1c. Resolver el problema de Cauchy: $yu_y+(2y-x)u_x=x$, $u(x,1)=0$.

ad5b. Sea $yu_y-xu_x=u+2x$ y los datos iniciales: i) $u(x,0)=-x$, ii) $u(x,2)=7x$. Hallar la única solución que satisface uno y 2 distintas que cumplan el otro.

2d(s0). Sea $2xy^2u_y-u_x=2xyu$. Calcular su solución general y la que cumple $u(0,y)=1$ probando su unicidad. Precisar cuántas satisfacen $u\big(x,\frac{1}{x^2}\big)=1$.

4. Resolver $u_y+2yu_x=3xu$ con $\begin{array}{l}\text{i) } u(x,1)=1\\ \text{ii) } u(0,y)=0\end{array}$, estudiando la unicidad.

1a(jn1). Hallar la solución de $\big(y-2e^x\big)u_y-u_x=u$ y la que satisface $u(0,y)=y$. Dar 2 distintas que cumplan uno de los datos: i) $u\big(x,e^x\big)=0$, ii) $u\big(x,e^x\big)=1$.

2b. Resolver $\begin{cases}2yu_y+xu_x=2u-2y^2\\ u(-2,y)=4-y^2\end{cases}$. ¿Cuántas soluciones hay con $u(x,x^2)=0$?

6. Reducir a forma canónica y, si es posible, dar la solución general:

a) $u_{yy}+4u_{xy}+5u_{xx}+u_y+2u_x=x$, b) $u_{yy}+6u_{xy}+9u_{xx}+9u=9$,

d) $3u_{tt}-2u_{xt}-u_{xx}+8u_t-8u_x=0$.

8a. Sea $u_{tt}+4u_{tx}+4u_{xx}+u_t+2u_x=0$. Escribirla en forma canónica, hallar su solución general y la que cumple $u(x,0)=1-x$, $u_t(x,0)=1$ y comprobarla.

10(parte). Con un cambio de la forma $u=e^{py}e^{qx}w$, p y q adecuadas, resolver $u_{xy}+2u_y+3u_x+6u=1$.

9a. Resolver de varias formas (buscando atajos) $\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}=e^{-t}\,,\ x,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=x^2, u_t(x,0)=-1 \end{cases}$.

16. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\in[0,2]\,, t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=0, u_t(x,0)=(x-1)^2\,,\ u(0,t)=u(2,t)=t \end{cases}$. Hallar $u\big(\frac{3}{2},1\big)$.

17. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\in[0,5]\,, t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\begin{cases} 2-x\,,\ x\in[2,3]\,,\ \ x-4\,,\ x\in[3,4] \\ 0\,,\ \text{resto de } [0,5] \end{cases} \\ u_t(x,0)=u(0,t)=u(5,t)=0 \end{cases}$. Hallar el valor de $u(4\,,3)$. Dibujar $u(x\,,3)$. Hallar $u(2\,,t)$ para $t\in[0,3]$.

13. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\geq 0\,, t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\begin{cases} (x-1)(x-4)\,,\ x\in[1,4] \\ 0\,,\ x\in[0,1]\cup[4,\infty) \end{cases} \\ u_t(x,0)=u(0,t)=0 \end{cases}$.

a] Hallar $u(1,3)$.
b] Dibujar $u(x,3)$.
c] Hallar $u(x,3)$ para $x\in[0,1]$.

ad32. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\geq 0\,, t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=1, u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=\cos t \end{cases}$.

a] Hallar $u\big(\frac{\pi}{3},2\pi\big)$.
b] Hallar $u(x,\pi)$ para $x\geq\pi$.
[$v=\cos t\cos x$ cumple dato de contorno y ecuación].

19. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=6x\,,\ x\geq 0,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=u_x(0,t)=0 \end{cases}$. Calcular $u(0,t)$ para todo t.

20. Sea $\begin{cases} u_{tt}-\big(u_{rr}+\frac{2}{r}u_r\big)=0\,,\ r\geq 0, t\in\mathbf{R} \\ u(r,0)=r\,,\ u_t(r,0)=-2 \end{cases}$.

a] Hallar $u(1,2)$.
b] Hallar $u(1,t)$ para todo $t\geq 0$.

21. Resolver con las características y utilizando la $\mathcal{F}$: b) $\begin{cases} t\,u_t - u_x = u \\ u(x{,}1) = f(x) \end{cases}$.

ad55c(jn1). Resolver $\begin{cases} u_{tt} - u_{xt} + \frac{1}{4}u_{xx} + u_t - \frac{1}{2}u_x = 0 \\ u(x,0) = 0\,,\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$ a] con la forma canónica, b] mediante la $\mathcal{F}$.

21d. Resolver $\begin{cases} u_t - u_x = 2x\mathrm{e}^{-x^2} \\ u(x\,,2) = 0 \end{cases}$ a] con la forma canónica, b] con la $\mathcal{F}$.
[$2x\mathrm{e}^{-x^2}$ es derivada de función de $\mathcal{F}$ conocida].

ad51. Resolver $\begin{cases} 2u_{tt} + 5u_{tx} + 2u_{xx} = 0 \\ u(x{,}0) = f(x)\,,\, u_t(x{,}0) = 0 \end{cases}$ con $\mathcal{F}$. Dar la solución si $f(x) = x^2$.

30. Hallar la solución sin que aparezcan integrales:

a) $\begin{cases} u_t - \frac{1}{4}u_{xx} + u_x = 0\,,\ x \in \mathbf{R}, t > 0 \\ u(x,0) = \mathrm{e}^{-x^2}\,,\ u \text{ acotada} \end{cases}$ d) $\begin{cases} u_t - 2tu_{xx} = 0\,,\ x \in \mathbf{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = \delta(x),\ u \text{ acotada} \end{cases}$

29. Comprobar, paso a paso y utilizando la $\mathcal{F}$, que viene dada la solución de

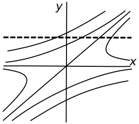
$\begin{cases} u_t - u_{xx} = \mathrm{e}^{-x^2/4}\,,\ x \in \mathbf{R}\,, t > 0 \\ u(x,0) = 0\,,\ u \text{ acotada} \end{cases}$ por $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-k^2} - \mathrm{e}^{-k^2(t+1)}}{k^2} \mathrm{e}^{-ikx} dk$.

Deducir el valor de $u(0{,}t)$ integrando por partes y usando $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-as^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}$.

1c. $\begin{matrix} yu_y+(2y-x)u_x=x \\ u(x,1)=0 \end{matrix}$, $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2y-x}$ (exacta u homogénea) o lineal $\frac{dx}{dy}=-\frac{x}{y}+2$, $xy-y^2=C$.

$\begin{cases} \xi=xy-y^2 \\ \eta=y \end{cases} \to \eta u_\eta=\frac{\xi+\eta^2}{\eta}$, $u=p(\xi)-\frac{\xi}{\eta}+\eta=p(xy-y^2)+2y-x$

$\to p(v)=v-1\ \forall v \to$ $\boxed{u=xy-y^2+2y-x-1}$ $[T=1]$.



ad5b. $\boxed{yu_y-xu_x=u+2x}$ $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$, $y=\frac{C}{x}$. $\begin{cases} \xi=xy \\ \eta=x \end{cases}$, $u_\eta=-\frac{u}{\eta}-2$, $u=\frac{p(\xi)}{\eta}-\eta=\frac{p(xy)}{x}-x$.

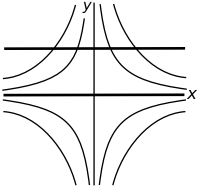
O bien, $\begin{cases} \xi=xy \\ \eta=y \end{cases} \to u_\eta=\frac{u}{\eta}+\frac{2\xi}{\eta^2}$, $u=q(\xi)\eta+\eta\int\frac{2\xi}{\eta^3}\,d\eta=q(\xi)\eta-\frac{\xi}{\eta}=q(xy)y-x$.

i) $u(x,0)=\frac{p(0)}{x}-x=-x$ lo cumple toda $p\in C^1$ con $p(0)=0$, por ejemplo,

$p(v)\equiv 0 \to u=-x$,
$p(v)=v \to u=y-x$. O bien, $u(x,0)=-x=-x$, $\forall q\in C^1$ [$q(v)\equiv 0,1$ da las de antes].

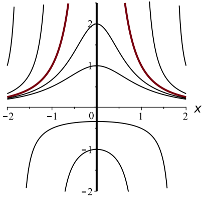
ii) $u(x,2)=\frac{p(2x)}{x}-x=7x$, $p(v)=2v^2 \to$ $\boxed{u(x,y)=2xy^2-x}$.

O bien, $u(x,2)=2q(2x)-x=7x$, $q(v)=2v$ $\uparrow$.



El dibujo muestra que para i) hay problemas de unicidad [dato sobre característica] y que había solución única para ii) [no hay tangencia]. El T lo confirma:

i) $T=1\cdot 0-0\cdot(-x)\equiv 0$, ii) $T=1\cdot 2-0\cdot(-x)=2\neq 0$.



2d(s0). $2xy^2u_y - u_x = 2xyu\,,\ \frac{dy}{dx} = -2xy^2\,,\ \frac{1}{y} - x^2 = C\,.$

$$\begin{cases} \xi = \frac{1}{y} - x^2 \\ \eta = y \end{cases} \to\ u_\eta = \frac{1}{\eta}u\,,\ u = p(\xi)\,\eta = \boxed{p\big(\tfrac{1}{y} - x^2\big)\,y}\ .$$

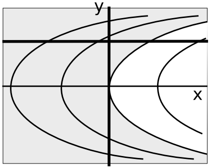
Peor: $\begin{cases} \xi = \frac{1}{y} - x^2 \\ \eta = x \end{cases} \to\ u_\eta = -\frac{2\eta}{\xi+\eta^2}u\,,\ u = \frac{p(\xi)}{\xi+\eta^2}$ $\uparrow$

$$u(0,y) = p\big(\tfrac{1}{y}\big)\,y = 1\,,\ p(v) = v\,,\ \boxed{u(x,y) = 1 - x^2y}\ .$$

Única, $x=0$ no tangente. $T(y) = 0\cdot 0 - 1\cdot(-1) = 1 \neq 0\ \ \forall y\,.$

Dato sobre característica dará infinitas o ninguna solución. $u\big(x, \frac{1}{x^2}\big) = \frac{p(0)}{x^2} = 1\,.$

Imposible. **No hay solución**. $\big[\,T(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{2}{x^3} \equiv 0$ confirma que es característica$\big]$.



4. $\boxed{u_y + 2yu_x = 3xu}$ con: i) $u(x,1) = 1\,,$ ii) $u(0,y) = 0\,.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y} \to x - y^2 = K \to \begin{cases} \xi = x - y^2 \\ \eta = y \end{cases},\ u_\eta = (3\xi + 3\eta^2)u \to$$

$$u = p(\xi)\,e^{3\xi\eta + \eta^3} = p\big(x - y^2\big)\,e^{3xy - 2y^3}\,.$$

$\Big[$Peor $\begin{cases} \xi = x - y^2 \\ \eta = x \end{cases},\ u_\eta = \frac{3\eta u}{[\xi - \eta]^{1/2}}\ \ldots\ \Big]$

i) tendrá solución única (no tangente, $T \equiv 1$).

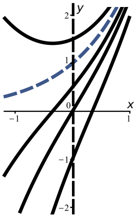
$$p(x-1)\,e^{3x-2} = 1\,,\ p(v) = e^{-3v-1}\,,\ \boxed{u = e^{3xy - 3x - 2y^3 + 3y^2 - 1}} = e^{(y-1)(3x - 2y^2 + y + 1)}$$

ii) $u(0,y) = p(-y^2)\,e^{-2y^3} = 0 \to p(v) \equiv 0$, si $v \leq 0$, pero indeterminada si $v > 0$

$\to u \equiv 0$, si $x \leq y^2$, e indeterminada si $x > y^2$.

Hay solución única excepto en un entorno del origen ($T = -2y$).

1a(jn1). $\boxed{(y-2e^x)\,u_y-u_x=u}$ $\frac{dy}{dx}=-y+2e^x$ lineal, $y=Ce^{-x}+e^x$,



$e^xy-e^{2x}=C$ características. $\begin{cases}\xi=e^xy-e^{2x}\\ \eta=x\end{cases}$, $\begin{cases}u_y=e^xu_\xi\\ u_x=(e^xy-2e^{2x})u_\xi+u_\eta\end{cases}$ $\rightarrow$

$u_\eta=-u$, $u(x,y)=p(\xi)\,e^{-\eta}=$ $\boxed{p\big(e^xy-e^{2x}\big)\,e^{-x}}$ [peor $\eta=y$].

$u(0,y)=p(y-1)=y$, $p(v)=v+1$, $\boxed{u(x,y)=y-e^x+e^{-x}}$.

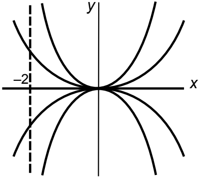
[Es única por no ser tangente $x=0$ a las características (y' siempre finita). O porque $T(y)=0\cdot(y-2)-1\cdot(-1)=1\neq0\ \ \forall y$].

Dato sobre característica [$T(x)=-1\cdot e^x+e^x\equiv0$ lo confirma] dará infinitas o ninguna.

ii) $u\big(x,e^x\big)=p(0)\,e^{-x}=1$ es imposible y **no hay solución**.

Pero i) $u\big(x,e^x\big)=0$ lo cumplen infinitas soluciones. Una para cada $p\in C^1$ que cumpla $p(0)=0$. Por ejemplo, $p(v)\equiv0\rightarrow u\equiv0$. $p(v)=v\rightarrow u=y-e^x$ ...

2b. $\boxed{2yu_y+xu_x=2u-2y^2}$ $\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x}\rightarrow y=Cx^2$. $\begin{cases}\xi=y/x^2\\ \eta=y \text{ mejor}\end{cases}$



$\rightarrow u_\eta=\frac{u}{\eta}u-\eta\rightarrow u=p(\xi)\,\eta-\eta^2$. $u(x,y)=p(\frac{y}{x^2})y-y^2$.

$p(\frac{y}{4})y-y^2=4-y^2$, $p(\frac{y}{4})=\frac{4}{y}$, $p(v)=\frac{1}{v}$, $\boxed{u(x,y)=x^2-y^2}$.

[Única por dibujo o por $T(y)=0\cdot(2y)-(-2)\cdot1\equiv2\neq0$].

El otro dato (sobre característica) $p(1)x^2-x^4=0\rightarrow p(1)=x^2$. **Ninguna solución**.

6. a) $\boxed{u_{yy}+4u_{xy}+5u_{xx}+u_y+2u_x=x}$ $\begin{array}{c}B^2-4AC=-4\\ \text{elíptica}\end{array}$ $\begin{cases}\xi=x-2y\\ \eta=y\end{cases}$, $\begin{cases}u_y=-2u_\xi+u_\eta\\ u_x=u_\xi\end{cases}$,

$\begin{cases}u_{yy}=4u_{\xi\xi}-4u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\\ u_{xy}=-2u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta}\\ u_{xx}=u_{\xi\xi}\end{cases} \longrightarrow \boxed{u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+u_\eta=\xi+2\eta}$ (no resoluble).

b) $\boxed{u_{yy}+6u_{xy}+9u_{xx}+9u=9}$ $\begin{array}{c}B^2-4AC=0\\ \text{parabólica}\end{array}$ $\begin{cases}\xi=x-3y\\ \eta=y\end{cases} \to \begin{cases}u_{xx}=u_{\xi\xi}\\ u_{xy}=-3u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta}\\ u_{yy}=9u_{\xi\xi}-6u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\end{cases} \longrightarrow$

$\boxed{u_{\eta\eta}+9u=9} \xrightarrow{\mu^2+9=0} u=p(\xi)\cos 3\eta+q(\xi)\,\mathrm{sen}\,3\eta+1\,,$

$\boxed{u(x,y)=p(x-3y)\cos 3y+q(x-3y)\,\mathrm{sen}\,3y+1}\,.$

d) $\boxed{3u_{tt}-2u_{xt}-u_{xx}+8u_t-8u_x=0}$ $\begin{array}{c}B^2-4AC=16\\ \text{hiperbólica}\end{array}$ $\begin{cases}\xi=x+t\\ \eta=x-\frac{t}{3}\end{cases}$, $\begin{cases}u_t=u_\xi-\frac{1}{3}u_\eta\\ u_x=u_\xi+u_\eta\end{cases}$,

$\begin{cases}u_{tt}=u_{\xi\xi}-\frac{2}{3}u_{\xi\eta}+\frac{1}{9}u_{\eta\eta}\\ u_{xt}=u_{\xi\xi}+\frac{2}{3}u_{\xi\eta}-\frac{1}{3}u_{\eta\eta}\\ u_{xx}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\end{cases}$, $u_{\xi\eta}+2u_\eta=0\,,\ v_\xi=-2v\,,\ v=p^*(\eta)\,e^{-2\xi}=u_\eta\,,$

$u=p(\eta)\,e^{-2\xi}+q(\xi)\,,\ \boxed{u=p\big(x-\tfrac{t}{3}\big)\,e^{-2x-2t}+q(x+t)}\,.$

8a. $\boxed{u_{tt}+4u_{tx}+4u_{xx}+u_t+2u_x=0}$. $\begin{matrix} B^2-4AC=0 \\ \text{parabólica}\end{matrix}$ $\left\{\begin{array}{l}\xi=x-2t\\ \eta=t\end{array}\right.$ $\rightarrow$ $\left\{\begin{array}{l}u_x=u_\xi\\ u_t=-2u_\xi+u_\eta\end{array}\right.$,

$$\left\{\begin{array}{l}u_{xx}=u_{\xi\xi}\\ u_{xt}=-2u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta}\\ u_{tt}=4u_{\xi\xi}-4u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\end{array}\right. \rightarrow \boxed{u_{\eta\eta}+u_\eta=0} \xrightarrow{\lambda(\lambda+1)=0} u=p(\xi)+q(\xi)\,\mathrm{e}^{-\eta}\,,$$

$$\boxed{u(x,t)=p(x-2t)+q(x-2t)\,\mathrm{e}^{-t}} \rightarrow u_t=-2p'(..)-\big[2q'(..)+q(..)\big]\mathrm{e}^{-t}\,.$$

$$\left\{\begin{array}{l}u(x,0)=p(x)+q(x)=1-x\,,\ p'(x)+q'(x)=-1\\ u_t(x,0)=-2p'(x)-2q'(x)-q(x)=1\,,\ q(x)=1\rightarrow p(x)=-x\end{array}\right. \nearrow \boxed{u(x,t)=2t-x+\mathrm{e}^{-t}}\,.$$

$$u_t=2-\mathrm{e}^t\,,\ u_x=-1\,,\ u_{tt}=\mathrm{e}^t\,,\ u_{tx}=u_{xx}=0\,;\ 2-\mathrm{e}^t+2-\mathrm{e}^t-1=0\,.$$

$$u(x,0)=-x+1\,,\ u_t(x,0)=2-1\,.$$

10. $\boxed{u_{xy}+2u_y+3u_x+6u=1}$ Haciendo $u=\mathrm{e}^{py}\mathrm{e}^{qx}w$ se tiene:

$$\begin{array}{l}u_y=[pw+w_y]\,\mathrm{e}^{py+qx}\\ u_x=[qw+w_x]\,\mathrm{e}^{py+qx}\end{array}\,,\quad u_{xy}=[pqw+pw_x+qw_y+w_{xy}]\,\mathrm{e}^{py+qx}\rightarrow$$

$$w_{xy}+(q+2)w_y+(p+3)w_x+(pq+3p+2q+6)w=\mathrm{e}^{-py-qx}F(x,y)$$

Con $p=-3$, $q=-2$, casulalmente se anula también el último término.

$$u=\mathrm{e}^{-3y-2x}w\rightarrow w_{xy}=\mathrm{e}^{3y+2x}\rightarrow w=\tfrac{1}{6}\mathrm{e}^{3y+2x}+p(x)+q(y)\rightarrow$$

$$\boxed{u=\tfrac{1}{6}+\mathrm{e}^{-3y}\mathrm{e}^{-2x}[p(x)+q(y)]}\,.$$

9. a) $\boxed{\begin{array}{l} u_{tt}-4u_{xx}=e^{-t}\,,\ x,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=x^2, u_t(x,0)=-1 \end{array}}$ $\quad u=\frac{1}{2}\big[(x+2t)^2+(x-2t)^2\big]+\frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t}ds$
$\quad+\frac{1}{4}\int_0^t\!\int_{x-2[t-\tau]}^{x+2[t-\tau]}e^{-\tau}\,ds\,d\tau=x^2+4t^2+e^{-t}-1\,.$

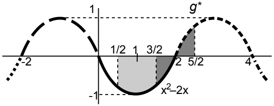
Una solución que sólo depende de t es: $v_{tt}=e^{-t}\to v=e^{-t}$. $w=u-v\to$

$$\begin{cases} w_{tt}-w_{xx}=0 \\ w(x,0)=x^2-1,\ w_t(x,0)=0 \end{cases} \to w=\frac{1}{2}\big[(x+2t)^2-1+(x-2t)^2-1\big]=x^2+4t^2-1\uparrow$$

16. $\boxed{\begin{array}{l} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\in[0,2]\,,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=0, u_t(x,0)=(x-1)^2 \\ u(0,t)=u(2,t)=t \end{array}}$

Para aplicar D'Alembert primero se hacen cero las condiciones de contorno. Una v adecuada que las satisface (la de los apuntes) es $v=t$.

$$\xrightarrow{w=u-t}\begin{cases} w_{tt}-w_{xx}=0\,,\ x\in[0,2], t\in\mathbf{R} \\ w(x,0)=0\,, w_t(x,0)=x^2-2x \\ w(0,t)=w(2,t)=0 \end{cases}\to$$

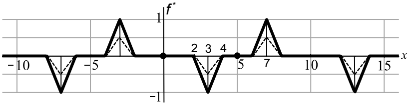


$$\begin{cases} w_{tt}-w_{xx}=0\,,\ x,t\in\mathbf{R} \\ w(x,0)=0, w_t(x,0)=g^* \end{cases},\quad g^* \text{ extensión impar y 4-periódica de } x^2-2x\,.$$

$$u(x,t)=t+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}g^*\to u\big(\tfrac{3}{2},1\big)=1+\frac{1}{2}\int_{1/2}^{5/2}g^* \underset{g^*\text{ impar}}{=} 1+\frac{1}{2}\int_{1/2}^{3/2}(s^2-2s)\,ds=\boxed{\frac{13}{24}}\,.$$

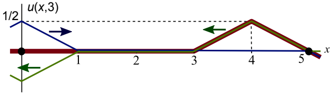
$\big[$No hemos necesitado utilizar la expresión de g^* que en $[2,4]$ sería $-(x-2)(x-4)\big]$.

17. $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\in[0,5]\,,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\begin{cases} 2-x\,,\ x\in[2,3]\ ,\ \ x-4\,,\ x\in[3,4] \\ 0\,,\ \text{resto de } [0,5] \end{cases} \\ u_t(x,0)=u(0,t)=u(5,t)=0 \end{cases}$



$$u(4,3)=\tfrac{1}{2}\big[f^*(7)+f^*(1)\big]=\tfrac{1}{2}\big[-f(3)+f(1)\big]=\tfrac{1}{2}[+1+0]=\boxed{\tfrac{1}{2}}\,.$$

Para dibujar $u(x,3)$ se traslada $\frac{f^*}{2}$ a derecha e izquierda 3 unidades y se suman las gráficas. En ese instante se cancelan en $[0,1]$. La onda que iba a la derecha ya ha rebotado y se ha invertido, y empieza a ir a la izquierda.



$$u(2,t)=\tfrac{1}{2}\big[f^*(2+t)+f^*(2-t)\big]\,.\ \text{Para } t\in[0,3] \text{ es } f^*(2-t)=0\,.$$

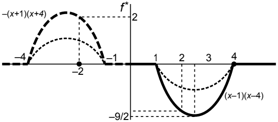
$$f^*(2+t)=f(2+t) \text{ depende de } t:\ u(2,t)=\frac{1}{2}\begin{cases} 2-(2+t)\,,\ t\in[0,1] \\ (2+t)-4\,,\ t\in[1,2] \\ 0\,,\ t\in[2,3] \end{cases}=\boxed{\begin{cases} -t/2\,,\ t\in[0,1] \\ t/2-1\,,\ t\in[1,2] \\ 0\,,\ t\in[2,3] \end{cases}}\,.$$

Para acabar, las instrucciones para la onda animada en Maple del campus:

```
> f:=x->piecewise(-8<x and x<-7,-8-x,-7<x and x<-6,x+6,
  -4<x and x<-3,x+4,-3<x and x<-2,-x-2,2<x and x<3,2-x,
  3<x and x<4,x-4,6<x and x<7,x-6,6<x and x<8,8-x,
  12<x and x<13,12-x,13<x and x<14,x-14):
  plot(f(x),x=-11..16,-1..1,thickness=3,gridlines=true);
  S:=t->1/2*(f(x-t)+f(x+t)):
> with(plots):
  animate(plot,[S(t),x=0..5],t=0..10,thickness=3,frames=101);
```

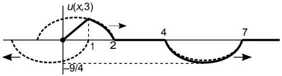
13. $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\geq 0\,,\,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\begin{cases}(x-1)(x-4)\,,\ x\in[1,4] \\ 0\,,\ x\in[0,1]\cup[4,\infty)\end{cases} \\ u_t(x,0)=u(0,t)=0 \end{cases}$

a] f^* impar. $u(1,3)=\frac{f^*(4)+f^*(-2)}{2}$ $=\frac{f(4)-f(2)}{2}=\boxed{1}$.



b] $u(x,3)=\frac{1}{2}f^*(\underset{\longleftarrow}{x+3})+\frac{1}{2}f^*(\underset{\longrightarrow}{x-3})$.

En ese instante están la onda que va hacia la derecha y la suma de la que va hacia ← con la extensión que viene. En concreto:



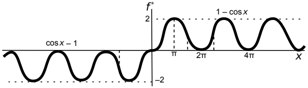
c] Si $x\in[0,1]$, $f^*(x+3)$ la da la incial y $f^*(x-3)$ la extensión:

$$u(x,3)=\tfrac{1}{2}\big[f(x+3)-f(3-x)\big]=\tfrac{1}{2}\big[(x+2)(x-1)-(2-x)(-x-1)\big]=\boxed{x}$$

ad32. $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\geq 0\,,\,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=1,\,u_t(x,0)=0\,,\,u(0,t)=\cos t \end{cases}$. $v=\cos t\cos x\,,\ v_t=-\operatorname{sen} t\cos x$

$\xrightarrow{w=u-v} \begin{cases} w_{tt}-w_{xx}=0\,,\ x\geq 0 \\ w(x,0)=1-\cos x,\,w_t(x,0)=w(0,t)=0 \end{cases} \to \begin{cases} w_{tt}-w_{xx}=0\,,\ x,t\in\mathbf{R} \\ w(x,0)=f^*(x),\,w_t(x,0)=0 \end{cases}$,

con f^* impar. $w(x,t)=\frac{1}{2}\big[f^*(x+t)+f^*(x-t)\big]$.



a] $w\big(\frac{\pi}{3},2\pi\big)=\frac{1}{2}\big[f\big(\frac{7\pi}{3}\big)-f\big(\frac{5\pi}{3}\big)\big]=0\ \to$

$u\big(\frac{\pi}{3},2\pi\big)=0+\cos\frac{\pi}{3}\cos 2\pi=\boxed{\frac{1}{2}}$.

b] Si $x\geq\pi$, $w(x,\pi)=\frac{1}{2}\big[f(x+\pi)+f(x-\pi)\big]=\frac{1}{2}\big[2-\cos(x+\pi)-\cos(x-\pi)\big]=1+\cos x$

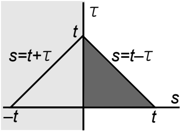
$\to\ u(x,\pi)=1+\cos x+\cos\pi\cos x=\boxed{1}$ [todavía no ha llegado la perturbación del origen].

[En la pizarra se hizo también con la mala $v=\cos t$ para ver cómo se complican los cálculos].

19. $\boxed{\begin{array}{l} u_{tt}-u_{xx}=6x\,,\ x\geq 0,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=u_x(0,t)=0 \end{array}}$ Calcular $u(0,t)$.

Hay que extender F par respecto a x ($-6x$ si $x\geq 0$).

$$u(0,t)=\tfrac{1}{2}\int_0^t\int_{-(t-\tau)}^{(t-\tau)}F^*\,ds\,d\tau=\int_0^t\int_0^{t-\tau}6s\,ds\,d\tau=t^3\,.$$



O bien, $v=-x^3$ solución y cumple el dato de contorno.

$$\xrightarrow{w=u+x^3}\begin{cases} w_{tt}-w_{xx}=0,\ x\geq 0 \\ w(x,0)=x^3 \\ w_t(x,0)=w_x(0,t)=0 \end{cases},\ \begin{cases} w_{tt}-w_{xx}=0,\ x\in\mathbf{R} \\ w(x,0)=\begin{cases} x^3, x\geq 0 \\ -x^3, x\leq 0\end{cases} \\ w_t(x,0)=0 \end{cases}\to w(0,t)=u(0,t)$$

$$=\tfrac{1}{2}\big[t^3-(-t)^3\big]=t^3\,.$$

20. $\boxed{\begin{array}{l} u_{tt}-\big(u_{rr}+\frac{2}{r}u_r\big)=0\,,r\geq 0,t\in\mathbf{R} \\ u(r,0)=r\,,\ u_t(r,0)=-2 \end{array}}$ $\xrightarrow{v=ru}\begin{cases} v_{tt}-v_{rr}=0\,,\ r\geq 0 \\ v(r,0)=r^2,\ v_t(r,0)=-2r\ \text{[impar]} \\ v(0,t)=0 \end{cases}$

$$\to\begin{cases} v_{tt}-v_{rr}=0\,,r\in\mathbf{R} \\ v(r,0)=f^*(r)=\begin{cases} r^2, r\geq 0 \\ -r^2, r\leq 0\end{cases} \\ v_t(r,0)=-2r \end{cases}\quad v(r,t)=\tfrac{1}{2}\big[f^*(r+t)+f^*(r-t)\big]-\int_{r-t}^{r+t}s\,ds$$

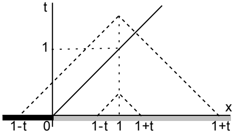
$$\to u(r,t)=\tfrac{1}{2r}\big[f^*(r+t)+f^*(r-t)\big]-2t\,.$$

i] $u(1,2)=\frac{1}{2}\big[f^*(3)+f^*(-1)\big]-4\underset{\text{impar}}{=}\frac{f(3)-f(1)}{2}-4=\boxed{0}$.

ii] Para $u(1,t)$ hay dos casos:

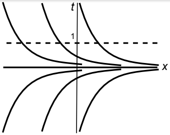
Si $t\leq 1$, $u(1,t)=\frac{1}{2}\big[(1+t)^2+(1-t)^2\big]-2t=\boxed{(1-t)^2}$.

Si $t\geq 1$, $u(1,t)=\frac{1}{2}\big[(1+t)^2-(1-t)^2\big]-2t=\boxed{0}$.



21. b) $\boxed{\begin{array}{l} t\,u_t-u_x=u \\ u(x,1)=f(x) \end{array}}$ $\frac{dt}{dx}=-t$ (lineal), $t=Ce^{-x}\to te^{x}=C$.

$\begin{cases}\xi=t\,e^x\\ \eta=t\end{cases}\to \eta u_\eta=u\,,\ u=p(\xi)\,\eta=p\big(te^x\big)\,t$.



$u(x,1)=p\big(e^x\big)=f(x)\,,\ p(v)=f(\ln v)\to \boxed{u(x,t)=t\,f\big(x+\ln t\big)}$

De $\begin{cases}\xi=te^x\\ \eta=x\end{cases}$ sale $-u_\eta=u\,,\ u=q(\xi)\,e^{-\eta}=q\big(te^x\big)\,e^{-x}\xrightarrow{d.i.}q(v)\overset{\uparrow}{=}v\,f(\ln v)$.

$\big[$Única: $t=1$ no tangente a las características, o $T=1\cdot 1-0\cdot(-1)=1\neq 0\ \forall x\big]$.

$\begin{cases}t\hat{u}_t+\mathrm{i}\,k\hat{u}=\hat{u}\\ \hat{u}(k,1)=\hat{f}(k)\end{cases}\to \hat{u}_t=\frac{1-\mathrm{i}\,k}{t}\hat{u}\to \hat{u}(k,t)=p(k)\,e^{\ln t-\mathrm{i}\,k\ln t}\xrightarrow{c.i.}\hat{u}=t\,\hat{f}(k)\,e^{-\mathrm{i}\,k\ln t}$.

Y como $\mathcal{F}^{-1}\big[\,\hat{f}(k)\,e^{ika}\big]=f(x-a)$, es $\boxed{u(x,t)=t\,f\big(x+\ln t\big)}$.

ad55c(jn1). $\boxed{\begin{array}{l} u_{tt}-u_{xt}+\frac{1}{4}u_{xx}+u_t-\frac{1}{2}u_x=0\\ u(x,0)=0\,,\ u_t(x,0)=g(x)\end{array}}$ $B^2-4AC=0$ parabólica $\begin{cases}\xi=x+\frac{t}{2}\\ \eta=t\end{cases}$, $\begin{cases}u_t=\frac{1}{2}u_\xi+u_\eta\\ u_x=u_\xi\end{cases}$,

$\begin{cases}u_{tt}=\frac{1}{4}u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\\ u_{xt}=\frac{1}{2}u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta}\\ u_{xx}=u_{\xi\xi}\end{cases}\to$ $u_{\eta\eta}+u_\eta=0\,,$ $u=p(\xi)+q(\xi)\,e^{-\eta},\ u=p\big(x+\frac{t}{2}\big)+q\big(x+\frac{t}{2}\big)\,e^{-t}$,

$u_t=\frac{p'}{2}+\big[\frac{q'}{2}-q\big]e^{-t}\to \begin{array}{l}u(x,0)=p(x)+q(x)=0\\ -q(x)=g(x)=p(x)\end{array}\to \boxed{u(x,t)=g\big(x+\frac{t}{2}\big)\big[1-e^{-t}\big]}$.

$\begin{cases}\hat{u}_{tt}+\mathrm{i}\,k\hat{u}_t-\frac{1}{4}k^2\hat{u}+\hat{u}_t+\frac{1}{2}\mathrm{i}\,k\hat{u}=0\\ \hat{u}(k,0)=0\,,\ \hat{u}(k,0)=\hat{g}(k)\end{cases}$. $\mu^2+(1+\mathrm{i}\,k)\mu-\frac{1}{4}k^2+\frac{1}{2}\mathrm{i}\,k=0$, $\mu=\frac{-1-\mathrm{i}\,k\pm\sqrt{1}}{2}=-\frac{\mathrm{i}\,k}{2},-1-\frac{\mathrm{i}\,k}{2}\to$

$\hat{u}=p(k)\,e^{-\mathrm{i}\,kt/2}+q(k)\,e^{-t-\mathrm{i}\,kt/2}$, $\begin{array}{l}p(k)+q(k)=0\\ -\frac{\mathrm{i}\,k}{2}[p(k)+q(k)]-q(k)=\hat{g}(k)\end{array}$, $\hat{u}\overset{\uparrow}{=}\hat{g}(k)\,e^{-\mathrm{i}\,kt/2}\big[1-e^{-t}\big]$

21d. $\boxed{\begin{array}{l} u_t - u_x = 2xe^{-x^2} \\ u(x,2) = 0 \end{array}}$ $\frac{dt}{dx} = -1 \to x+t = C$. [$t=2$ no característica y solución única]. Mejor: $\begin{cases} \xi = x+t \\ \eta = x \end{cases}$

$\to \begin{cases} u_t = u_\xi \\ u_x = u_\xi + u_\eta \end{cases}$, $u_\eta = -2\eta e^{-\eta^2}$. $u = p(\xi) + e^{-\eta^2} = p(x+t) + e^{-x^2}$.

$u(x,2) = p(x+2) + e^{-x^2} = 0 \to p(v) = -e^{-(v-2)^2}$, $\boxed{u(x,t) = e^{-x^2} - e^{-(x+t-2)^2}}$.

Si $f(x) = e^{-x^2}$, el término derecho es $-f'$ y su transformada es $ik\hat{f}$:

$\begin{cases} \hat{u}_t + ik\hat{u} = \frac{ik}{\sqrt{2}} e^{-k^2/4} \\ \hat{u}(k,2) = 0 \end{cases} \to \hat{u} = p(k)e^{-ikt} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-k^2/4} \xrightarrow{c.i.} p(k) = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-k^2/4+2ik}$,

$$\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-k^2/4} - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-k^2/4} e^{ik(2-t)}.$$

Como $\mathcal{F}^{-1}\big[\hat{f}(k)e^{ika}\big] = f(x-a)$, es $u(x,t) = e^{-x^2} - e^{-(x+t-2)^2}$.

ad51. $\boxed{\begin{array}{l} 2u_{tt} + 5u_{tx} + 2u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = f(x),\, u_t(x,0) = 0 \end{array}}$ a] $\begin{cases} 2\hat{u}_{tt} - 5ik\hat{u}_t - 2k^2\hat{u} = 0 \\ \hat{u}(k,0) = \hat{f}(k),\, \hat{u}_t(k,0) = 0 \end{cases}$ $2\mu^2 - 5ik\mu - 2k^2 = 0 \to \mu = 2ik,\, \frac{1}{2}ik$,

$\hat{u} = p(k)e^{2ikt} + q(k)e^{\frac{1}{2}ikt} \xrightarrow[c.i.]{} \begin{cases} p(k) + q(k) = \hat{f}(k) & -3p(k) = \hat{f}(k) \\ ik\big[2p(k) + \frac{1}{2}q(k)\big] = 0,\ q(k) \overset{\uparrow}{=} -4p(k) \end{cases} \to$

$\hat{u} = \frac{1}{3}\big[4\hat{f}(k)e^{\frac{1}{2}ikt} - \hat{f}(k)e^{2ikt}\big] \to \boxed{u(x,t) = \frac{1}{3}\big[4f\big(x - \frac{t}{2}\big) - f(x-2t)\big]}$.

b] Si $f(x) = x^2$ la solución es $u = \frac{1}{3}\big[4\big(x^2 - xt + \frac{1}{4}t^2\big) - \big(x^2 - 4xt + 4t^2\big)\big] = \boxed{x^2 - t^2}$.

[x^2 no tiene transformada. b] se podría hacer con las características, el enunciado no lo excluye:
Hiperbólica. $\begin{cases} \xi = x - 2t \\ \eta = x - \frac{t}{2} \end{cases} \to u_{\xi\eta} = 0$, $u = p(\xi) + q(\eta) = p(x-2t) + q\big(x - \frac{t}{2}\big)$, $\begin{cases} p(x) + q(x) = x^2 \\ -2p'(x) - \frac{1}{2}q'(x) = 0 \end{cases}$ $\overset{\uparrow}{\cdots}$].

30. a) $\boxed{\begin{array}{l} u_t-\frac{1}{4}u_{xx}+u_x=0\,,\, x\in\mathbf{R},\, t>0 \\ u(x,0)=e^{-x^2}\,,\ u \text{ acotada}\end{array}}$ $\left\{\begin{array}{l}\hat{u}_t=\big(\mathrm{i}\,k-\frac{k^2}{4}\big)\hat{u} \\ \hat{u}(k,0)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-k^2/4}\end{array}\right.$

$$\to\ \hat{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{ikt}\,e^{-\frac{k^2(t+1)}{4}}\ \to\ \boxed{u=\frac{1}{\sqrt{t+1}}\,e^{-\frac{(x-t)^2}{t+1}}}\,.$$

d) $\boxed{\begin{array}{l} u_t-2tu_{xx}=0\,,\ x\in\mathbf{R},\ t>0 \\ u(x,0)=\delta(x),\ u \text{ acotada}\end{array}}$ $\left\{\begin{array}{l}\hat{u}_t+2tk^2\hat{u}=0 \\ \hat{u}(k,0)=1/\sqrt{2\pi}\end{array}\right.$

$$\to\ \hat{u}=p(k)\,e^{-t^2k^2}\ \to\ \hat{u}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-t^2k^2}\ \to\ \boxed{u=\frac{1}{2\sqrt{\pi}\,t}e^{-x^2/4t^2}}\,.$$

29. $\boxed{\begin{array}{l} u_t-u_{xx}=e^{-x^2/4} \\ u(x,0)=0\,,\ u \text{ acotada}\end{array}}$ $\mathcal{F}[e^{-ax^2}]=\frac{1}{\sqrt{2a}}\,e^{-k^2/4a}\ \xrightarrow[a=1/4]{}\ \left\{\begin{array}{l}\hat{u}_t+k^2\hat{u}=\sqrt{2}\,e^{-k^2} \\ \hat{u}(k,0)=0\end{array}\right.$

$$\xrightarrow{\hat{u}_p \text{ a ojo}}\ \hat{u}(k,t)=p(k)\,e^{-k^2t}+\frac{\sqrt{2}}{k^2}e^{-k^2}\ \xrightarrow{\text{d.i.}}\ \hat{u}=\frac{\sqrt{2}}{k^2}\big[e^{-k^2}-e^{-k^2(t+1)}\big]\,.$$

De $u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{u}(k,t)e^{-ikx}dk$, sale $u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-k^2}-e^{-k^2(t+1)}}{k^2}\,e^{-ikx}dk$.

[solución decente en $k=0$].

$$u(0,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-k^2}-e^{-k^2(t+1)}}{k^2}\,dk=\Big[\frac{e^{-k^2(t+1)}-e^{-k^2}}{\sqrt{\pi}\,k}\Big]_{-\infty}^{\infty}$$
$$+\frac{2(t+1)}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-k^2(t+1)}dk-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-k^2}dk=\boxed{2\sqrt{t+1}-2}\,.$$

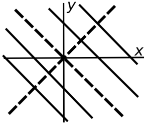
[Es normal que tienda a ∞. Estamos constantemente metiendo calor en toda la varilla].

ad1j(c0). Sea $u_y - u_x = 2(x+y)u$ y los datos i) $u(x,-x)=1$, ii) $u(x,x)=1$. Calcular su solución general, la única que satisface uno de los datos y, si existen, dos soluciones distintas que cumplan el otro.

$\frac{dy}{dx}=-1$, $\boxed{y+x=C}$ características. $\begin{cases}\xi=y+x\\ \eta=y\end{cases} \to \begin{cases}u_y=u_\xi+u_\eta\\ u_x=u_\xi\end{cases}$, $u_\eta=2(x+y)u=2\xi u$,

$u=p(\xi)\,e^{2\xi\eta}=p(y+x)\,e^{2y^2+2xy}$.

O bien: $\begin{cases}\xi=y+x\\ \eta=x\end{cases} \to \begin{cases}u_y=u_\xi\\ u_x=u_\xi+u_\eta\end{cases}$, $-u_\eta=2\xi u$, $u=q(\xi)\,e^{-2\xi\eta}=q(y+x)\,e^{-2xy-2x^2}$.



El dato i), sobre característica, dará ∞ o 0 soluciones.
El ii) solución única:

$$u(x,x)=p(2x)\,e^{4x^2}=1 \to p(v)=e^{-v^2} \to$$
$$u(x,y)=e^{2y^2+2xy-y^2-2xy-x^2}=\boxed{e^{y^2-x^2}}.$$

O bien: $u(x,x)=q(2x)\,e^{-4x^2}=1 \to q(v)=e^{v^2}$, $u(x,y)\overset{\uparrow}{=}e^{y^2+2xy+x^2-2xy-2x^2}$.

[Comprobamos: $2y\,e^{\cdots}+2x\,e^{\cdots}=(x+y)\,e^{\cdots}$ y además $u(x,x)=e^0$].

[Única porque $y=x$ claramente no es tangente a las rectas características. O porque en el proceso de cálculo ha quedado determinada $p(v)$ de forma única $\forall v$. O porque $T(x)=1\cdot1-1\cdot(-1)=2\neq0\ \ \forall x$].

Para i) se obtiene $u(x,-x)=p(0)=1$. [$T(x)\equiv0$ confirma que es característica].

Cada $p\in C^1$ que valga 1 en 0 nos da una de las infinitas soluciones.

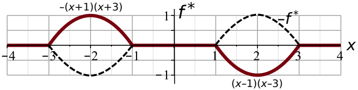
$$p(v)\equiv1 \to u=e^{2y(x+y)},\ p(v)=e^{-v^2} \to u=e^{y^2-x^2} \text{ anterior, ...}$$

cntr20. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ x\geq 0\,,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=\begin{cases}(x-1)(x-3)\,,\ x\in[1,3] \\ 0\,,\ \text{resto de } [0,\infty)\end{cases} \\ u_t(x,0)=u(0,t)=0 \end{cases}$.

a] Hallar el valor de $u(1,3)$.
b] Dibujar $u(x,2)$ y dar su expresión.
c] Dibujar $u(1,t)$ para $t\geq 0$.

f^* extensión impar de f definida $\forall x$.

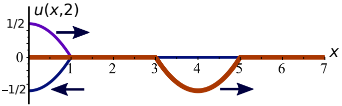
Entonces $u(x,t)=\frac{1}{2}\big[f^*(x+t)+f^*(x-t)\big]$.



a] $u(1,3)=\frac{1}{2}\big[f^*(4)+f^*(-2)\big]=\frac{1}{2}\big[-f(2)\big]=\boxed{\frac{1}{2}}$.

b] Se lleva $f^*/2$ a derecha e izquierda 2 unidades y se suman las gráficas. Se cancelan las ondas en $[0,1]$ (son las parábolas simétricas). La que iba a la derecha lo sigue haciendo y en su expresión basta poner $x-2$ en vez de x:

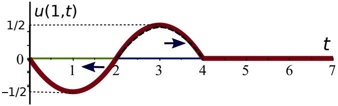
$u(x,0)=\frac{1}{2}(x-3)(x-5)$ si $x\in[3,5]$ y 0 resto.



c] Como f^* es impar, $f^*(1-t)=-f^*(t-1)\rightarrow$

$u(1,t)=\frac{1}{2}\big[f^*(t+1)-f^*(t-1)\big]$

basta llevar $f^*/2$ una unidad a la izquierda y $-f^*/2$ a la derecha y sumar gráficas.

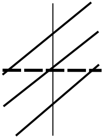


[Su expresión no pedida sería: $t(t-2)$, $t\in[0,2]$, $-(t-2)(t-4)$, $t\in[2,4]$, 0 después].

y más hechos ese curso (de control y final del 20)

ad55b. Resolver $\begin{cases} u_{tt}+2u_{xt}+u_{xx}=u\,,\ x,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=0\,,\ u_t(x,0)=g(x)\end{cases}$ a] con la forma canónica, b] mediante la $\mathcal{F}$.

$B^2-4AC=0$ parabólica, $\begin{cases}\xi=x-t\\ \eta=t\end{cases} \to \begin{cases}u_x=u_\xi\\ u_t=-u_\xi+u_\eta\end{cases}$,



$\begin{cases}u_{xx}=u_{\xi\xi}\\ u_{xt}=-u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta}\\ u_{tt}=u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\end{cases} \to \boxed{u_{\eta\eta}-u=0}$ forma canónica $\mu=\pm1$

$\to u=p(\xi)\,e^{\eta}+q(\xi)\,e^{-\eta}=\boxed{p(x-t)\,e^{t}+q(x-t)\,e^{-t}}$ solución general

$\to u_t(x,t)=\big[p(x-t)-p'(x-t)\big]e^{t}-\big[q'(x-t)+q(x-t)\big]e^{-t}$.

$\begin{cases} p(x)+q(x)=0 \to q(x)=-p(x)\,,\ p'(x)+q'(x)=0 \downarrow \\ p(x)-q(x)-p'(x)-q'(x)=g(x) \qquad p(x)=\frac{1}{2}g(x) \nearrow \end{cases}$ $u=\frac{1}{2}g(x-t)\big[e^{t}-e^{-t}\big]=\boxed{g(x-t)\,\mathrm{sh}\,t}$.

b] $\begin{cases}\hat{u}_{tt}-2ik\hat{u}_t-k^2\hat{u}-\hat{u}=0\\ \hat{u}(k,0)=0,\ \hat{u}_t(k,0)=\hat{g}(k)\end{cases}$ $\begin{matrix}\mu^2-2ik\mu-k^2-1=0 \to \\ \mu=ik\pm\sqrt{-k^2+k^2+1}=ik\pm1\end{matrix}$ $\to \hat{u}=p(k)\,e^{(ik+1)t}+q(k)\,e^{(ik-1)t}$

$\xrightarrow{c.i.} \begin{cases} p(k)+q(k)=0\,, \qquad q(k)=-p(k)\searrow \\ (ik+1)p(k)+(ik-1)q(k)=\hat{g}(k) \quad 2p(k)=\hat{g}(k)\nearrow\end{cases}$ $p(k)=\frac{1}{2}\hat{g}(k)\,,\ \hat{u}(k,t)=\hat{g}(k)\,e^{ikt}\,\mathrm{sh}\,t$

$\to u(x,t)=g(x-t)\,\mathrm{sh}\,t$.

6d. $\boxed{3u_{tt}-2u_{xt}-u_{xx}+8u_t-8u_x=0}$ con $\mathcal{F}$:

$3\hat{u}_{tt}+2ik\hat{u}_t+k^2\hat{u}+8\hat{u}_t+8ik\hat{u}=0$. $3\mu^2+2(4+ik)\mu+k^2+8ik=0$, $\mu=\frac{ik-8}{3}, -ik$

$\to \hat{u}=p(k)\,e^{(ik-8)t/3}+q(k)\,e^{-ikt}$, $\boxed{u(x,t)=p\big(x-\frac{t}{3}\big)\,e^{-8t/3}+q(x+t)}$ (equivalente a la de pag7).