall \lambda$.

En concreto: $v = -e^{-4t} \cos x \rightarrow \begin{cases} w_t - 4w_{xx} = 0 \\ w(x, 0) = 1 + \cos x, w_x(0, t) = w(\pi, t) = 0 \end{cases} \rightarrow$

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\pi} \left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n-3} - \frac{2}{2n-1} \right] e^{-(2n-1)^2 t} \cos \frac{(2n-1)x}{2} - e^{-4t} \cos x.$$

~Ej 5.

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = x, & u_x(0, t) - u(0, t) = 0, u_x(1, t) = 1 \end{cases}$$

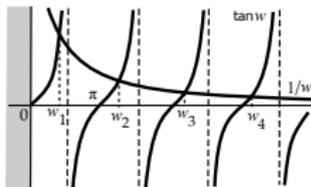
$$\begin{aligned} v &= Mx + N \rightarrow M = N = 1, \\ v &= x + 1. \quad w = u - v \rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} = 0, & w(x, 0) = -1, \\ w_x(0, t) - w(0, t) = w_x(1, t) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) - X(0) = X'(1) = 0 \end{cases}$$

Se sabe que $\lambda \geq 0$ y se ve que $\lambda = 0$ no es autovalor.

Si $\lambda > 0$: $X = c_1 \cos wx + c_2 \sen wx$, $\begin{cases} c_2 w - c_1 = 0 \\ c_2 \cos w = c_1 \sen w \end{cases} \rightarrow$
 $\tan w = \frac{1}{w}, \lambda_n = w_n^2, X_n = \{\cos w_n(x-1)\}, T_n = \{e^{-\lambda_n t}\}.$

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n t} X_n(x) \xrightarrow{w(x,0)=-1} c_n = -\frac{4 \sen w_n}{2w_n + \sen 2w_n}.$$



Ejemplos para nuevas EDPs parabólicas

Ej 6.
$$u_t - 4(1+2t)u_{xx} = 0, \quad x \in (0, \pi), \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 1, \quad u(0, t) = u_x(\pi, t) = 0$$

$$u = XT \rightarrow XT' = (4+8t)X''T$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{(4+8t)T} = -\lambda \rightarrow$$

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases}, \quad \lambda_n = \frac{(2n-1)^2}{4}, \quad X_n = \left\{ \sin \frac{(2n-1)x}{2} \right\}, \quad n=1, 2, \dots$$

Y además: $T' + 4\lambda_n(1+2t)T = 0 \rightarrow T_n = \{e^{-(2n-1)^2(t+t^2)}\}$.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(2n-1)^2(t+t^2)} \sin \frac{(2n-1)x}{2} \rightarrow u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{(2n-1)x}{2} = 1 \rightarrow$$

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \frac{(2n-1)x}{2} dx = \frac{4}{\pi(2n-1)}. \quad u(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} e^{-(2n-1)^2(t+t^2)} \sin \frac{(2n-1)x}{2}.$$

Ej 7.
$$u_t - u_{xx} + 3u = F(x), \quad x \in (0, \pi), \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = u(0, t) = u(\pi, t) = 0$$
 a) $F(x) = 4 \sin x$
 b) $F(x) = \pi$

$$u = XT \rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} + 3 = -\lambda \quad \left[\begin{array}{l} \text{damos el 3} \\ \text{mejor a la } T \end{array} \right] \rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \rightarrow X_n = \{ \sin nx \}_{n=1, 2, \dots}$$

Llevamos $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin nx$ a la EDP y al dato inicial:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [T'_n + (n^2 + 3)T_n] \sin nx = F(x), \quad u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin nx = 0 \rightarrow T_n(0) = 0.$$

a) $T'_1 + 4T_1 = 4 \rightarrow T_1 = 1 - e^{-4t}$, y resto 0. Es $u(x, t) = (1 - e^{-4t}) \sin x$.

b) Es $\pi = 4 \sin x + \frac{4}{3} \sin 3x + \dots$, pues $\int_0^{\pi} \pi \sin nx dx = 2 \frac{1 - (-1)^n}{n}$. T_1 el de a).

El siguiente: $T'_3 + 12T_3 = \frac{4}{3} \rightarrow u = (1 - e^{-4t}) \sin x + \frac{1}{9}(1 - e^{-12t}) \sin 3x + \dots$

Hasta ahora la EDO del problema de contorno siempre fue $X'' + \lambda X = 0$ y las series de Fourier eran con peso $r(x) = 1$. Resolvamos un ejemplo en el que sale otra EDO para la que se necesita la teoría más general del capítulo 3.

Ej 8.
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - 4u_x - 4u = 0, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = e^{-2x}, & u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

$$u = XT \rightarrow \frac{T'}{T} = \frac{X'' + 4X'}{X} + 4 = -\lambda \rightarrow \begin{cases} X'' + 4X' + (4 + \lambda)X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \text{ y } T' + \lambda T = 0.$$

(en forma autoadjunta $[e^{4x}X']' + 4e^{4x}X + \lambda e^{4x}X = 0$)

El problema con X da: $\lambda_n = n^2$, $X_n = \{e^{-2x} \sin nx\}$, $n = 1, 2, \dots \rightarrow$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} e^{-2x} \sin nx. \quad u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-2x} \sin nx = e^{-2x}. \quad (\bullet)$$

Para dar los c_n necesitamos (abajo vemos atajos) calcular:

$$\langle X_n, X_n \rangle = \int_0^{\pi} e^{4x} e^{-4x} \sin^2 nx \, dx = \frac{\pi}{2},$$

$$\langle e^{-2x}, X_n \rangle = \int_0^{\pi} \sin nx \, dx = \frac{1 - (-1)^n}{n}.$$

$$u = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-(2m-1)^2 t}}{2m-1} e^{-2x} \sin(2m-1)x.$$

Si vemos que (\bullet) equivale a $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx = 1 \rightarrow c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx$ (calculado ya).

Con cambios $u = e^{pt+qx}w$ se simplifican EDPs. Todo pide hacer $u = e^{-2x}w \rightarrow$

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} = 0 \\ w(x, 0) = 1, w(0, t) = w(\pi, t) = 0 \end{cases}, \text{ primer problema resuelto en la sección.}$$

4.2. Separación de variables para ondas

Resolvamos el problema para la **cuerda vibrante** con **extremos fijos** (en 1.4 lo hicimos con extensiones y D'Alembert):

$$[P_1] \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x \in [0, L], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x) \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \end{cases}$$

Separando $u = X(x)T(t)$ y de los datos de contorno obtenemos:

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} = -\lambda \rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & X(0) = X(L) = 0 \\ T'' + \lambda c^2 T = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad X_n = \left\{ \sin \frac{n\pi x}{L} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad T_n = \left\{ \sin \frac{n\pi ct}{L}, \cos \frac{n\pi ct}{L} \right\}.$$

Así las $u_n(x, t) = \left[k_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + c_n \sin \frac{n\pi ct}{L} \right] \sin \frac{n\pi x}{L}$, $n = 1, 2, \dots$ satisfacen la EDP y las condiciones de contorno.

La solución es:
$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[k_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + c_n \sin \frac{n\pi ct}{L} \right] \sin \frac{n\pi x}{L},$$

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \sin \frac{n\pi x}{L} = f(x) \rightarrow k_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} = g(x) \rightarrow c_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

[$\frac{n\pi c}{L} c_n$ son los coeficientes del desarrollo de g en senos].

discusión de las series y primer ejemplo

Se prueba que las series convergen y satisfacen realmente el problema si f y g cumplen las condiciones pedidas en 1.4: si sus extensiones son C^2 y C^1 , respectivamente (si no son tan buenas la serie dará soluciones débiles).

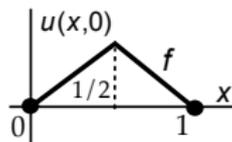
Para algunas cuestiones (valores concretos, dibujos, ...) D'Alembert es mejor, pero se ven mejor otras propiedades en la serie. Por ejemplo, como las u_n son $2L/c$ -periódicas en t , también u tiene este periodo. La solución aparece como suma infinita de 'modos naturales de vibración' [$\sin(n\pi x/L)$] que vibran con una frecuencia $n\pi c/L$ ('frecuencias naturales' de la cuerda). En términos acústicos u_1 da el tono fundamental (su frecuencia es $\pi c/L$) y el resto son los 'armónicos' (de frecuencia múltiplo de la anterior).

Como siempre, para empezar la separación de variables, deben anularse las condiciones de contorno. Y en los problemas no homogéneos se usan series de autofunciones del homogéneo.

Ej 1. Si

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1-x, & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad g(x) = 0$$

(Ej 7 de 1.4: cuerda pulsada de una guitarra).



$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \cos n\pi t \sin n\pi x \quad (2\text{-periódica}), \quad \text{con}$$

$$k_n = 2 \int_0^{1/2} x \sin n\pi x \, dx + 2 \int_{1/2}^1 (1-x) \sin n\pi x \, dx = \frac{4}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \quad [\text{si } n \text{ par}].$$

(Pulsando la cuerda en el centro desaparecen los armónicos pares).

Ejemplo 2 (utilizando D'Alembert y separando variables)

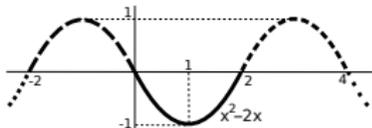
Ej 2.

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in [0, 2], t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = x^2, & u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = 0, & u(2, t) = 4 \end{cases}$$

Hallemos $u(1, 2)$ y $u(x, 1)$. Para empezar

$$v(x, t) = \left[1 - \frac{x}{L}\right] h_0(t) + \frac{x}{L} h_L(t) \rightarrow v = 2x$$

$$\xrightarrow{w=u-v} \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0, & x \in [0, 2] \\ w(x, 0) = x^2 - 2x, & w_t(x, 0) = w(0, t) = w(2, t) = 0 \end{cases}$$



Se extiende f a f^* impar y 4-periódica definida $\forall x$:

$$\dots, -x(x+2) \text{ en } [-2, 0], x(x-2) \text{ en } [0, 2], -(x-4)(x-2) \text{ en } [2, 4], \dots$$

La solución viene dada por $w(x, t) = \frac{1}{2}[f^*(x+t) + f^*(x-t)] \rightarrow$

$$w(1, 2) = \frac{1}{2}[f^*(3) + f^*(-1)] \stackrel{4\text{per}}{=} \frac{1}{2}[f^*(-1) + f^*(-1)] \stackrel{\text{impar}}{=} -f(1) = 1, \quad u(1, 2) = 3.$$

Para hallar $w(x, 1)$ aparecen dos casos:

$$w(x, 1) = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1, & \frac{1}{2}[-(x-1)(x+1) + (x+1)(x-1)] = 0 \\ 1 \leq x \leq 2, & \frac{1}{2}[-(x-1)(x-3) + (x-3)(x-1)] = 0 \end{cases} \rightarrow u(x, 1) = 2x.$$

[Llevando f^* una unidad a izquierda y derecha y sumando todo se cancela].

Para separar variables copiamos fórmulas: $w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \cos \frac{n\pi t}{2} \sin \frac{n\pi x}{2}$ con $k_n = \int_0^2 (x^2 - 2x) \sin \frac{n\pi x}{2} = \frac{16[(-1)^n - 1]}{n^3 \pi^3}$, $w = -\frac{32}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^3} \cos \frac{(2m-1)\pi t}{2} \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2}$.

Para $t=1$ los cosenos se anulan y es $w(x, 1) = 0$ (como por D'Alembert).

Además $w(1, 2) = \frac{32}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)^3} [=1; \text{deducimos que } 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \dots = \frac{\pi^3}{32}].$

Ejemplo 3 de ondas

Ej 3.
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = x, & x \in [0, \pi], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases} \quad u = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \operatorname{sen} nx \quad (\text{se anula en } x=0, \pi).$$

Llevando la serie a la EDP y a los datos iniciales se deduce:

$$T_n'' + n^2 T_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \operatorname{sen} nx \, dx = \frac{2[-1]^{n+1}}{n}, \quad T_n(0) = T_n'(0) = 0 \rightarrow$$

$$T_n = c_1 \cos nt + c_2 \operatorname{sen} nt + \frac{2[-1]^{n+1}}{n^3} \stackrel{d.i.}{\rightarrow} u(x, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[-1]^{n+1}}{n^3} [1 - \cos nt] \operatorname{sen} nx.$$

O con un problema homogéneo, hallando una solución $v(x)$ de la EDP que cumpla los datos de contorno: $-v'' = x$, $v(0) = v(\pi) = 0 \rightarrow v = \frac{1}{6}(\pi^2 x - x^3)$.

$w = u - v$ lleva a $[P_1]$, con $f(x) = -v(x)$ y $g(x) = 0$, y así:

$$u = \frac{1}{6}(\pi^2 x - x^3) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[-1]^n}{n^3} \cos nt \operatorname{sen} nx, \text{ pues}$$

$$\frac{1}{3\pi} \int_0^{\pi} (x^3 - \pi^2 x) \operatorname{sen} nx \, dx = \frac{2[-1]^n}{n^3}.$$

Ambas series nos dan la solución $\forall(x, t)$, pero el problema es obtener (sin ordenador) información sobre ellas. Por ejemplo, ¿qué aspecto tendrá:

$$u(x, \pi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{(2m-1)^3} \operatorname{sen}(2m-1)x = \frac{1}{6}(\pi^2 x - x^3) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3} \operatorname{sen} nx?$$

Se puede decir con D'Alembert. Si f^* extensión impar y 2π -periódica de $-v$,

$$w(x, \pi) = \frac{1}{2}[f^*(x + \pi) + f^*(x - \pi)] = f^*(x - \pi) = -v(x - \pi) \text{ si } x \in [0, \pi] \rightarrow$$

$$u(x, \pi) = v(x) - v(x - \pi) = \frac{\pi}{2}x(\pi - x) \quad (\text{parábola con máximo en } x = \frac{\pi}{2} \text{ fácil de dibujar}).$$

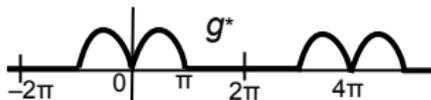
Condiciones en la u_x (extremo libre)

El dato $u_x=0$ indica que el extremo de la cuerda se mueve verticalmente con libertad (imaginemos una anilla engrasada y una varilla vertical). Y ya dijimos en 1.4 que las extensiones entonces son **pares**.

Ej 4.

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, & x \in [0, 2\pi], t \in \mathbf{R} \\ u(x,0)=0, & u_t(x,0)=\begin{cases} \sin x, & x \in [0, \pi] \\ 0, & x \in [\pi, 2\pi] \end{cases} \\ u_x(0,t)=u_x(2\pi,t)=0 \end{cases}$$

Hallemos $u(x, 2\pi)$, usando D'Alembert y separando variables.



$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, & x, t \in \mathbf{R} \\ u(x,0)=0, & u_t(x,0)=g^*(x) \text{ con } g^* \text{ par y } 4\pi\text{-periódica.} \end{cases}$$

$$u(x, 2\pi) = \frac{1}{2} \int_{x-2\pi}^{x+2\pi} g^* = \frac{1}{2} \int_{-2\pi}^{2\pi} g^* = \int_0^{\pi} \sin s ds = 2.$$

Separando variables:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X'(0) = X'(2\pi) = 0 \rightarrow \lambda_n = \frac{n^2}{4}, \quad X_n = \left\{ \cos \frac{nx}{2} \right\}, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$\begin{cases} T'' + \lambda_n T = 0 \\ T(0) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T_0 = \{t\} \\ T_n = \left\{ \sin \frac{nt}{2} \right\}, n \geq 1 \end{cases} \rightarrow u(x, t) = \frac{a_0}{2} t + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{nt}{2} \cos \frac{nx}{2}.$$

Como $u(x, 2\pi) = a_0 \pi$ basta hallar este coeficiente.

$$u_t(x, 0) = \frac{a_0}{2} + \sum \dots \rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{2}{\pi} \rightarrow u(x, 2\pi) = 2.$$

Ej 6.

$$\begin{aligned} u_{tt} + 4u_t - u_{xx} &= 0, \quad x \in [0, \pi], \quad t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) &= \sin 2x \\ u_t(x, 0) &= u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{aligned}$$

La ecuación nueva lleva a comenzar separando variables:

$$u = XT \rightarrow \frac{T'' + 4T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda \rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}, \quad \lambda_n = n^2, \quad X_n = \{\sin nx\},$$

$$n = 1, 2, \dots \rightarrow T'' + 4T' + n^2T = 0, \quad \mu = -2 \pm \sqrt{4 - n^2} \rightarrow$$

$$T_1 = c_1 e^{(-2 + \sqrt{3})t} + c_2 e^{(-2 - \sqrt{3})t}, \quad T_2 = (c_1 + c_2 t) e^{-2t},$$

$$T_{n \geq 3} = e^{-2t} (c_1 \cos \sqrt{n^2 - 4}t + c_2 \sin \sqrt{n^2 - 4}t).$$

Probamos $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin nx$, además con los datos iniciales:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin nx = \sin 2x, \quad u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} T'_n(0) \sin nx = 0$$

$\rightarrow T_n(t) \equiv 0$, si $n \neq 2$. Sólo es no nula T_2 , para la que debe ser

$$T_2(0) = c_1 = 1$$

$$T'_2(0) = c_2 - 2c_1 = 0 \rightarrow u(x, t) = (1 + 2t) e^{-2t} \sin 2x.$$

[La cuerda con rozamiento tiende a pararse].

Ondas en el espacio

La ecuación de ondas en el plano o el espacio y coordenadas no cartesianas (y la del calor) dan lugar a ecuaciones que no son $X'' + \lambda X = 0$ y precisan la teoría general del capítulo 3. Los problemas en más variables se verán en 4.4, pero podemos resolver ya alguno si se reduce a uno de 2 variables.

Por ejemplo, la ecuación $u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$ en esferas lleva, en general, a una EDP en 4 variables (el tiempo t y las r, θ, ϕ), cuyas soluciones se fijan con unos datos de contorno y un par de condiciones iniciales. Las soluciones que no dependen de los ángulos siguen la **ecuación de ondas en el espacio con simetría radial** (ya tratada en 1.4). Vamos a resolver este problema (vibraciones entre dos superficies esféricas):

$$[P_2] \begin{cases} u_{tt} - u_{rr} - \frac{2}{r}u_r = 0, & 1 \leq r \leq 2, t \in \mathbf{R} \\ u(r, 0) = f(r), \quad u_t(r, 0) = g(r) \\ u(1, t) = u(2, t) = 0 \end{cases}$$

$$u(r, t) = R(r)T(t) \rightarrow \frac{R'' + \frac{2R'}{r}}{R} = \frac{T''}{T} = -\lambda \rightarrow \begin{cases} rR'' + 2R' + \lambda rR = 0, & R(1) = R(2) = 0 \\ T'' + \lambda T = 0 \end{cases}$$

Vimos la ecuación de R en 3.1 (allí asociada a un problema singular, aquí es regular). Se resolvía con el cambio $S = rR$:

$$\begin{cases} S'' + \lambda S = 0 \\ S(1) = S(2) = 0 \end{cases} \xrightarrow{r=s+1} \begin{cases} S'' + \lambda S = 0 \\ S(0) = S(1) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = n^2 \pi^2 \rightarrow R_n = \left\{ \frac{\text{sen } n\pi r}{r} \right\}.$$

Para esos λ las soluciones para T son $T_n = \{\cos n\pi t, \text{sen } n\pi t\}$.

Probamos, pues: $u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [k_n \cos n\pi t + c_n \sin n\pi t] \frac{\sin n\pi r}{r}$.

Además: $\sum_{n=1}^{\infty} k_n \frac{\sin n\pi r}{r} = f(r)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} n\pi c_n \frac{\sin n\pi r}{r} = g(r)$. (•)

Para desarrollar en las R_n se precisa: $[r^2 R']' + \lambda r^2 R = 0$.

Como $\langle R_n, R_n \rangle = \int_1^2 r^2 \frac{\sin^2 n\pi r}{r^2} dr = \frac{1}{2}$ y $\langle f, R_n \rangle = \int_1^2 r^2 f(r) \frac{\sin n\pi r}{r} dr$,

$$k_n = 2 \int_1^2 r f(r) \sin n\pi r dr \quad \text{y} \quad c_n = \frac{2}{n\pi} \int_1^2 r g(r) \sin n\pi r dr .$$

Evidentemente se llega a lo mismo (aquí es mucho más corto, pero otras veces no habrá atajos y hay que conocer la teoría general) observando que las condiciones (•) se podrían haber reescrito así:

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_n \sin n\pi r = r f(r) \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n\pi c_n \sin n\pi r = r g(r) .$$

De hecho, todo se simplifica mucho con el cambio de variable de 1.4:

$$u = \frac{v}{r} \rightarrow \begin{cases} v_{tt} - v_{rr} = 0 \\ v(r, 0) = r f(r), v_t(r, 0) = r g(r), v(1, t) = v(2, t) = 0 \end{cases} ,$$

que es casi igual que el primero visto en esta sección.

[Las ondas en **plano** con simetría satisfacen $u_{tt} - u_{rr} - \frac{1}{r} u_r = 0$ y la ecuación en R es $rR'' + R' + \lambda r R = 0$, que (lo vimos en 3.1) está asociada a las funciones de **Bessel**].