Problemas 2 para la pizarra

ad3. Sea $y''+2xy'+2y=0$. Calcular 3 términos no nulos de la serie solución con $y(0)=1, y'(0)=0$. Hallar todos e identificarla con una función elemental.

3. Sea $2\sqrt{x}\,y''-y'=0$. ¿Es $x=0$ singular regular? Calcular, hasta tercer orden, el desarrollo en torno a $x=1$ de la solución que cumple $y(1)=y'(1)=1$.

1b. Resolver $(1-x)(1-2x)y''+2xy'-2y=0$, $y(0)=y'(0)=1$. ¿Dónde converge la serie? Hallar las raíces del polinomio indicial en cada singular regular.

8. Sea $3xy''+(2-6x)y'+2y=0$. Hallar una solución no analítica en $x=0$. Hallar 4 términos del desarrollo de una no trivial que sea analítica en $x=0$.

ad18f. Sea $xy''-(1+x)y'+y=0$. Dar 4 términos no nulos de una serie solución que se anule en $x=0$. ¿Están acotadas todas en $x=0$? ¿Son analíticas?

ad13(s0). Sea $2x^2y''+x(3-x)y'-y=0$. ¿Posee soluciones analíticas no triviales en $x=0$? Calcular una solución no acotada en $x=0$, dando la recurrencia.

ad15. Sea $x^2y''-x(x+5)y'+9y=0$. Dar 3 términos no nulos del desarrollo de una solución analítica en $x=0$. Hallar la regla de recurrencia. ¿Tienden a 0 todas las soluciones cuando $x\to 0$?

18(jn1). Sea $x(x+1)y''+(x-1)y'=0$. Hallar 3 términos no nulos de solución que se anule en $x=0$. Precisar si hay soluciones no acotadas para $x\to\infty$.

20. Sea $x(x-1)y''+y'-py=0$. Deteminar para qué p hay solución polinómica. Probar que si $p=2$ existen soluciones que tienden a 0 cuando $x\to\infty$.

ad3. $\boxed{y''+2xy'+2y=0}$ $x=0$ regular. Probamos $y=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ con $c_0=1$, $c_1=0$.

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} + \sum_{k=1}^{\infty} 2kc_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} 2c_k x^k = 0 \;\to$$

$$x^0:\ 2c_2+2c_0=0 \to c_2=-1\,. \quad x^1:\ 6c_3+4c_1=0 \to c_3=-\tfrac{2}{3}c_1=0\,.$$

$$x^2:\ 12c_4+6c_2=0 \to c_4=-\tfrac{1}{2}c_2=\tfrac{1}{2} \;\to\; \boxed{y=1-x^2+\tfrac{1}{2}x^4+\cdots}\,.$$

O bien, por ser pocos términos, sustituyendo en la ecuación y derivándola:

$$y''(0)+y(0)=0\,,\ y''(0)=-2\,.$$
$$y'''+2xy''+4y'=0\,,\ y'''(0)=-4y'(0)=0\,. \qquad \uparrow$$
$$y^{iv}+2xy'''+6y''=0\,,\ y^{iv}(0)=-6y''(0)=12\,. \quad \ldots$$

Para dar el término general encontramos la regla de recurrencia:

$$x^k:\ (k+2)(k+1)c_{k+2}+2(k+1)c_k=0\,,\ c_{k+2}=-\tfrac{2}{k+2}\,c_k \ \text{ó}\ c_k=-\tfrac{2}{k}\,c_{k-2}$$

$$\to \quad c_6=-\tfrac{1}{3}c_4=-\tfrac{1}{6}\,,\ c_8=-\tfrac{1}{4}c_4=\tfrac{1}{4!}\,,\ \ldots$$

$$c_{2k}=-\tfrac{1}{k}c_{2k-2}=\tfrac{1}{k(k-1)}c_{2k-4}=\cdots$$

$$\to \quad \boxed{y=1-x^2+\tfrac{1}{2!}x^4-\tfrac{1}{3!}x^6+\cdots+\tfrac{(-1)^k}{k!}x^{2k}+\cdots=e^{-x^2}}\,.$$

3. $\boxed{2\sqrt{x}\,y''-y'=0}$ $x=0$ singular no regular $\left(a^*(x)=-\frac{\sqrt{x}}{2}\right.$ no analiítica$\left.\right)$.

$\xrightarrow{x-1=s} 2[1+s]^{1/2}y''-y'=0\,,\ 2\big[1+\frac{s}{2}-\frac{s^2}{8}+\cdots\big][2c_2+6c_3s+\cdots]-[c_1+2c_2s+\cdots]=0\,,$

s^0: $4c_2-c_1=0\,,\ c_2=\frac{1}{4}$. s^1: $12c_3+2c_2-2c_2=0\,,\ c_3=0$. ...

$$y=1+(x-1)+\frac{(x-1)^2}{4}+\cdots$$

O bien, $y''(1)=\frac{y'(1)}{2}=\frac{1}{2}$; $2\sqrt{x}\,y'''+\big(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\big)y''=0\,,\ y'''(1)=0$; ... $\uparrow$

$\Big[$Solución calculable sin series: $v'=\frac{v}{2\sqrt{x}}\,,\ v=Ce^{\sqrt{x}},\ y=K+C(\sqrt{x}-1)\,e^{\sqrt{x}} \overset{d.i.}{\to} y=1+2(\sqrt{x}-1)\,e^{\sqrt{x}}\Big]$.

1b. $\boxed{(1-x)(1-2x)y''+2xy'-2y=0}$ $x=0$ regular. $y=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k \to$

$c_k=\frac{3(k-2)}{k}c_{k-1}-\frac{2(k-3)}{k}c_{k-2}\,,\quad c_0=c_1=1\to c_2=1\,,\ c_3=1\,,\ldots$

Si $c_{k-2}=c_{k-1}=1 \Rightarrow c_k=\frac{k}{k}=1 \to \boxed{y=1+x+x^2+\cdots=\frac{1}{1-x}}$.

O bien, $y_1=x\,,\ e^{-\int a}=e^{-\int(\frac{2}{1-x}-\frac{2}{1-2x})},\ y_2=x\int\frac{1-2x}{x^2(1-x)^2}=\int\big(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(1-x)^2}\big)=-\frac{1}{1-x}\,,\ \ldots$

La serie converge en $(-1,1)$ $\big[$el teorema decía que al menos en $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\big]$.

$x=\frac{1}{2}$ (con $r=2,0$) y $x=1$ (con $r=0,-1$) son singulares regulares.

8. $\boxed{3xy''+(2-6x)y'+2y=0}$ $x=0$ singular regular. $\lambda(\lambda-1)+\frac{2}{3}\lambda=0$, $\lambda=\frac{1}{3}, 0$.

No analítica $y_1=x^{1/3}\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k \to$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big[3(k+\tfrac{1}{3})(k-\tfrac{2}{3})c_kx^{k-2/3}+2(k+\tfrac{1}{3})c_kx^{k-2/3}-6(k+\tfrac{1}{3})c_kx^{k+1/3}+2c_kx^{k+1/3}\Big]$$

$$\to x^{-2/3}:\ 0c_0=0\,;\quad x^{1/3}:\ 4c_1=0\,;$$

$$x^{k-2/3}:\ c_k=\frac{6(k-1)}{k(3k+1)}c_{k-1}\ \to\ c_2=c_3=\cdots=0\ \to\ \boxed{y_1=x^{1/3}}\,.$$

$$y_2=x^{1/3}\int\frac{e^{\int(2-\frac{2}{3x})}}{x^{2/3}}dx=x^{1/3}\int\frac{1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+\cdots}{x^{4/3}}dx$$

$$=-3\big(1-x-\tfrac{2}{5}x^2-\tfrac{1}{6}x^4+\cdots\big)=-3\sum_{0}^{\infty}\frac{2^nx^n}{n!(1-3n)}\,.$$

O bien: $y_2=\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k \to \sum_{k=0}^{\infty}[(3k-1)kb_kx^{k-1}-2(3k-1)b_kx^k]=0 \to$

$$x^0: b_1=-b_0\,;\quad x^1: b_2=\tfrac{2}{5}b_1=-\tfrac{2}{5}b_0\,;\quad x^{k-1}: b_k=\frac{2(3k-4)}{k(3k-1)}b_{k-1}$$

$$\to\ b_3=\tfrac{5}{12}b_2=-\tfrac{1}{6}b_0\,;\ \ldots \to\ \boxed{y_2=1-x-\tfrac{2}{5}x^2-\tfrac{1}{6}x^3+\cdots}\,.$$

ad18f. $\boxed{xy''-(1+x)\,y'+y=0}$ $x=0$ singular regular con $r(r-1)-r=0$, $r=2,0$.

Se anula en $x=0$: $y_1=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+2}$ $\rightarrow$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\big[(k+2)(k+1)c_kx^{k+1}-(k+2)c_kx^{k+1}-(k+2)c_kx^{k+2}+c_kx^{k+2}\big]=0\ \rightarrow$$

$$x^1: 2c_0-2c_0=0\,,\ \forall c_0\,.\quad x^2: 3c_1-c_0=0\,,\ c_1=\tfrac{1}{3}c_0\,.$$

$$x^{k+1}:\ (k+2)kc_k-kc_{k-1}=0\rightarrow c_k=\tfrac{1}{k+2}c_{k-1}\ \rightarrow$$

$$c_2=\tfrac{1}{4}c_1=\tfrac{1}{12}c_0\ ,\ c_3=\tfrac{1}{5}c_2=\tfrac{1}{60}c_0\,,\ \dots\ \rightarrow$$

$$\boxed{y_1=x^2+\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{12}x^4+\tfrac{1}{60}x^5+\cdots}\quad\big[=2(e^x-1-x)\big].$$

$y_2=\sum_{k=0}^{\infty} b_kx^k+dy_1\ln x$ también está acotada en $x=0$, porque $x^2\ln x\xrightarrow{x\to 0}0$.
(sea o no $d=0$)

Es analítica y_1 en $x=0$. Si $d=0$ lo será también y_2 (si $d\neq 0$, no).

$$\sum_{k=0}^{\infty}\big[k(k-2)b_kx^{k-1}-(k-1)b_kx^k\big]+d\big[2y_1'-\tfrac{2}{x}y_1-y_1\big]$$

$$=-b_1+b_0+(3b_3-b_2)x^2+\cdots+d\big[4x+\cdots-2x+\cdots\big]=0\ \rightarrow\ \begin{array}{l} x^0: b_1=b_0\,.\\ x^1: d[2]=0\,.\end{array}$$

[Con un poco de vista o alguna integral se puede dar la solución general sin series: $y=c_1e^x+c_2(1+x)$].

ad13(s0). $\boxed{2x^2y''+x(3-x)y'-y=0}$ $r^2+\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}=0$, $r=\frac{1}{2},-1$.

$y_1=x^{1/2}\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k$, $y_2=x^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k$ no analíticas. No acotada $y_2=\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^{k-1}$

$\to \sum_{k=0}^{\infty}\left[2(k-1)(k-2)b_kx^{k-1}+3(k-1)b_kx^{k-1}-(k-1)b_kx^k-b_kx^{k-1}\right]=0 \to$

x^{-1}: $(4-3-1)b_0=0$, b_0 cualquiera. x^0: $b_0-b_1=0$, $b_1=b_0$.

x^1: $(3-1)b_2=0$, $b_2=0$. x^{k-1}: $\left[2k^2-6k+4+3k-3-1\right]b_k-(k-2)b_{k-1}=0$.

$\boxed{b_k=\frac{k-2}{k(2k-3)}b_{k-1}} \to b_k=0, k\geq 2$. $\boxed{y_2=\frac{1}{x}+1}$.

ad15. $\boxed{x^2y''-x(x+5)y'+9y=0}$ Singular regular. $r=3$ doble. $y_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+3}$.

$\sum_0\left[(k+3)(k+2)c_kx^{k+3}-(k+3)c_kx^{k+4}-5(k+3)c_kx^{k+3}+9c_kx^{k+3}\right]$

$=\sum_0\left[k^2c_kx^{k+3}-(k+3)c_kx^{k+4}\right]=0 \to$ x^3: $0\cdot c_0=0$, c_0 indeterminado;

x^4: $c_1-3c_0=0$, $c_1=3c_0$. x^5: $4c_2-4c_1=0$, $c_2=c_1=3c_0$.

x^{k+3}: $k^2c_k-(k+2)c_{k-1}=0$, $\boxed{c_k=\frac{k+2}{k^2}c_{k-1}}$, regla de recurrencia $\to$

$\boxed{y_1=x^3\left[1+3x+3x^3+\cdots\right]}\xrightarrow[x\to 0]{}0$. Y también lo hace $y_2=x^4\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k+y_1\ln x$ (pues $x^3\ln x\xrightarrow[x\to 0]{}0$).

```
> e2:=2*x^2*diff(y(x),x$2)+x*(3-x)*diff(y(x),x)-y(x)=0:
  Order:=4:dsolve(e2,y(x),series);dsolve(e2);
```

$$y(x) = \frac{\_C1\left(1+x+O\left(x^4\right)\right)}{x} + \_C2\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{10}x+\frac{3}{280}x^2+\frac{1}{1008}x^3+O\left(x^4\right)\right)$$

$$y(x) = \_C1\left(-\frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}\,(1+x)\,\operatorname{erfi}\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{x}}{2}\right)}{x} + \frac{2\,e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}\right) + \frac{\_C2\,(1+x)}{x}$$

```
> e3:=x^2*diff(y(x),x$2)-x*(x+5)*diff(y(x),x)+9*y(x)=0:
  Order:=5:dsolve(e3,y(x),series);dsolve(e3);
  taylor(x^3*exp(x)*(x^2+4*x+2)/2,x,8);
```

$$y(x) = \_C1\,x^3\left(1+3x+3x^2+\frac{5}{3}x^3+\frac{5}{8}x^4+O\left(x^5\right)\right) + \_C2\left(x^3\ln(x)\left(1+3x+3x^2 + \frac{5}{3}x^3+\frac{5}{8}x^4+O\left(x^5\right)\right) + x^3\left((-5)\,x-\frac{29}{4}x^2-\frac{173}{36}x^3-\frac{193}{96}x^4+O\left(x^5\right)\right)\right)$$

$$y(x) = \_C1\,x^3\,e^x\left(x^2+4x+2\right) + \_C2\left(e^x\left(x^2+4x+2\right)\operatorname{Ei}_1(x)-x-3\right)x^3$$

$$x^3+3x^4+3x^5+\frac{5}{3}x^6+\frac{5}{8}x^7+O\left(x^8\right)$$

Dos detalles: En el s0 no se atreve a decir, trabajando por series, que la y_2 se corta en el segundo término (hasta donde calculó todos fueron 0). Sí identifica la solución $1+1/x$ sin pedir series.

En el ad15 descubre que la y_1 es una solución elemental casi imposible de identificar a simple vista. La desarrollamos abajo por Taylor para comprobar.

18(jn1). $\boxed{x(x+1)y''+(x-1)y'=0}$ $x=0$ sing. regular, $r=2,0$. $y_1=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+2} \to$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\big[(k+2)(k+1)c_k x^{k+2}+(k+2)(k+1)c_k x^{k+1}+(k+2)c_k x^{k+2}-(k+2)c_k x^{k+1}\big]=0$$

$$\to\ x^1: 2c_0-2c_0=0,\ \forall c_0.\quad x^2: 4c_0+3c_1=0,\ c_1=-\tfrac{4}{3}c_0.$$

$$x^{k+1}:\ (k+1)^2c_{k-1}+k(k+2)c_k=0 \to c_k=-\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}c_{k-1} \to c_2=-\tfrac{9}{8}c_1=\tfrac{3}{2}c_0,\ \dots \to$$

$\boxed{y_1=x^2-\tfrac{4}{3}x^3+\tfrac{3}{2}x^4+\cdots}$ $\big[=2\ln(1+x)-\frac{2x}{1+x}$ (no acotada) pues $v'=[\frac{1}{x}-\frac{2}{x+1}]v,\ v=\frac{Cx}{(x+1)^2},\ \dots\big]$.

$x=\frac{1}{s}$, $\frac{1}{s}(1+\frac{1}{s})[s^4\ddot{y}+2s^3\dot{y}]-s^2(\frac{1}{s}-1)\dot{y}=0$, $s(1+s)\ddot{y}+(1+3s)\dot{y}=0$, $r=0$ doble.

La clara $y_1=1$ acotada, pero $y_2=s\sum c_k s^k+\ln s$ **no acotada** si $s\to 0^+$ $(x\to\infty)$.

20. $\boxed{x(x-1)y''+y'-py=0}$ $x=0$ singular regular, $r=2,0$. $y_1=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+2}$.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\big[(k+2)(k+1)c_k x^{k+2}-(k+2)(k+1)c_k x^{k+1}+(k+2)c_k x^{k+1}-pc_k x^{k+2}\big]=0 \to$$

$$x^1: -2c_0+2c_0=0,\ \forall c_0.\quad x^2: (2-p)c_0-3c_1=0,\ c_1=\tfrac{2-p}{3}c_0.$$

$x^{k+1} \to c_k=\frac{(k+1)k-p}{k(k+2)}c_{k-1}$. Polinomio si $\underset{n=1,2,\dots}{p=n(n+1)}$: $P_1=x^2$, $P_2=x^2-\frac{4}{3}x^3$, ...

Si $p=0$, y_1 no lo es, pero sí la clara $y_2=1$ (serían cero d y demás b_k en Frobenius).

Si $p=2$, $y_2=x^2\int\frac{e^{-\int[1/(x^2-x)]}}{x^4}=x^2\int\frac{1}{x^3(x-1)}=x^2\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+x+\frac{1}{2}\xrightarrow[x\to\infty]{}0$ [con $x=\frac{1}{s}$].

Más corto $x=\frac{1}{s}\to s^2(1-s)\ddot{y}+s(2-3s)\dot{y}-2y=0$, $r=1,-2$, $y_1=s\sum c_k s^k\xrightarrow[s\to 0]{}0$.

29ad. Hallar la solución de $(x^2-1)y''-4xy'+6y=0$ con $y(0)=-1$, $y'(0)=3$ y con Frobenius una que se anule en $x=1$. ¿Hay soluciones acotadas si $x\to\infty$?

$x=0$ regular $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \to \sum_{k=2}^{\infty}[k(k-1)c_k x^k - k(k-1)c_k x^{k-2}] + \sum_{k=1}^{\infty} -4kc_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} 6c_k x^k = 0$

$\to x^0: -2c_2+6c_0=0,\ c_2=-3\ \big[\,c_0=y(0)\,\big];\quad x^1:\ c_3=\frac{c_1}{3}=1\ \big[\,c_1=y'(0)\,\big];$

$c_{k+2}=\frac{(k-2)(k-3)}{(k+2)(k+1)}c_k \to c_4=c_5=0=c_6=c_7=\cdots,\quad y=-1+3x-3x^2+x^3=(x-1)^3$.

De otra forma: $-y''(0)+6y(0)=0 \to y''(0)=-6$. Y derivando:

$(x^2-1)y'''-2xy''+2y'=0 \to y'''(0)=2y'(0)=6$, $(x^2-1)y^{IV}=0 \to y^{IV}=0 \to y^{V}=y^{VI}=\cdots=0$.

$x=s+1 \to (2s+s^2)y''-4(1+s)y'+6y=0$, $s^2y''-s\frac{4(1+s)}{2+s}y'+\frac{6s}{2+s}y=0 \to$

Singular regular, $r=3,0$. $y_1=s^3\sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k = c_0s^3+c_1s^4+\cdots$ se anula en $s=0$.

$\sum_{k=0}^{\infty}\big[2k(k+3)c_k s^{k+2}+k(k+1)c_k s^{k+3}\big]=0 \to s^{k+2}:\ c_k=-\frac{k-1}{2(k+3)}c_{k-1},\ k\geq 1$.

$s^2:\ 0c_0=0 \to \forall c_0;\ s^3:\ 8c_1+0c_0=0 \to c_1=0=c_2=\cdots \to y_1=s^3\ \big[=(x-1)^3\big]$.

Como es $y=c_0\big[1+3x^2\big]+c_1\big[x+\frac{1}{3}x^3\big]$, es claro que no hay soluciones no triviales acotadas si $x\to\infty$, pero se puede ver directamente. $x=\frac{1}{s}\to$

$\big[\frac{1}{s^2}-1\big]\big[s^4\ddot{y}+2s^3\dot{y}\big]-\frac{4}{s}\big[-s^2\dot{y}\big]+6y=s^2\big[1-s^2\big]\ddot{y}+s\big[6-2s^2\big]\dot{y}+6y=0$.

$s=0$ singular regular, $r=-2,-3 \to y_1=\frac{1}{s^2}\sum$, $y_2=\frac{1}{s^3}\sum+dy_1\ln s \xrightarrow[s\to 0^+]{} \infty$.