Comencemos con las de **problemas de contorno no homogéneos para EDOs**. Veamos una fórmula que para cualquier $f(x)$ nos da en términos de integrales la solución (en el caso de que sea única) de:

$$\boxed{(\mathrm{P_f})\begin{cases}[p(x)y']'+g(x)y=f(x)\\ \alpha y(a)-\alpha' y'(a)=\beta y(b)+\beta' y'(b)=0\end{cases}}\ ,\quad p\in C^1,\ g,f\in C,\ p>0 \text{ en } [a,b]\,.$$

conocidas las soluciones de la homogénea (algo parecido a la fórmula de variación de las constantes). En los apuntes se prueba que:

Teor

Si $(\mathrm{P_h})$ tiene sólo la solución $y\equiv 0$, y_1 e y_2 son soluciones no nulas de la homogénea $[py']'+gy=0$ que cumplen $\alpha y_1(a)-\alpha' y_1'(a)=0$ y $\beta y_2(b)+\beta' y_2'(b)=0$, respectivamente, la solución única de $(\mathrm{P_f})$ es:

$$y(x)=\int_a^b G(x,s)\,f(s)\,ds\ ,\ \text{ con }\ G(x,s)=\begin{cases}\frac{y_1(s)\,y_2(x)}{p|W|(y_1,y_2)}\ , & a\le s\le x\\ \frac{y_1(x)\,y_2(s)}{p|W|(y_1,y_2)}\ , & x\le s\le b\end{cases}.$$

A la $G(x,s)$ se le llama **función de Green** del problema.

[Es fácil probar que el denominador que aparece en la G es constante].

Una vez **hallada G, dada cualquier f, basta hacer dos integrales para encontrar la solución del problema no homogéneo** $(\mathrm{P_f})$.

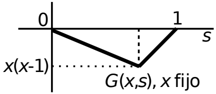
[Que quede claro que cada y_k satisface solamente una condición (o en a o en b; ambas condiciones sólo las cumple la trivial). La f y la p del teorema son, como siempre, las de la ecuación escrita en la forma $[py']'+gy=f$; en muchos casos será $p\equiv 1$, pero en otros deberemos reescribir la ecuación].

Un ejemplo sencillo

Ej 1. $\boxed{(\mathrm{P})\ \begin{cases} y''=f(x) \\ y(0)=y(1)=0 \end{cases}}$ $\quad \begin{cases} y''=0 \\ y(0)=y(1)=0 \end{cases}$ sólo lo cumple $y\equiv 0$. Hallemos G.

La solución de la homogénea es $y=c_1+c_2x$. Del primer dato de contorno, $y(0)=c_1=0$. Elegimos $y_1=x$. El segundo, $y(1)=c_1+c_2=0 \to y_2=x-1$. Así:

$$|W|(x)=\begin{vmatrix} x & x-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1,\ p(x)=1,\ G(x,s)=\begin{cases} s(x-1),\ 0\le s\le x \\ x(s-1),\ x\le s\le 1 \end{cases}.$$



Si, por ejemplo, $f(x)=1$, la solución de (P_1) será:

$$y(x)=\int_0^1 G(x,s)\,1\,ds=(x-1)\int_0^x s\,ds+x\int_0^1(s-1)\,ds=\tfrac{1}{2}[x^2-x].$$

Para resolver un problema con una f dada, dar la G será un rodeo inútil. Por ejemplo, la última solución se podría obtener:

$$y''=1 \to y=c_1+c_2x+\tfrac{1}{2}x^2 \to \begin{cases} y(0)=c_1=0 \\ y(1)=c_1+c_2+\frac{1}{2}=0 \end{cases},\ y=\tfrac{1}{2}[x^2-x] \text{ como antes.}$$

Pero para cada nueva f habría que hallar su y_p e imponer $y(0)=y(1)=0$.

Las funciones de Green están muy unidas a la 'función' δ. La G del ejemplo para x fijo (o para s fijo, es $G(x,s)$ simétrica) es continua pero no derivable en $s=x$ y su 'derivada' segunda es $\delta(s-x)$. Esto sucede en general:

$$\boxed{G(x,s) \text{ es la solución para } x\in(a,b) \text{ fijo de } \begin{cases} \left[p(s)G'\right]'+g(s)G=\delta(s-x) \\ \alpha G(a)-\alpha' G'(a)=\beta G(b)+\beta' G'(b)=0 \end{cases}.}$$

[La prueba es trivial: $\int_a^b G(s,u)\,\delta(u-x)\,du=G(s,x)=G(x,s)$. Esto es lo que se generaliza a las EDPs].

ad45. $\boxed{\begin{array}{l} x^2y''-xy'+\lambda y=x^3 \\ y(1)-y'(1)=y(2)-2y'(2)=0 \end{array}}$ Hallar para $\lambda=0$ y $\lambda=1$ la solución (si la hay) usando la función de Green.

Homogénea: $\mu^2-2\mu+\lambda=0$, $\begin{array}{l} \lambda=1 \to y=(c_1+c_2\ln x)\,x \overset{\text{c.c.}}{\to} y=\{x\}\,. \\ \lambda=0 \to y=c_1+c_2x^2 \overset{\text{c.c.}}{\to} y\equiv 0\,. \end{array}$

En forma autoadjunta la ecuación toma la forma: $\left(\frac{y'}{x}\right)'+\frac{\lambda}{x^3}y=1\,.$

Para $\lambda=1$, como $\int_1^2 1\cdot x\,dx\neq 0$, no existe solución del no homogéneo.

Para $\lambda=0$ existe la función de Green.

$$\begin{array}{l} y(1)-y'(1)=c_1-c_2=0 \to y_1=1+x^2 \\ y(2)-2y'(2)=c_1-4c_2=0 \to y_2=4+x^2 \end{array} ,\ |W|=-6x\ ,\ p(x)=\frac{1}{x}$$

Por tanto, es $\boxed{G(x,s)=\begin{cases} -\frac{1}{6}(1+s^2)(4+x^2)\,, & 1\leq s\leq x \\ -\frac{1}{6}(4+s^2)(1+x^2)\,, & x\leq s\leq 2 \end{cases}}$ $\to$

$$y=\int_1^2 G(x,s)\cdot 1\,ds=-\frac{4+x^2}{6}\int_1^x(1+s^2)\,ds-\frac{1+x^2}{6}\int_x^2(4+s^2)\,ds=\boxed{\frac{x^3}{3}-\frac{14x^2}{9}-\frac{8}{9}}\,.$$

[Comprobable hallando $y_p=Ax^3$ e imponiendo los datos a $y=c_1+c_2x^2+\frac{1}{3}x^3$].

[En los apuntes se opera con la δ en 2 variables, usando: i. $\delta(\xi-x,\eta-y)=0$ si $P\equiv(\xi,\eta)\neq(x,y)\equiv Q$
ii. $\iint_D F(\xi,\eta)\,\delta(\xi-x,\eta-y)\,d\xi\,d\eta=F(x,y)$ si F continua en $D\subset\mathbf{R}^2$ y $(x,y)\in D$].

Consideremos el problema de **Dirichlet no homogéneo**: $\boxed{(\mathrm{P}_D)\ \begin{cases}\Delta u=F(x,y) \text{ en } D\\ u=f \text{ en } \partial D\end{cases}}$.

Queremos expresar su solución única como integrales con una función de Green G y los datos F y f:

Teor A la solución $G(x,y;\xi,\eta)$ de $(\mathrm{P}_G)\ \begin{cases}\Delta G=\delta(\xi-x,\eta-y) \text{ en } D\\ G=0 \text{ en } \partial D\end{cases}$, para cada $(x,y)\in D$, vista como función de (ξ,η), se le llama **función de Green** de (P_D) y la solución de (P_D) viene dada entonces por:

$$u(x,y)=\iint_D G(x,y;\xi,\eta)\,F(\xi,\eta)\,d\xi d\eta+\oint_{\partial D} G_{\mathbf{n}}(x,y;\xi,\eta)\,f(\xi,\eta)\,ds\,.$$

[$G_{\mathbf{n}}$ es, como siempre, la derivada de G en la dirección de $\mathbf{n}$, vector unitario exterior a D].

Para resolver (P_G) damos primero una $v(x,y;\xi,\eta)$ que cumple $\Delta v=\delta$, como función de (ξ,η), aunque no satisfaga la condición de contorno. ¿Para qué funciones es $\Delta v=0$? Las soluciones en polares dependiendo de r son:

$$v_{rr}+\tfrac{1}{r}v_r=0 \rightarrow v=c_1+c_2\ln r$$

Algún múltiplo del logaritmo de la distancia $r=\overline{PQ}$ es buen candidato a v:

Teor Si $v=\frac{1}{4\pi}\ln\big[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\big]=\frac{\ln\overline{PQ}}{2\pi}$ es $\Delta v=\delta(\xi-x,\eta-y)$ con (x,y) fijo. A v se le llama **solución fundamental** para el punto (x,y).

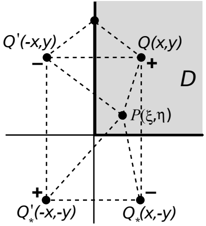
Método de las imágenes y ejemplo en cartesianas

Si w satisface $\Delta w=0$ en D, seguirá siendo $\Delta[v+w]=\delta$ para cada $(x,y)\in D$ fijo. Por tanto, **para encontrar** G [y tener resuelto (P_D)] **basta encontrar la** w **armónica en** D **tal que** $v+w=G$ **se anule en la frontera** ∂D**.**

Para hallar la w (en D limitados por rectas y circunferencias) se usa el **método de las imágenes**. Viendo la geometría de D se escribe G como suma de la v fundamental y de w armónicas del tipo $\ln\overline{PQ'}$, Q' **exteriores** a D ('imágenes' de Q), elegidos para que sea $G=0$ en δD.

Ej 2. $\boxed{(\mathrm{P}_2)\ \begin{cases}\Delta u=0 \text{ en } D=\{x>0\}\times\{y>0\}\\ u(x,0)=f(x),\ u(0,y)=0,\ u \text{ acotada}\end{cases}}$ Sean $Q=(x,y)\in D$ fijo, $P=(\xi,\eta)$, $v=\frac{1}{2\pi}\ln\overline{PQ}$.

Si $Q'=(-x,y)$, $w'=-\frac{1}{2\pi}\ln\overline{PQ'}$ es función armónica de P en D (lo es en $\mathbf{R}^2-\{Q'\}$) y es $v+w'=0$ si P es del eje y, pues $\overline{PQ}=\overline{PQ'}$ entonces. También $w_*=-\frac{1}{2\pi}\ln\overline{PQ_*}$, $Q_*=(x,-y)$, es armónica en D y $v+w_*=0$ si P está en el eje x. Para que G sea 0 en ambos ejes a la vez hay que sumar una nueva $w'_*=-\frac{1}{2\pi}\ln\overline{PQ'_*}$, $Q'_*=(-x,-y)$. Entonces será $G(P,Q)=v+w'+w_*+w'_*$, ya que $\Delta G=\delta$ $\big[$pues $\Delta v=\delta$ y $\Delta(w'+w_*+w'_*)=0\big]$ y $G=0$ si $P\in\partial D$.

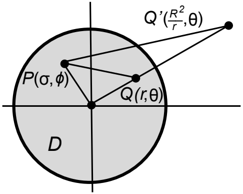


Escribiendo las distancias y usando que $\mathbf{n}=-\mathbf{j}$ en $\eta=0$ se llega a la solución

$$u=\oint_{\partial D} G_{\mathbf{n}}\, f\, ds=\int_0^\infty -G_\eta\big|_{\eta=0} f(\xi)\,d\xi=\cdots=\boxed{\frac{y}{\pi}\int_0^\infty\Big[\frac{1}{(\xi-x)^2+y^2}-\frac{1}{(\xi+x)^2+y^2}\Big]f(\xi)\,d\xi}$$

$$\boxed{(\mathrm{P}_3)\ \begin{cases}\Delta u = F(r,\theta) \ \text{ en } \ r<R \\ u(R,\theta)=f(\theta)\,,\ \ \theta\in[0,2\pi]\end{cases}}$$

$Q=(r,\theta)\in D$ fijo,
$P=(\sigma,\phi)$ variable.



La solución fundamental v en polares queda:

$$v=\frac{1}{2\pi}\ln\overline{PQ}=\frac{1}{4\pi}\ln\big[\sigma^2+r^2-2r\sigma\cos(\theta-\phi)\big]$$

¿Dónde situar la imagen Q'? Las cosas no son tan claras como antes. Es claro que su θ ha de ser igual, pero ¿a qué distancia del origen O colocarlo? Se puede llegar al resultado tanteando, pero sólo comprobamos que G es:

$$\boxed{G(P,Q)=\frac{1}{2\pi}\Big[\ln\overline{PQ}-\ln\overline{PQ'}+\ln\frac{R}{r}\Big],\ Q'=\Big(\frac{R^2}{r},\theta\Big)}\ \text{, es decir,}$$

$$\boxed{G(r,\theta;\sigma,\phi)=\frac{1}{4\pi}\ln\big[\sigma^2+r^2-2r\sigma\cos(\theta-\phi)\big]-\frac{1}{4\pi}\ln\Big[R^2+\frac{r^2\sigma^2}{R^2}-2r\sigma\cos(\theta-\phi)\Big]}$$

En efecto: $G=v+v'+cte \Rightarrow \Delta G=0$ $\big[\,v'$ armónica en $R^2-\{Q'\}$ y $Q'\notin D\,\big]$

y además $G=0$ si $P\in\partial D$, o sea, si $\sigma=R$.

Además, $G_{\mathbf{n}}=G_\sigma\big|_{\sigma=R}$ y $ds=R\,d\phi$, por lo que la solución de (P_3) es:

$$\boxed{u(r,\theta)=\int_0^R\!\!\int_0^{2\pi}\sigma\,G(r,\theta;\sigma,\phi)\,F(\sigma,\phi)\,d\phi d\sigma+\frac{R^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\phi)\,d\phi}{R^2-2Rr\cos(\theta-\phi)+r^2}}$$

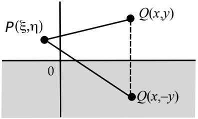
[Expresión más compacta que las series de Fourier, aunque estas integrales, en general, no son calculables (y hay que aproximarlas, pero son aproximaciones también las sumas parciales)].

ad48. Hallar la función de Green para Laplace en el semiplano $\{(x,y):\ y>0\}$

y utilizarla para la hallar la solución de $\begin{cases} \Delta u = F(x,y),\ x\in\mathbf{R},\ y>0 \\ u(x,0)=f(x),\ u \text{ acotada} \end{cases}$.

Resolver el mismo problema para $F\equiv 0$ con transformadas de Fourier.

$$G=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\overline{PQ}}{\overline{PQ'}}=\frac{1}{4\pi}\ln\big[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\big]$$
$$-\frac{1}{4\pi}\ln\big[(\xi-x)^2+(\eta+y)^2\big].$$
$$G_{\mathbf{n}}\Big|_{\eta=0}=-G_\eta\Big|_{\eta=0}=\frac{1}{\pi}\,\frac{y}{(\xi-x)^2+y^2}\ \to$$



$$\boxed{u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi-x)^2+y^2}+\frac{1}{4\pi}\int_0^{\infty}\!\!\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}{(\xi-x)^2+(\eta+y)^2}\,F(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}\ .$$

Si $F\equiv 0$ con la $\mathcal{F}$: $\begin{cases} \hat{u}_{yy}-k^2\hat{u}=0 \\ \hat{u}(k,0)=\hat{f}(k) \end{cases} \to\ \hat{u}=p(k)\,e^{ky}+q(k)\,e^{-ky}=\hat{f}(k)\,e^{-k|y|}$

$\big[$elegimos $p\equiv 0$ si $k>0$ y $q\equiv 0$ si $k<0$ para que exista la transformada inversa $\uparrow\big]$

$$\mathcal{F}^{-1}\big(e^{-k|y|}\big)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[\int_0^{\infty}e^{-k(y+ix)}\,dk+\int_{-\infty}^{0}e^{-k(y-ix)}\,dk\Big]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{y}{y^2+x^2}$$

$\to\ u(x,y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,f*\frac{y}{y^2+x^2}$ que lleva a lo de antes.

Problema final con Green y separación de variables

ad38. Sea $\boxed{\begin{array}{l}\Delta u = r\cos^2\theta\,,\ \ r<1\\ u(1,\theta)=0\,,\ 0\le\theta<2\pi\end{array}}$. Calcular el valor en el origen de la solución de este problema plano.

Con la fórmula que hemos obtenido a través de la función de Green:

$$u(r,\theta)=\frac{1}{4\pi}\int_0^1\!\!\int_0^{2\pi}\sigma\ln\!\Big(\big[\sigma^2+r^2-2r\sigma\cos(\theta-\phi)\big]$$

$$-\ln\big[1+r^2\sigma^2-2r\sigma\cos(\theta-\phi)\big]\Big)\,\sigma\cos^2\phi\,d\phi\,d\sigma$$

$$\to\ u(0,0)=\frac{1}{4\pi}\int_0^1\!\!\int_0^{2\pi}2\sigma^2\ln\sigma\cos^2\phi\,d\phi\,d\sigma=\frac{1}{2}\int_0^1\sigma^2\ln\sigma\,d\sigma=\boxed{-\frac{1}{18}}\,.$$

Más largo, llevando a la EDP: $u=a_0(r)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\big[a_n(r)\cos n\theta+b_n(r)\,\mathrm{sen}\,n\theta\big]$

$$\to\ \begin{array}{l} a_0''+\frac{1}{r}a_0'=\frac{r}{2}\\ a_2''+\frac{1}{r}a_2'-\frac{4}{r^2}a_2=\frac{r}{2}\end{array}\ \ \xrightarrow[\text{acotado}]{a_n(1)=0}\ \ u(r,\theta)=\frac{r^3-1}{18}\overset{\nearrow\, r=0}{+}\frac{r^3-r^2}{10}\cos 2\theta\,.$$