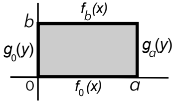
Dirichlet en rectángulo:

$$[\mathrm{P}_{dr}]\begin{cases}\Delta u=F(x,y)\,,\ \text{en } (0,a)\times(0,b)\\ u(x,0)=f_o(x),\ u(x,b)=f_b(x)\\ u(0,y)=g_o(y),\ u(a,y)=g_a(y)\end{cases}$$



Basta resolver los 5 subproblemas (4 homgéneos y el de F) que salen al anular 4 funciones y sumar sus soluciones (bastan menos, pues sólo se precisan 2 datos de contorno nulos, y atajan cambios $w=u-v$). Resolvemos uno **homogéneo** (los otros son similares, dos de ellos con Y_n):

$$\boxed{\begin{cases}u_{xx}+u_{yy}=0\,,\ \text{en } (0,a)\times(0,b)\\ u(x,0)=f_o(x)\,,\ u(x,b)=u(0,y)=u(a,y)=0\end{cases}}$$

$$u=XY\rightarrow X''Y+XY''=0\rightarrow -\frac{X''}{X}=\frac{Y''}{Y}=\lambda\,,\ \begin{cases}X''+\lambda X=0\\ Y''-\lambda Y=0\end{cases}.$$

$$X(0)=X(a)=0\rightarrow \lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{a^2}\,,\ X_n=\Big\{\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}\Big\}\,,\ n=1,2,\dots\ \rightarrow$$

$$Y_n=c_1\,e^{n\pi y/a}+c_2\,e^{-n\pi y/a}\,.\ \text{Como } u(x,b)=0\rightarrow Y(b)=0$$

$$\rightarrow Y_n=c_1 e^{n\pi b/a}\big(e^{n\pi[y-b]/a}-e^{n\pi[b-y]/a}\big)=\Big\{\operatorname{sh}\frac{n\pi[b-y]}{a}\Big\}\,.$$

Probamos: $\boxed{u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\operatorname{sh}\frac{n\pi[b-y]}{a}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}}$ y debe ser:

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\operatorname{sh}\frac{n\pi b}{a}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}=f_o(x)\rightarrow c_n\operatorname{sh}\frac{n\pi b}{a}=\frac{2}{a}\int_0^a f_o(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}\,dx\,.$$

X e Y son intercambiables. En calor y ondas las autofunciones eran siempre X_n (las condiciones de T eran iniciales). Para Laplace en polares, aunque tanto R como Θ tendrán condiciones de contorno, la EDO de la Θ será más sencilla y dará siempre las autofunciones.

Al Dirichlet **no homogéneo** llevaremos las autofunciones que sugiera la F:

$$\boxed{\begin{cases} \Delta u = F(x,y)\,,\ \text{en } (0,a)\times(0,b) \\ u(x,0)=u(x,b)=u(0,y)=u(a,y)=0 \end{cases}}$$

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{a} \quad \text{ó} \quad u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi y}{b}$$

Neumann no homogéneo: $\boxed{[\mathrm{P}_{nr}]\ \begin{cases} \Delta u = F(x,y)\,,\ \text{en } (0,\pi)\times(0,\pi) \\ u_y(x,0)=u_y(x,\pi)=u_x(0,y)=u_x(\pi,y)=0 \end{cases}}$.

$X''+\lambda X=0$, $Y''-\lambda Y=0$ con $X'(0)=X'(\pi)=0$, $Y'(0)=Y'(\pi)=0$, da de nuevo dos familias $\{\cos nx\}$ ó $\{\cos ny\}$, $n=0,1,\dots$ Elegimos, por ejemplo:

$$u(x,y)=X_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\cos ny \to$$

$$X_0''+\sum_{n=1}^{\infty}[X_n''-n^2X_n]\cos ny=\frac{B_0(x)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}B_n(x)\cos ny\,,\ B_n(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}F\cos ny\,dy\,.$$

Debemos resolver los infinitos problemas de contorno:

$$X_0''=\tfrac{1}{2}B_0=\tfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}F\,dy\,,\ \ X_n''-n^2X_n=B_n\ ,\ n\geq 1\,,\ \text{con } X_n'(0)=X_n'(\pi)=0\,.$$

Las X_n quedan determinadas. Pero $X_0''=0$, $X_0'(0)=X_0'(\pi)=0$ tiene infinitas soluciones ($\{1\}$) y según 3.3, debe ser $\int_0^{\pi}1\cdot B_0(x)\,dx=\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}F(x,y)\,dx\,dy=0$ para tener solución. Entonces hay infinitas que difieren en una constante.

[Todo coherente con lo que sabíamos sobre Neumann desde 1.3].

Ej 1. Calculemos la solución de [P$_{nr}$] en el caso de que $\boxed{F(x,y)=x-a}$.

El problema sólo tiene solución si $\iint_\square F=0$, o sea, si $a=\frac{\pi}{2}$.

Queda $X_0''=x-\frac{\pi}{2}$ $\big(F$ ya desarrollada en $\{\cos ny\}$ $\Rightarrow X_n\equiv 0,\ n\geq 1\big)$.

Integrando y utilizando $X_0'(0)=X_0'(\pi)=0$: $\boxed{u=\frac{1}{6}x^3-\frac{\pi}{4}x^2+C}$.

A partir de $u=\sum_{n=0}^{\infty}Y_n(y)\cos nx$ habría que poner $F=x-\frac{\pi}{2}$ en serie de $\cos nx$:

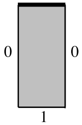
$$B_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos nx\,dx=\begin{cases}0, & \text{si } n=0,2,4,\dots\\ -\frac{4}{\pi n^2}, & \text{si } n=1,3,\dots\end{cases}$$

$$Y_0''+\sum_{n=1}^{\infty}[Y_n''-n^2Y_n]\cos nx=\sum_{m=1}^{\infty}B_{2m-1}\cos(2m-1)x \;\rightarrow$$

$$\begin{cases}Y_0''=0\\ Y_0'(0)=Y_0'(\pi)=0\end{cases}\rightarrow Y_0=C. \qquad \begin{cases}Y_{2m}''-4m^2Y_{2m}=0\\ Y_{2m}'(0)=Y_{2m}'(\pi)=0\end{cases}\rightarrow Y_{2m}=0.$$

$$\begin{cases}Y_{2m-1}''-(2m-1)^2Y_{2m-1}=B_{2m-1}\\ Y_{2m-1}'(0)=Y_{2m-1}'(\pi)=0\end{cases}\rightarrow Y_{2m-1}=-\frac{B_{2m-1}}{(2m-1)^2}.$$

Otra forma de la solución es $u(x,y)=C+\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(2m-1)x}{(2m-1)^4}$.



Ej 2. $\boxed{\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0\,,\ (x,y)\in(0,1)\times(0,\pi) \\ u(x,0)=u_y(x,\pi)=u(0,y)=0\,,\ u(1,y)=1 \end{cases}}$

$$u=XY \to \begin{cases} Y''+\lambda Y=0\,,\ Y(0)=Y'(\pi)=0 \\ X''-\lambda X=0\,,\ X(0)=0 \searrow \end{cases},\ Y_n=\left\{\operatorname{sen}\frac{(2n-1)y}{2}\right\},$$

$$\lambda_n=\frac{(2n-1)^2}{4}\,.\ X=c_1e^{(2n-1)x/2}+c_2e^{-(2n-1)x/2},\ X_n=\left\{\operatorname{sh}\frac{(2n-1)x}{2}\right\}.$$

Probamos $u(x,y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_nX_n(x)Y_n(y)$. Imponiendo $u(1,y)=1$:

$$c_n\operatorname{sh}\frac{2n-1}{2}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)y}{2}\,dy=\frac{4}{\pi(2n-1)} \to$$

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n-1)\operatorname{sh}\frac{2n-1}{2}}\operatorname{sh}\frac{(2n-1)x}{2}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)y}{2}\,.$$

Si nos gustan más los datos de contorno para x se puede hacer:

$$w=u-x \to \begin{cases} w_{xx}+w_{yy}=0 \\ w(x,0)=-x\,,\ w_y(x,\pi)=0 \\ w(0,y)=w(1,y)=0 \end{cases} \to \begin{cases} X''+\lambda X=0\,,\ X(0)=X(1)=0 \\ Y''-\lambda Y=0\,,\ Y'(\pi)=0 \end{cases}$$

$$\to \lambda_n=n^2\pi^2,\ X_n=\{\operatorname{sen}n\pi x\}\,,\ Y_n=\{\operatorname{ch}[n\pi(\pi-y)]\}\,.$$

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}k_nX_n(x)Y_n(y)\cdots\to u(x,y)=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{\pi n\operatorname{ch}[n\pi^2]}\operatorname{ch}[n\pi(\pi-y)]\operatorname{sen}n\pi x\,.$$

La unicidad en EDPs es complicada y un problema nuevo podría no tenerla. Como en el este ejemplo (de una ecuación de ‘Helmholtz’, muy asociada a los problemas de más de dos variables):

Ej 3. $\boxed{\begin{cases} \Delta u+u=0\,,\ (x,y)\in(0,\pi)\times\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right) \\ u_y\left(x,-\frac{\pi}{4}\right)=u_y\left(x,\frac{\pi}{4}\right)=u(0,y)=0\,,\ u(\pi,y)=\operatorname{sen}2y \end{cases}}$

Como es ecuación nueva, empezamos separando variables:

$$u=XY \to \frac{X''}{X}+1=-\frac{Y''}{Y}=\lambda \to \begin{cases} Y''+\lambda Y=0 \\ Y'\left(-\frac{\pi}{4}\right)=Y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=0 \end{cases} \xrightarrow{s=y+\frac{\pi}{4}}$$

$$\begin{cases} Y''+\lambda Y=0 \\ Y'(0)=Y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases} \to \lambda_n=4n^2,\ Y_n=\left\{\cos 2n\left(y+\tfrac{\pi}{4}\right)\right\},\ n=0,1,\dots$$

$$X''+(1-\lambda_n)X=0\,,\ X(0)=0 \to \begin{array}{l} X_0=\{\operatorname{sen}x\} \\ X_n=\left\{\operatorname{sh}\left(\sqrt{4n^2-1}\,x\right)\right\},\ n\geq 1\,. \end{array}$$

$$u(x,y)=c_0\operatorname{sen}x+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\operatorname{sh}\left(\sqrt{4n^2-1}\,x\right)\cos\left(2ny+\frac{n\pi}{2}\right)\Big|_{x=\pi}=\operatorname{sen}2y$$

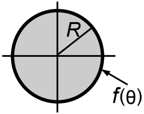
$$\to c_0 \text{ indeterminado},\quad c_1\operatorname{sh}\left(\sqrt{3}\pi\right)=1\,,\quad c_n=0\,,\ n>1\,.$$

Tiene **infinitas soluciones**: $u(x,y)=C\operatorname{sen}x+\frac{\operatorname{sh}(\sqrt{3}\,x)}{\operatorname{sh}(\sqrt{3}\,\pi)}\operatorname{sen}2y\,.$

Laplace en polares

Dirichlet homogéneo en un círculo:

$$[\mathrm{P}_D]\begin{cases}\Delta u=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0\,,\ \text{en } r<R\\ u(R,\theta)=f(\theta)\,,\ \theta\in[0,2\pi)\end{cases}$$



$$u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)\to\frac{r^2R''+rR'}{R}=-\frac{\Theta''}{\Theta}=\lambda\to\begin{cases}\Theta''+\lambda\Theta=0\\ r^2R''+rR'-\lambda R=0\end{cases}$$

No se ven condiciones para Θ, pero $u(r,\theta)$ debe ser de **periódo** 2π en θ, es decir, $\Theta(0)=\Theta(2\pi)$, $\Theta'(0)=\Theta'(2\pi)$ $\to$

$$\lambda_n=n^2,\ n=0,1,2,\dots\,,\quad \Theta_0(\theta)=\{1\}\,,\ \Theta_n(\theta)=\{\cos n\theta,\operatorname{sen} n\theta\}\,.$$

Las soluciones para R son (ecuaciones de Euler):

$$R_0(r)=c_1+c_2\ln r\quad\text{y}\quad R_n(r)=c_1r^n+c_2r^{-n}\ \text{ si } n\geq1\,.$$

La solución debe estar **acotada si** $r\to0$ por razones físicas y matemáticas (debe ser C^2), así es $c_2=0$ en ambos casos.

Probamos: $$\boxed{u(r,\theta)=\frac{a_o}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}r^n\big[a_n\cos n\theta+b_n\operatorname{sen} n\theta\big]}$$

Debe ser: $$u(R,\theta)=\frac{a_o}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}R^n\big[a_n\cos n\theta+b_n\operatorname{sen} n\theta\big]=f(\theta)\to$$

$$\boxed{a_n=\frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi}f(\theta)\cos n\theta\,d\theta\underset{n=0,1,\dots}{}\,,\quad b_n=\frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi}f(\theta)\operatorname{sen} n\theta\,d\theta\underset{n=1,2,\dots}{}}$$

Llevando a la serie: $u=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{R^n}\cos n(\theta-\phi)\Big]f(\phi)\,d\phi$

Como $1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n\cos n\alpha}{R^n}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{re^{i\alpha}}{R}\Big)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{re^{-i\alpha}}{R}\Big)^n=\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos\alpha}$.

Es $$\boxed{u(r,\theta)=\frac{R^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\phi)\,d\phi}{R^2-2Rr\cos(\theta-\phi)+r^2}}$$ **fórmula integral de Poisson**

Haciendo $r=0$ deducimos $u(0,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\phi)\,d\phi$. (Si $\Delta u=0$, u en el centro del círculo vale la media de los valores en su borde).

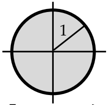
Se prueba que si f es continua a trozos, en $r<R$ la u de la serie (o de la integral) es C^∞ (aunque f sea discontinua), que es $\Delta u=0$ y que toma el valor en $r=R$ con continuidad en los θ en que es continua f (y sigue habiendo unicidad). (Situación análoga se da para el [P$_{dr}$]).

Siempre a los problemas **no homogéneos** (como el siguiente) se llevan series de autofunciones del problema homogéneo, que en el círculo son:

$$\boxed{u(r,\theta)=a_0(r)+\sum_{n=1}^{\infty}\big[a_n(r)\cos n\theta+b_n(r)\,\mathrm{sen}\,n\theta\big]}$$

Ejemplo de Dirichlet **no homogéneo** en un círculo

$$\boxed{[\mathrm{P}_{nc}]\begin{cases} u_{rr}+\frac{u_r}{r}+\frac{u_{\theta\theta}}{r^2}=4\,,\ \text{en } r<1\\ u(1,\theta)=\cos 2\theta\end{cases}} \;\rightarrow$$



$$a_0''+\tfrac{1}{r}a_0'+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\big[a_n''+\tfrac{1}{r}a_n'-\tfrac{n^2}{r^2}a_n\big]\cos n\theta+\big[b_n''+\tfrac{1}{r}b_n'-\tfrac{n^2}{r^2}b_n\big]\operatorname{sen} n\theta\Big)=4\,.$$

[Ya desarrollada en estas autofunciones].

Haby que resolver las ecuaciones de Euler:

$$ra_0''+a_0'=4r\,,\ r^2a_n''+ra_n'-n^2a_n=0\,,\ r^2b_n''+rb_n'-n^2b_n=0\,.$$

La condición $u(1,\theta)=\cos 2\theta$ (también desarrollada) impone:

$$b_n(1)=0\ \forall n\,,\ \ a_2(1)=1\,,\ \ a_n(1)=0\,,\ n\neq 2\,.$$

La acotación cuando $r\to 0$ será la otra condición que habrá que imponer.

La a_{0p} se puede hallar con la fórmula de variación de las constantes:

$$\begin{vmatrix}1 & \ln r\\ 0 & 1/r\end{vmatrix}=\frac{1}{r}\ ,\quad a_{0p}=\ln r\int\frac{1\cdot 4\,dr}{1/r}-\int\frac{\ln r\cdot 4\,dr}{1/r}=r^2\ .$$

o, mejor, tanteando, pues (la de coeficientes constantes la tiene del tipo Ae^{2s}) tiene una $a_{0p}=Ar^2$ ($\rightarrow 2A+2A=4\,,\ A=1$).

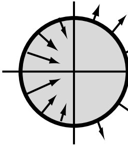
Así: $a_0=c_1+c_2\ln r+r^2\xrightarrow{\text{acotada}}c_2=0\xrightarrow{a_0(1)=0}c_1=-1\,.$

Para a_2 : $a_2=c_1r^2+c_2r^{-2}\xrightarrow{\text{acotada}}c_2=0\xrightarrow{a_2(1)=1}c_1=1\,.$

$$\boxed{u=r^2-1+r^2\cos 2\theta}\,.$$

No necesitamos resolver más problemas para asegurar ya que el resto de a_n y las b_n son cero (0 es solución y no hay más por tener un problema de Dirichlet solución única).

$$[P_N]\begin{cases}\Delta u=0\,,\ \text{en}\ \ r<R\\ u_r(R,\theta)=f(\theta)\,,\ \theta\in[0,2\pi)\end{cases}$$



El problema de contorno y la ecuación de Euler son las mismas que en $[P_D]$, luego probamos:

$$\boxed{u(r,\theta)=\frac{a_o}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}r^n\big[a_n\cos n\theta+b_n\operatorname{sen}n\theta\big]}\ .$$

$$u_r(R,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}nR^{n-1}\big[a_n\cos n\theta+b_n\operatorname{sen}n\theta\big]=f(\theta)\ ,\ \ \theta\in[0,2\pi)\ \rightarrow$$

$$\boxed{a_n=\frac{1}{n\pi R^{n-1}}\int_0^{2\pi}f(\theta)\cos n\theta\,d\theta\,,\ \ b_n=\frac{1}{n\pi R^{n-1}}\int_0^{2\pi}f(\theta)\operatorname{sen}n\theta\,d\theta\,,\ \ {\scriptstyle n=1,2,\ldots}}$$

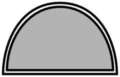
si no tiene término independiente el desarrollo de f en senos y cosenos. Es decir, una **condición necesaria** para que $[P_N]$ tenga solución por este método es que sea:

$$\boxed{\int_0^{2\pi}f(\theta)\,d\theta=0}\quad \Big[\text{confirma 1.3: debía ser }\oint_{\partial D}f\,ds=\iint_D F=0\,\Big].$$

Además, a_o **queda indeterminado** [típico de Neumann].

Neumannn no homogéneo en semicírculo

$$[\mathrm{P}_{Nn}] \begin{cases} \Delta u = F(r,\theta) \text{ en } r<1,\ 0<\theta<\pi \\ u_r(1,\theta)=u_\theta(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0 \end{cases}$$



Sus autofunciones las dan la ecuación en θ y los datos de contorno:

$$\begin{cases} \Theta''+\lambda\Theta=0 \\ \Theta'(0)=\Theta'(\pi)=0 \end{cases} \rightarrow\ \lambda_n=n^2,\ \Theta_n(\theta)=\{\cos n\theta\},\ n=0,1,2,\dots\ \rightarrow$$

$$\boxed{u(r,\theta)=R_o(r)+\sum_{n=1}^{\infty}R_n(r)\cos n\theta}$$

[La serie de cosenos y senos del $[\mathrm{P}_{nc}]$ no cumple los datos de contorno; aquí no hay periodicidad.]

$$R_o''+\tfrac{1}{r}R_0'+\sum_{n=1}^{\infty}\Big[R_n''+\tfrac{1}{r}R_n'-\tfrac{n^2}{r^2}R_n\Big]\cos n\theta=F(r,\theta)=B_o(r)+\sum_{n=1}^{\infty}B_n(r)\cos n\theta\,,$$

$$\text{con}\quad B_o(r)=\tfrac{1}{\pi}\int_0^\pi F(r,\theta)\,d\theta \quad \text{y} \quad B_n(r)=\tfrac{2}{\pi}\int_0^\pi F(r,\theta)\cos n\theta\,d\theta\,.$$

Resolvemos $rR_o''+R_o'=\big[rR_o'\big]'=rB_o(r)$ y $r^2R_n''+rR_n'-n^2R_n=r^2B_n(r)$,

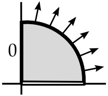
con los datos de contorno (singulares): R_n acotada en 0 y $R_n'(1)=0$.

Si $n\geq 1$ hay solución única del homogéneo y del no homogéneo.

Pero si $n\geq 0$: $rR_o''+R_o'=0\ \rightarrow\ R_o=c_1+c_2\ln r \xrightarrow[R'(1)=0]{R \text{ acotada}} R_{oh}=\{1\}\ \rightarrow$

hay $\begin{matrix}\text{infinitas soluciones}\\ \text{ninguna solución}\end{matrix}$ R_o del no homogéneo según sea $\int_0^1 rB_o\,dr \begin{matrix}=0\\ \neq 0\end{matrix}$.

Ej 5. $\boxed{\begin{cases} \Delta u=0\,,\ r<1\,,\ \theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \\ u_r(1,\theta)=1\,,\ u_\theta(r,0)=u(r,\frac{\pi}{2})=0 \end{cases}}$ $\rightarrow$



$\begin{cases} \Theta''+\lambda\Theta=0\,,\ \Theta'(0)=\Theta\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \\ r^2R''+rR'-\lambda R=0\,,\ R \text{ acotada} \end{cases}$, $\lambda_n=(2n-1)^2,\ \Theta_n=\left\{\cos(2n-1)\theta\right\},$

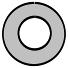
$R_n=r^{2n-1}\,,\quad n=1,2,\ldots \rightarrow$

$$u=\sum_{n=1}^{\infty} c_n r^{2n-1}\cos(2n-1)\theta\,,\ u_r(1,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)c_n\cos(2n-1)\theta=1 \rightarrow$$

$$c_n=\frac{4}{\pi(2n-1)^2}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi}{2}\,.\ \ u(r,\theta)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\,r^{2n-1}\cos(2n-1)\theta\,.$$

Ej 7. $\boxed{\begin{cases} \Delta u=0\,,\ 1<r<2 \\ u(1,\theta)=0,\, u_r(2,\theta)=1+\operatorname{sen}\theta \end{cases}}$ $\begin{cases} \Theta''+\lambda\Theta=0 \\ \Theta\ \ 2\pi\text{-per.} \end{cases} \rightarrow \lambda_n=n^2,\ {\scriptstyle n=0,1,\ldots}$

$\Theta_n=\{\cos n\theta\,,\operatorname{sen} n\theta\}.$



$$r^2R''+rR'-n^2R=0 \rightarrow \begin{array}{l} R_0=c_1+c_2\ln r \xrightarrow[R(1)=0]{} R_0=\{\ln r\} \\ R_n=c_1r^n+c_2r^{-n} \longrightarrow R_n=\{r^n-r^{-n}\} \end{array} \rightarrow$$

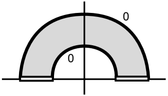
$$u(r,\theta)=a_0\ln r+\sum_{n=1}^{\infty}\left(r^n-r^{-n}\right)[a_n\cos n\theta+b_n\operatorname{sen} n\theta]\,.$$

$$u_r(2,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}n\left(2^{n-1}+2^{-n-1}\right)[a_n\cos n\theta+b_n\operatorname{sen} n\theta]=1+\operatorname{sen}\theta$$

$$\rightarrow a_0=2\,,\ \tfrac{5}{4}b_1=1\ \text{ y el resto cero } \rightarrow\ u=2\ln r+\tfrac{4}{5}\left(r-r^{-1}\right)\operatorname{sen}\theta\,.$$

En el último ejemplo no hay datos implícitos. Todos están a la vista: Al no tocar el origen (como en el Ej 7) la acotación se sustituye por dato en $r=1$. Y hay datos en 0 y π y no periodicidad al no dar la vuelta completa.

Ej 8. $\boxed{\begin{cases} \Delta u=\cos\theta\,,\ \ 1<r<2\,,\ 0<\theta<\pi \\ u(1,\theta)=u(2,\theta)=u_\theta(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0 \end{cases}}$



Las autofunciones del homogéno las son los cosenos del [P$_{Nn}$].

Probamos entonces la serie: $u(r,\theta)=R_0(r)+\sum_{n=1}^{\infty}R_n(r)\cos n\theta \;\rightarrow$

$$R_o''+\tfrac{1}{r}R_0'+\sum_{n=1}^{\infty}\big[R_n''+\tfrac{1}{r}R_n'-\tfrac{n^2}{r^2}R_n\big]\cos n\theta=\cos\theta \text{ [ya desarrollado].}$$

Las condiciones para R_n las dan los otros datos de contorno:

$$\sum_{n=0}^{\infty}R_n(1)\Theta_n(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}R_n(2)\Theta_n(\theta)=0 \Rightarrow R_n(1)=R_n(2)=0\ \forall n\,.$$

Por la unicidad de los problemas mixtos todos los $R_n\equiv 0$ menos R_1:

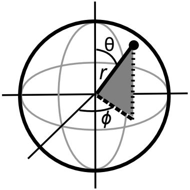
$r^2R_1''+rR_1'-R_1=r^2$ con los datos de contorno nulos de arriba.

$$R_{1p}=Ar^2 \text{ [}\mu=2 \text{ no autovalor]} \rightarrow A=\tfrac{1}{3}\,,\ R_1=c_1r+c_2r^{-1}+\tfrac{1}{3}r^2 \xrightarrow{\text{c.c.}}$$

$c_1=-\frac{7}{9}$, $c_2=\frac{4}{9}$. La solución es $u(r,\theta)=\big(\frac{1}{3}r^2-\frac{7}{9}r+\frac{4}{9}r^{-1}\big)\cos\theta$.

Suponiendo que los **datos no dependen de** ϕ:

$$\boxed{\begin{cases} u_{rr}+\frac{2}{r}u_r+\frac{1}{r^2}\left[u_{\theta\theta}+\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}u_\theta\right]=0\,,\ r<R \\ u(R,\theta)=f(\theta)\,,\ \theta\in[0,\pi] \end{cases}}$$



que sólo tiene **dos variables**. Separándolas:

$$u=R(r)\,\Theta(\theta)\ \rightarrow\ \begin{cases} r^2R''+2rR'-\lambda R=0 \\ \Theta''+\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\,\Theta'+\lambda\,\Theta=0 \end{cases}$$

El cambio $s=\cos\theta$ $\left[\Theta'=-\operatorname{sen}\theta\frac{d\Theta}{ds}\,,\ \Theta''=\operatorname{sen}^2\theta\frac{d^2\Theta}{ds^2}-\cos\theta\frac{d\Theta}{ds}\right]$ lleva a:

$$\left(1-s^2\right)\frac{d^2\Theta}{ds^2}-2s\frac{d\Theta}{ds}+\lambda\Theta=0\,,$$ **ecuación de Legendre**.

Debe Θ estar **acotada en** $s=\pm1$ [$\theta=0,\pi$ polos de la esfera].

Son los autovalores del problema singular $\lambda_n=n(n+1)$, $n=0,1,\ldots$
y sus autofunciones los $\{P_n(s)\}=\{P_n(\cos\theta)\}$ de Legendre.

$$\left[P_0=1\,,\ P_1=\cos\theta\,,\ P_2=\tfrac{3}{2}\cos^2\theta-\tfrac{1}{2}\,,\ P_3=\tfrac{5}{2}\cos^3\theta-\tfrac{3}{2}\cos\theta\,,\ \ldots\right]$$

Para estos λ: $r^2R''+2rR'-n(n+1)R=0\ \rightarrow\ \mu=n,-(n+1)$

$$\rightarrow\ R_n=c_1r^n+c_2r^{-(n+1)}\ \xrightarrow{R\text{ acotada}}\ R_n=\{r^n\}\,,\ n=0,1,\ldots$$

Probamos $\boxed{u=\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos\theta)} \to \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n P_n(\cos\theta)=f(\theta) \to$

$$\boxed{a_n=\frac{2n+1}{2R^n}\int_0^{\pi} f(\theta)\,P_n(\cos\theta)\operatorname{sen}\theta\,d\theta}\ ,\ n=0,1,\dots,$$

pues $r(\theta)=\operatorname{sen}\theta$ es el **peso** $\big[\,(\operatorname{sen}\theta\,\Theta')'+\lambda\operatorname{sen}\theta\,\Theta=0\,\big]$ y se cumple:

$$\int_0^{\pi}\big[P_n(\cos\theta)\big]^2\operatorname{sen}\theta\,d\theta \overset{s=\cos\theta}{=} \int_{-1}^{1}\big[P_n(s)\big]^2 ds=\frac{2}{2n+1}\,.$$

Ej 9. Si $\boxed{R=1 \text{ y } f(\theta)=\cos^2\theta}$ es: $a_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} s^2 P_n(s)\,ds \to$

$$a_0=\tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1}s^2\,ds=\tfrac{1}{3}\ ,\ a_2=\tfrac{5}{2}\int_{-1}^{1}\big[\tfrac{3}{2}s^4-\tfrac{1}{2}s^2\big]ds=\tfrac{2}{3}\quad \text{y resto de } a_n=0$$

$\big[\,P_1$ es impar ($\Rightarrow a_1=0$), y para s^2 bastan P_0, P_1 y $P_2\,\big]$.

La solución es: $u(r,\theta)=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}r^2+r^2\cos^2\theta \ \ \big[=\tfrac{1}{3}(1-x^2-y^2+2z^2)\big]$.

Para un dato como este se pueden determinar los coeficientes tanteando:

$$\cos^2\theta=\tfrac{2}{3}\underbrace{\big(\tfrac{3}{2}\cos^2\theta-\tfrac{1}{2}\big)}_{P_2(\cos\theta)}+\tfrac{1}{3} \to a_2=\tfrac{2}{3}\ ,\ a_0=\tfrac{1}{3}\ ,\ \text{como antes.}$$

Para la unicidad, las condiciones en el infinito han de ser distintas:

plano:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \text{ si } r > R \\ u(R,\theta) = f(\theta),\ 0 \le \theta < 2\pi \\ u \text{ acotada cuando } r \to \infty \end{cases}$$

espacio:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \text{ si } r > R \\ u(R,\theta) = f(\theta),\ 0 \le \theta \le \pi \\ u \to 0 \text{ cuando } r \to \infty \end{cases}$$

Las Θ_n son las mismas que las de los problemas interiores:

$\{\Theta_n\} = \{\cos n\theta, \operatorname{sen} n\theta\}$, $n=0,1,\ldots$ $\qquad$ $\{\Theta_n\} = \{P_n(\cos\theta)\}$, $n=0,1,\ldots$

Pero son diferentes las R_n, para las condiciones en el infinito:

$n=0$, $c_1 + c_2 \ln r \to R_0 = \{1\}$ $\qquad$ $n=0$, $c_1 + c_2 r^{-1} \to R_0 = \{r^{-1}\}$

$n>0$, $c_1 r^n + c_2 r^{-n} \to R_n = \{r^{-n}\}$ $\qquad$ $n>0$, $c_1 r^n + c_2 r^{-(n+1)} \to R_n = \{r^{-(n+1)}\}$

[En el plano ningún $R_0 \to 0$, y en el espacio están acotadas 1 y r^{-1}; tender a 0 no daría soluciones en R^2 y pedir acotación infinitas en R^3].

Probando series e imponiendo $u(R,\theta) = f(\theta)$ tenemos las soluciones:

$$u = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n}\big[a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta\big] \qquad u = \frac{a_0}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^{-(n+1)} P_n(\cos\theta)$$

$$a_n = \frac{R^n}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta\, d\theta, \quad n=0,1,\ldots$$

$$b_n = \frac{R^n}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\operatorname{sen} n\theta\, d\theta, \quad n=1,2,\ldots$$

$$a_n = \frac{(2n+1)R^{n+1}}{2}\int_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos\theta)\operatorname{sen}\theta\, d\theta \qquad n=0,1,\ldots$$

Ej 10. Hallemos la solución en ambos casos para $\boxed{f(\theta)=k}$ constante.

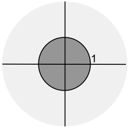
Basta mirar las series: $\boxed{u=k}$ en el plano. $\boxed{u=\frac{kR}{r}}$ en el espacio.

[Interpretemos los resultados como soluciones estacionarias del calor. Si se mantiene la superficie de una bola de radio R a $k°$, la temperatura de los puntos del espacio será kR/r, disminuyendo con la distancia a la bola. En el otro, en vez de imaginar un mundo bidimensional, pensemos en el espacio con datos y soluciones independientes de z: si la superficie de un cilindro infinito se conserva a $k°$, todo el espacio se pondrá a esa temperatura].

[En el interior $r<R$, tanto en el plano como en el espacio, es $u=k$].

Ej 11. Si $\boxed{R=1 \text{ y } f(\theta)=\cos^2\theta}$, resolvamos y comparamos con $r<1$.

En el plano, interior y exterior dan la misma condición:



$$u(1,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos n\theta+b_n\operatorname{sen} n\theta\right]=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta \;\rightarrow$$

$$u=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}r^2\cos 2\theta \text{ (interior)}, \quad u=\frac{1}{2}+\frac{1}{2r^2}\cos 2\theta \text{ (exterior)}.$$

Para el espacio, el interior se resolvió en el Ej 2. Y en el exterior la condición que aparece al hacer $r=1$ vuelve a ser la del interior. Es:

$$u=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}r^2+r^2\cos^2\theta \text{ (interior)}, \quad u=\frac{1}{3r}-\frac{1}{3r^3}+\frac{1}{r^3}\cos^2\theta \text{ (exterior)}.$$

Reflexiones finales sobre la separación de variables

En todos los problemas vistos había una **EDP lineal** $L[u]=F$ y unas **condiciones adicionales lineales**, las EDPs eran '**separables**' y los recintos eran 'simples' (limitados por '*variable*$=$*cte*').

Cada problema tenían **dos condiciones de contorno** $C_k[u]=h_k$ y además una o dos condiciones iniciales o de contorno. Para Laplace en polares a veces las condiciones estaban implícitas (periodicidad o acotación). Hemos buscado **anular** las condiciones de contorno.

En todos los **problemas homogéneos** buscamos soluciones de la EDP del tipo $u=XT$, y ello nos condujo a unas **autofunciones** de un problema de contorno X_n y unas T_n soluciones de otra EDO **homogénea** (igual si era $u=XY$, $u=R\Theta$ ...). Construimos la serie $u(x,t)=\sum c_n X_n(x)T_n(t)$ y hallamos los c_n imponiendo el dato inicial (o datos, o los otros de contorno) y haciendo desarrollos de **Fourier**.

Para los **problemas no homogéneos** llevamos a la EDP (con la F desarrollada) una serie con **productos de las autofunciones del homogéneo por funciones a determinar de la otra variable**. (A veces debimos antes hallar las autofunciones, los primeros pasos en ambos tipos de problemas son iguales). Obtuvimos la solución resolviendo EDOs lineales **no homogéneas** con los datos que sacamos de las condiciones iniciales (o de las otras de contorno).

Supongamos, por ejemplo, que hay 3 datos lineales adicionales (como para el calor en la varilla finita) en nuestro problema:

$$[\mathrm{P}]\begin{cases} L[u]=F \\ M[u]=f\,,\ C_1[u]=h_1\,,\ C_2[u]=h_2 \end{cases}$$

Resolver [P] se puede reducir a resolver otros subproblemas más sencillos:

$$[\mathrm{P}_1]\begin{cases} L[u]=F \\ M[u]=0 \\ C_1[u]=0 \\ C_2[u]=0 \end{cases} \quad [\mathrm{P}_2]\begin{cases} L[u]=0 \\ M[u]=f \\ C_1[u]=0 \\ C_2[u]=0 \end{cases} \quad [\mathrm{P}_3]\begin{cases} L[u]=0 \\ M[u]=0 \\ C_1[u]=h_1 \\ C_2[u]=0 \end{cases} \quad [\mathrm{P}_4]\begin{cases} L[u]=0 \\ M[u]=0 \\ C_1[u]=0 \\ C_2[u]=h_2 \end{cases}$$

Si u_1, u_2, u_3, u_4 son sus soluciones, es claro que $u=u_1+u_2+u_3+u_4$ es solución de [P], pero conviene casi siempre descomponer menos el [P].

Para hacer 0 las condiciones de contorno (lo pide separación de variables y más métodos) dimos una v cumpliendo $C_1[v]=h_1$, $C_2[v]=h_2$, e hicimos:

$$w=u-v \ \rightarrow \begin{cases} L[w]=F-L[v] \\ M[w]=f-M[v]\,,\ C_1[w]=C_2[w]=0 \end{cases}$$

Otras veces interesa hacer homogénea la EDP. Hallando cualquier solución v de la ecuación ($L[v]=F$) y haciendo como siempre, $w=u-v$:

$$\begin{cases} L[w]=L[u]-L[v]=0 \\ M[w]=f-M[v]\,,\ C_1[w]=h_1-C_1[v]\,,\ C_2[w]=h_2-C_2[v] \end{cases}$$

Un lujo que se puede intentar es hallar una v que cumpla la EDP y además las dos de contorno pues los problemas homogéneos suelen ser más cortos.

Sean $X_m(x)$, $x\in[a,b]$ e $Y_n(y)$, $y\in[c,d]$ autofunciones de dos problemas de Sturm-Liouville de pesos $r(x)$ y $s(y)$, y sea $f(x,y)\in C^1\big([a,b]\times[c,d]\big)$. Entonces se puede escribir f, para cada $(x,y)\in(a,b)\times(c,d)$ como la serie:

$$f(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}c_{nm}X_nY_m\,,\quad c_{nm}=\frac{1}{\langle X_n,X_n\rangle}\frac{1}{\langle Y_m,Y_m\rangle}\int_a^b\!\!\int_c^d f(x,y)\,X_mY_n\,r\,s\,dy\,dx\,.$$

Caso particular son las trigonométricas para una $f\in C^1\big([0,L]\times[0,M]\big)$:

$$f(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}b_{nm}\,\mathrm{sen}\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{sen}\frac{m\pi y}{M}\,,\ b_{nm}=\frac{4}{LM}\int_0^L\!\!\int_0^M f(x,y)\,\mathrm{sen}\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{sen}\frac{m\pi y}{M}\,dy\,dx\,.$$

$$f(x,y)=\tfrac14 a_{00}+\tfrac12\sum_{n=1}^{\infty}a_{n0}\cos\frac{n\pi x}{L}+\tfrac12\sum_{m=1}^{\infty}a_{0m}\cos\frac{m\pi y}{M}+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{nm}\cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi y}{M}\,,$$

$$a_{nm}=\frac{4}{LM}\int_0^L\!\!\int_0^M f(x,y)\cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi y}{M}\,dy\,dx\,.$$

[O en $\sum\mathrm{sen}\cos$ ó $\sum\cos\mathrm{sen}$, o en senos y cosenos]. [Con $\frac14$ y $\frac12$ la fórmula vale para $n=0$ ó $m=0$].

Ej 1. Desarrollemos $f(x,y)=x\cos y$ en $[0,\pi]\times[0,\pi]$ de dos formas:

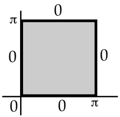
$$b_{nm}=\frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi\!\!\int_0^\pi x\cos y\,\mathrm{sen}\,nx\,\mathrm{sen}\,my\,dy\,dx\ \to\ x\cos y=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{[-1]^{n+1}m}{n[4m^2-1]}\,\mathrm{sen}\,nx\,\mathrm{sen}\,2my\,.$$

$$a_{nm}=\frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi\!\!\int_0^\pi x\cos y\cos nx\cos my\,dy\,dx=\begin{cases}0\ \text{ si } m\neq1,\ \pi\ \text{ si } m=1,n=0\\ 2[(-1)^n-1]/(\pi n^2)\ \text{ si } m=1,n>0\end{cases}\ \to$$

$$x\cos y=\frac{\pi}{2}\cos y-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos[2n-1]x\cos y\ \ \text{[estaba desarrollada en } y\text{]}.$$

Calor en un cuadrado

Estudiamos la evolución de las temperaturas de una placa (dadas las iniciales) si el borde se mantiene a 0° :



$$\boxed{\begin{array}{l} u_t - k[u_{xx}+u_{yy}] = 0\,,\ \ (x,y)\in(0,\pi)\times(0,\pi)\,,\ t>0 \\ u(x,y,0)=f(x,y),\, u(x,0,t)=u(x,\pi,t)=u(0,y,t)=u(\pi,y,t)=0 \end{array}}$$

Buscamos: $u(x,y,t)=X(x)Y(y)T(t) \rightarrow XYT' - k[X''Y+XY'']T=0$

$$\frac{X''}{X}=\frac{1}{k}\frac{T'}{T}-\frac{Y''}{Y}=-\lambda \rightarrow \begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ \frac{Y''}{Y}=\lambda+\frac{1}{k}\frac{T'}{T}=-\mu \rightarrow \begin{cases} Y''+\mu Y=0 \\ T'+k[\lambda+\mu]T=0 \end{cases} \end{cases}$$

Los datos de contorno exigen: $X(0)=X(\pi)=Y(0)=Y(\pi)=0$. Así pues:

$$\begin{cases} \lambda=n^2,\ X_m=\{\operatorname{sen} nx\},\ n=1,2,\dots \\ \mu=m^2,\ Y_n=\{\operatorname{sen} my\},\ m=1,2,\dots \end{cases} \rightarrow T_{nm}=\left\{e^{-(n^2+m^2)kt}\right\}.$$

Cumplen $u_{nm}=\left\{e^{-(n^2+m^2)kt}\operatorname{sen} nx \operatorname{sen} my\right\}$ EDP y datos de contorno.

Probamos la serie $\boxed{u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} b_{nm}\, e^{-(n^2+m^2)kt}\operatorname{sen} nx \operatorname{sen} my}$,

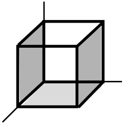
que debe cumplir: $u(x,y,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} b_{nm}\operatorname{sen} nx \operatorname{sen} my = f(x,y) \rightarrow$

$$b_{nm}=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\!\!\int_0^{\pi} f(x,y)\operatorname{sen} nx \operatorname{sen} my\, dx\, dy\ ,\ n,m\geq 1\,.$$

[Como en la varilla, aquí también $u\rightarrow 0$ cuando $t\rightarrow\infty$].

Laplace en un cubo

(La solución será única como los similares del plano):



$$\boxed{\begin{cases} \Delta u = 0 \ \text{ en } \ (0,\pi)\times(0,\pi)\times(0,\pi) \\ u(x,y,0)=f(x,y)\,,\ u=0 \ \text{ en } \ x=0,\ x=\pi,\ z=\pi \\ u_y=0 \ \text{ en } \ y=0,\ y=\pi \end{cases}}$$

$$\xrightarrow{u=XYZ} \frac{Y''}{Y}+\frac{Z''}{Z}=-\frac{X''}{X}=\lambda\,,\ \frac{Z''}{Z}-\lambda=-\frac{Y''}{Y}=\mu\,,\ \begin{cases} X''+\lambda X=0,\ X(0)=X(\pi)=0 \\ Y''+\mu Y=0,\ Y'(0)=Y'(\pi)=0 \\ Z''-[\lambda+\mu]Z=0,\ Z(\pi)=0 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} \lambda=n^2,\ X_n=\{\operatorname{sen} nx\},\ n=1,2,\dots \\ \mu=m^2,\ Y_m=\{\cos my\},\ m=0,1,\dots \end{cases} \to\ Z_{mn}=\left\{\operatorname{sh}\left(\sqrt{n^2+m^2}\,[\pi-z]\right)\right\} \to$$

$$\boxed{\begin{aligned} u(x,y,z) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} c_{n0}\operatorname{sh}\big(n[\pi-z]\big)\operatorname{sen} nx \\ + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_{nm}\operatorname{sh}\big(\sqrt{n^2+m^2}\,[\pi-z]\big)\operatorname{sen} nx\cos my \end{aligned}}$$

Como $u(x,y,0)=f(x,y)$, los c_{nm} son:

$$c_{nm}=\frac{4}{\pi^2\operatorname{sh}\left(\pi\sqrt{n^2+m^2}\right)}\int_0^\pi\!\!\int_0^\pi f(x,y)\operatorname{sen} nx\cos my\,dy\,dx \quad \begin{matrix} n=1,2,\dots \\ m=0,1,\dots \end{matrix}$$

[En el caso de ser $f(x,y)=\operatorname{sen} 3x\cos 4y$ la solución se reduciría a un único término $u(x,y)=\frac{\operatorname{sh}(5[\pi-z])}{\operatorname{sh}(5\pi)}\operatorname{sen} 3x\cos 4y$ y no habría que hacer integrales].

$$\begin{cases} u_{rr}+\frac{2}{r}u_r+\frac{1}{r^2}\Big[u_{\theta\theta}+\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}u_\theta+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}u_{\phi\phi}\Big]=0\,,\ r<R \\ u(R,\theta,\phi)=f(\theta,\phi)\,,\quad \theta\in[0,\pi]\,,\ \phi\in[0,2\pi) \end{cases}$$

$u=R\Theta\Phi \rightarrow r^2R''+2rR'-\lambda R=0\,,\ \Phi''+\mu\Phi=0\,,\ \big(\operatorname{sen}\theta\,\Theta'\big)'+\big(\lambda\operatorname{sen}\theta-\frac{\mu}{\operatorname{sen}\theta}\big)\Theta=0\,.$

Ha de ser 2π-periódica en ϕ: $\mu_m=m^2$, $\Phi_m(\phi)=\big\{\cos m\phi,\operatorname{sen}m\phi\big\}$, $m=0,1,\dots$

Con $s=\cos\theta$ aparece $\big(1-s^2\big)\frac{d^2\Theta}{ds^2}-2s\frac{d\Theta}{ds}+\big(\lambda-\frac{m^2}{1-s^2}\big)\Theta=0$ [ecuación asociada de Legendre].

Los autovalores del problema singular que aparece pidiendo acotación en $s=\pm1$ son $\lambda_n=n(n+1)$, y sus autofunciones están relacionadas los P_n de Legendre que aparecen para $m=0$:

$$P_n^m(s)=\big(1-s^2\big)^{m/2}\frac{d^m}{ds^m}P_n(s)\,,\ \text{con } m\le n$$

$$\big[\ P_n^0=P_n\ ,\ P_1^1=\operatorname{sen}\theta\ ,\ P_2^1=3\operatorname{sen}\theta\cos\theta\ ,\ P_2^2=3\operatorname{sen}^2\theta\ ,\ \dots\big]$$

Las soluciones acotadas en $r=0$ para esos λ_n son como antes $R_n=\{r^n\}$.

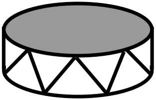
Llamamos $Y_n^m(\theta,\phi)=\big\{\cos m\phi\,P_n^m(\cos\theta),\operatorname{sen}m\phi\,P_n^m(\cos\theta)\big\}$, $n=0,1,\dots$, $m=0\dots n$.

$$\big[\ Y_0^0=\{1\}\,,\ \ Y_1^0=\{\cos\theta\}\,,\ Y_1^1=\{\operatorname{sen}\theta\cos\phi,\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\}\,,\ \ Y_2^0=\{\tfrac{3}{2}\cos^2\theta-\tfrac{1}{2}\}\,,$$
$$Y_2^1=\big\{3\operatorname{sen}\theta\cos\theta\cos\phi,3\operatorname{sen}\theta\cos\theta\operatorname{sen}\phi\big\}\,,\ Y_2^2=\big\{3\operatorname{sen}^2\theta\cos2\phi,3\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}2\phi\big\}\,,\ \dots\big]$$

Los **armónicos esféricos** $u_n^m=r^nY_n^m(\theta,\phi)$ son soluciones de la EDP.

Haciendo una serie doble con ellos se puede dar la solución para toda $f(\theta,\phi)$ (pero a veces basta identificar como en el ejemplo 2).

Los problemas 'esféricos' llevan a Legendre. Los 'cilíndricos' (polares y otra coordenada, t en calor y ondas, z en Laplace) llevan a Bessel, como sucede con la **vibración de una membrana circular**. Como hicimos con Laplace en la esfera, sólo tratamos el caso más sencillo con 2 variables en el que la vibración no depende de θ. Y para simplificar más suponemos que es $g=0$:



$$\boxed{\begin{cases} u_{tt}-\left[u_{rr}+\frac{1}{r}u_r\right]=0\,,\ r\leq 1,\ t\in\mathbf{R} \\ u(r,0)=f(r),\ u_t(r,0)=u(1,t)=0 \end{cases}}$$

[Las vibraciones con simetría radial en el espacio, como se vio en 4.2, son mas sencillas].

$$u=RT \to \frac{T''}{T}=\frac{R''+\frac{R'}{r}}{R}=-\lambda \to \begin{cases} \left[rR'\right]'+\lambda rR=0\,,\ R \text{ acotada en } 0\,,\ R(1)=0 \\ T''+\lambda T=0\,,\ T'(0)=0 \to \left\{\cos(\sqrt{\lambda}\,t)\right\} \end{cases}$$

El problema de contorno singular lo vimos en 3.1. Con $s=r\sqrt{\lambda}\equiv wr$ desaparecía λ y la ecuación pasaba a ser una de Bessel:

$$sR''(s)+R'(s)+sR(s)=0 \to R=c_1J_0(s)+c_2K_0(s)=c_1J_0(wr)+c_2K_0(wr)\,.$$

Obtuvimos los $\lambda_n=w_n^2$ tales que $J_0(w_n)=0$, y las $R_n=\left\{J_0(w_nr)\right\}$.

$$\boxed{u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos(w_nt)\,J_0(w_nr)} \to u(r,0)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\,J_0(w_nr)=f(r)\,.$$

El ejemplo final (apuntes) de 3.2. nos da: $c_n=\frac{2}{J_1^2(w_n)}\int_0^1 r\,f(r)\,J_0(w_nr)\,dr\,.$

Ej 3. Hallemos si $\boxed{f(r)=1-r^2}$ la integral $\int_0^1 (r-r^3)\,J_0(w_n r)\,dr$ que da c_n.

Haciendo $s=w_n r$: $\int_0^1 = \frac{1}{w_n^2}\int_0^{w_n} sJ_0(s)ds - \frac{1}{w_n^4}\int_0^{w_n} s^3 J_0(s)ds$.

La primera primitiva es inmediata, pues $\big[sJ_1\big]' = sJ_0$. La segunda, por partes:

$$\int s^2\, sJ_0\, ds = s^3 J_1 - 2\int s^2 J_1\, ds = s^3 J_1 - 2s^2 J_2 = (s^3-4s)\,J_1 + 2s^2 J_0\ ,$$

ya que $\big[s^2 J_2\big]' = s^2 J_1$ y $J_{n+1} = \frac{2n}{s} J_n - J_{n-1}$. Y como $J_0(w_n)=0$ concluimos:

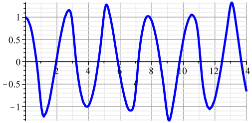
$$\int_0^1 = \frac{4}{w_n^3} J_1(w_n) \ \Rightarrow\ u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{w_n^3 J_1(w_n)} \cos(w_n t)\, J_0(w_n r)\ .$$

Pese a su aspecto complicado, está solución no lo es mucho más que la $\sum k_n \cos(n\pi t)\,\mathrm{sen}(n\pi x)$ de la cuerda vibrante de 4.2. En muchos libros (o programas tipo Maple o Sage) se pueden encontrar los ceros w_n de J_0:

$\{w_n\} \approx 2.404826\,,\ 5.520078\,,\ 8.653728\,,\ 11.79153\,,\ 14.93092\,,\ \ldots$

y también $J_1(w_n)$: 0.51915 , –0.34026 , 0.27145 , –0.23246 , 0.20655 , ...

Con un programa que reconozca la J_0 podemos dar valores a la solución. Maple da con 5 términos este dibujo de $u(0,t)$:



$u(0,t) \approx 1.11\cos(2.40\,\mathrm{t}) - 0.140\cos(5.52\,\mathrm{t})$
$\qquad + 0.0455\cos(8.65\,\mathrm{t}) - 0.0210\cos(11.8\,\mathrm{t})$
$\qquad + 0.0116\cos(14.9\,\mathrm{t})$

Las vibraciones de un tambor no son periódicas.
(A diferencia de la cuerda, los w_n no son múltiplos exactos unos de otros).