8. Hallar λ_n , $\{y_n\}$ y desarrollar $f(x)=x$ en sus autofunciones:

a) $\begin{array}{l} y''+\lambda y=0 \\ y(0)=y'(1)=0 \end{array}$ b) $\begin{array}{l} y''+\lambda y=0 \\ y(-1)=y(1)=0 \end{array}$

2. Hallar λ_n , $\{y_n\}$ e $\langle y_n,y_n\rangle$ $\forall n$:

a) $\begin{array}{l} y''+\lambda y=0 \\ y(0)-2y'(0)=y(1)-2y'(1)=0 \end{array}$ c) $\begin{array}{l} x^2y''+xy'+\big[\lambda x^2-\frac{1}{4}\big]y=0 \\ y(1)=y(4)=0 \end{array}$ [con $s=\sqrt{\lambda}\,x$ o $u=\sqrt{x}\,y$]

5. b) Desarollar $f(x)=x^2$ en serie de: i) $\{\operatorname{sen} n\pi x\}$, ii) $\{\cos n\pi x\}$.

6. Sea $f(x)=\begin{cases} 1, & 0\le x\le 1 \\ 0, & 1<x\le 2 \end{cases}$. Hallar su desarrollo $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{2}$.

¿Cuánto sumará la serie si i) $x=1$, ii) $x=2$? Comprobarlo sustituyendo.

ad3. Desarrollar $f(x)=|\operatorname{sen} x|$ en serie de senos y cosenos en $[-\pi,\pi]$.

9b. Desarrollar $f(x)=1$ en las $\{y_n\}$ de $\begin{cases} y''+2y'+\lambda y=0 \\ y(0)+y'(0)=y(1/2)=0 \end{cases}$.

ad19. Sea $\begin{cases} x^2y''-4xy'+\lambda y=0 \\ y'(2)=y(3)=0 \end{cases}$. Ver si $\lambda=0$ y $\lambda=6$ son o no autovalores y si es así dar su $\{y_n\}$ y calcular $\langle y_n,y_n\rangle$.

Para esos λ ¿cuántas soluciones tiene $x^2y''-4xy'+\lambda y=4x-9$ con los datos?

15jn1. $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(0)=y\big(\frac{3\pi}{4}\big)+y'\big(\frac{3\pi}{4}\big)=0 \end{cases}$. Probar que $\lambda_1=1$ es autovalor y hallar el término con y_1 del desarrollo de $f(x)=1$.

Hallar la a para la que $y''+y=3\operatorname{sen}2x-a$ tiene infinitas soluciones con esos datos. Comprobar a partir de una gráfica que el segundo autovalor $\lambda_2>4$.

Problema 7 (7-11mz)

8. a) $\boxed{\begin{matrix} y''+\lambda y=0 \\ y(0)=y'(1)=0 \end{matrix}}$ $\lambda\geq 0$ (teor 1). $\lambda=0$: $y=c_1+c_2x$, $\begin{matrix} y(0)=c_1=0 \\ y'(1)=c_2=0 \end{matrix} \to y\equiv 0$.

$\lambda>0$: $y=c_1\cos wx+c_2\,\mathrm{sen}\,wx$, $\begin{matrix} c_1=0 \\ wc_2\cos w=0 \end{matrix}$, $\lambda_n=\frac{(2n-1)^2\pi^2}{2^2}$, $y_n=\left\{\mathrm{sen}\,\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right\}$, $n=1,2,\dots$

$$x=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\mathrm{sen}\,\frac{(2n-1)\pi x}{2}\,. \quad c_n=2\int_0^1 x\,\mathrm{sen}\,\frac{(2n-1)\pi x}{2}\,dx=\frac{8(-1)^{n+1}}{\pi^2(2n-1)^2}\,.$$

b) $\boxed{\begin{matrix} y''+\lambda y=0 \\ y(-1)=y(1)=0 \end{matrix}}$ Conviene **llevar otros intervalos a los del tipo** $[0,L]$ vistos: $s=x+1 \to$ $\begin{matrix} y''+\lambda y=0 \\ y(0)=y(2)=0 \end{matrix} \to$

$\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{2^2}$, $y_n\equiv\left\{\mathrm{sen}\,\frac{n\pi s}{2}\right\}=\left\{\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}+\frac{n\pi}{2}\right)\right\}$, $n=1,2,\dots$ Directamente ($\lambda>0$):

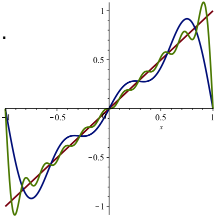
$\left.\begin{matrix} c_1\cos w-c_2\,\mathrm{sen}\,w=0 \\ c_1\cos w+c_2\,\mathrm{sen}\,w=0 \end{matrix}\right\} \to \left|\quad\right|=\mathrm{sen}\,2w=0$, $\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{2^2} \to$ $\begin{matrix} n \text{ par, } c_1=0\to \mathrm{sen} \\ n \text{ impar, } c_2=0\to \cos \end{matrix}$

$$x=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi(x+1)}{2}=\frac{2}{\pi}\left[\mathrm{sen}\,\pi x-\frac{\mathrm{sen}\,2\pi x}{2}+\frac{\mathrm{sen}\,3\pi x}{3}-\cdots\right].$$

Pues $r=1$. $\langle y_n,y_n\rangle=\int_{-1}^{1}\mathrm{sen}^2\,\frac{n\pi(x+1)}{2}=1$.

$$c_n=\int_{-1}^{1} x\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi(x+1)}{2}\,dx=-\frac{2[1+(-1)^n]}{n\pi}\,.$$

Dibujo de 3 y 10 términos no nulos de la serie:



2. a) $\boxed{\begin{array}{l} y''+\lambda y=0 \\ y(0)-2y'(0)=y(1)-2y'(1)=0 \end{array}}$ Sorprendentemente fácil con **autovalor positivo**:

$$\lambda<0\,,\ y=c_1e^{px}+c_2e^{-px} \to \begin{array}{l} c_1+c_2-2p[c_1-c_2]=0 \\ c_1e^{p}+c_2e^{-p}-2p[c_1e^{p}-c_2e^{-p}]=0 \end{array}.$$

$$\begin{vmatrix} 1-2p & 1+2p \\ [1-2p]e^{p} & [1+2p]e^{-p} \end{vmatrix} = [1-2p][1+2p][e^{-p}-e^{p}]=0 \text{ si } p=\tfrac{1}{2} \to c_2=0\,.$$

$\boxed{\lambda_0=-\frac{1}{4}}$ y su autofunción $\boxed{y_0=\{e^{x/2}\}}$.

$$\lambda=0\,,\ y=c_1+c_2x \to \begin{array}{l} c_1-2c_2=0 \\ c_1-c_2=0 \end{array} \Rightarrow c_1=c_2=0\,.$$ No autovalor.

$$\lambda>0\,,\ y=c_1\cos wx+c_2\operatorname{sen} wx \to$$

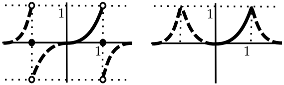
$$\begin{array}{l} c_1-2wc_2=0\,,\ c_1=2wc_2 \\ c_1\cos w+c_2\operatorname{sen} w-2w[-c_1\operatorname{sen} w+c_2\cos w]=0 \end{array} \to c_1(1+4w^2)\operatorname{sen} w=0\,.$$

Por tanto, $w_n=n\pi$, $\boxed{\lambda_n=n^2\pi^2}$, $\boxed{y_n=\{2n\pi\cos n\pi x+\operatorname{sen} n\pi x\}}$, $n=1,2,\dots$

$$\langle y_0,y_0\rangle=\int_0^1 e^x dx=\boxed{e-1}\,.$$

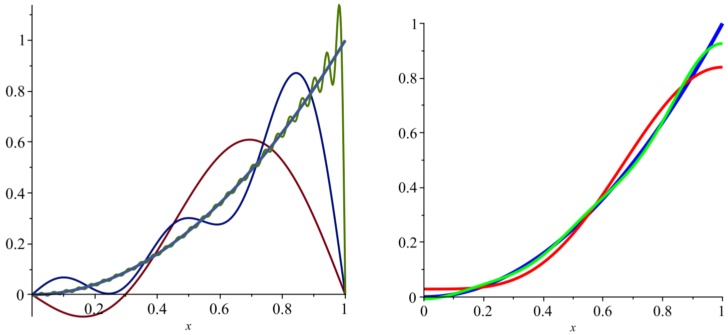
$$\langle y_n,y_n\rangle=\int_0^1\Big[2n^2\pi^2(1+\cos 2n\pi x)+2n\pi\operatorname{sen} 2n\pi x+\frac{1-\cos 2n\pi x}{2}\Big]dx=\boxed{\tfrac{1}{2}+2n^2\pi^2}\,.$$

5. b) $\boxed{f(x)=x^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}+\frac{4[(-1)^n-1]}{\pi^3 n^3}\right]\operatorname{sen} n\pi x$.



[Para esta serie aparecerán picos cerca de 1].

$x^2=\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x$ convergerá uniformemente en $[0,1]$.



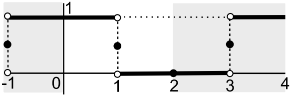
b) sen, $n=2,5,50$ b) cos, $n=2,5$

5. $\boxed{f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & 1<x\le 2\end{cases}}$ $\quad f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}\ \to\ a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx\,.$

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^1 dx=1\,,\ a_n=\int_0^1\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx=\frac{2}{n\pi}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{2}\ \to\ \frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}\cos\frac{(2m+1)\pi x}{2}\,.$$

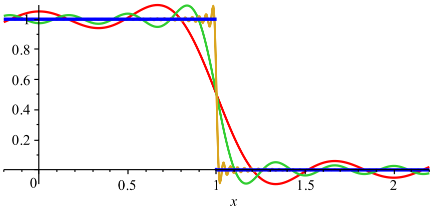
i) En $x=1$ es f discontinua y la serie tenderá hacia $\frac{1}{2}\big[f(1^-)+f(1^+)\big]=\frac{1}{2}$, como se comprueba fácil:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}\cos\frac{(2m+1)\pi}{2}=\frac{1}{2}$$ [los cosenos se anulan].



ii) Como tiende en **R** hacia la extensión par y 4-periódica de f, en $x=2$ debe tender hacia $f(2)=0$. Sustituyendo:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\cos(2m+1)\pi}{2m+1}=\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}=0\,,\ \text{pues }\ 1-\frac{1}{3}+\cdots=\arctan 1=\frac{\pi}{4}\,.$$



Utilizando Maple dibujamos la f y varias sumas parciales.

ad3. b) $\boxed{f(x)=|\operatorname{sen} x|}$ par $\to$ $b_n=0$. [Pasa a ser un desarollo en cosenos].

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\operatorname{sen} x|\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen} x\,dx=\frac{4}{\pi}\,.$$

Se debe calcular también aparte $a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen} x\cos x\,dx=0$.

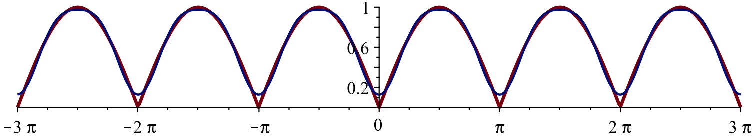
Los demás a_n para $n>1$:

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen} x\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\operatorname{sen}(1+n)x+\operatorname{sen}(1-n)x]dx$$

$$=-\frac{1}{\pi}\Big[\frac{\cos(1+n)x}{1+n}+\frac{\cos(1-n)x}{1-n}\Big]_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}\Big[\frac{1+\cos n\pi}{1+n}+\frac{1+\cos n\pi}{1-n}\Big]=\frac{2}{\pi}\,\frac{1+(-1)^n}{1-n^2}\quad\text{(sólo pares)}$$

$$\to\ |\operatorname{sen} x|=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos 2mx}{4m^2-1}\,.$$

La serie convergerá uniformemente en $[-\pi,\pi]$ (y en todo $\mathbf{R}$ a su extensión 2π-periódica, que es también la extensión par y π-periódica de $\operatorname{sen} x$).



(sólo con la constante y 2 cosenos)

9b. $\boxed{\begin{array}{l} y''+2y'+\lambda y=0 \\ y(0)+y'(0)=y(1/2)=0 \end{array}}$. $\left(y'e^{2x}\right)'+\lambda e^{2x}y=0$. $\mu=-1\pm\sqrt{1-\lambda}$.

$\lambda<1$, $y=c_1e^{(p-1)x}+c_2e^{-(p+1)x}$ $\underset{\sqrt{1-\lambda}=p}{}$ $\rightarrow$ $\begin{array}{l} p(c_1-c_2)=0 \searrow \\ c_1(e^{p/2}+e^{-p/2})e^{-1/2}=0 \end{array}$ $\rightarrow y\equiv 0$.

$\lambda=1 \rightarrow y=(c_1+c_2x)e^{-x} \rightarrow \begin{array}{l} y(0)+y'(0)=c_2=0 \\ y(\frac{1}{2})=(c_1+\frac{c_2}{2})e^{-1/2}=0 \end{array} \rightarrow c_1=c_2=0$.

$\lambda>1$, $y=(c_1\cos wx+c_2\,\mathrm{sen}\,wx)\,e^{-x}$, $\sqrt{\lambda-1}=w \rightarrow y(0)+y'(0)=c_2w=0 \rightarrow$
$y(\frac{1}{2})=c_1\cos\frac{w}{2}e^{-1/2}=0 \rightarrow \underset{n=1,2,\dots}{\lambda_n=1+(2n-1)^2\pi^2}$, $y_n=\left\{e^{-x}\cos(2n-1)\pi x\right\}$.

Por tanto será: $1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\langle 1,y_n\rangle}{\langle y_n,y_n\rangle}y_n$, con

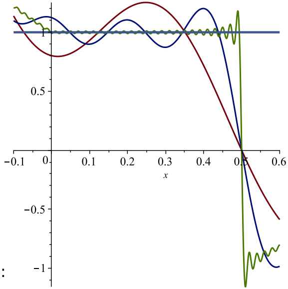
$\langle y_n,y_n\rangle=\int_0^{1/2}\cos^2(2n-1)\pi x\,dx=\frac{1}{4}$.

$\langle 1,y_n\rangle=\int_0^{1/2}e^x\cos(2n-1)\pi x\,dx$. Como

$\int e^x\cos bx\,dx=\frac{(\cos bx+b\,\mathrm{sen}\,bx)e^x}{1+b^2}$, concluimos

$$1=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n-1)\pi e^{1/2}-1}{1+(2n-1)^2\pi^2}\,e^{-x}\cos(2n-1)\pi x\ .$$

A la derecha, dibujo de 2, 5 y 20 términos de la complicada serie:



2. c) $\boxed{\begin{array}{l} x^2y''+xy'+\left[\lambda x^2-\frac{1}{4}\right]y=0 \\ y(1)=y(4)=0 \end{array}}$ $\left[xy'\right]'-\frac{y}{4x}+\lambda xy=0\,,\ \lambda>0\,.$ Casi Bessel.

$$s=\sqrt{\lambda}\,x=wx\ \to\ s^2y''+sy'+\left[s^2-\tfrac{1}{4}\right]y=0\,,\ y=c_1\frac{\cos wx}{\sqrt{x}}+c_2\frac{\operatorname{sen} wx}{\sqrt{x}}\ \xrightarrow{\text{c.c.}}$$

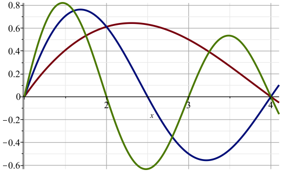
$$\begin{array}{c} c_1\cos w+c_2\operatorname{sen} w=0 \\ c_1\cos 4w+c_2\operatorname{sen} 4w=0 \end{array}\ \to\ \operatorname{sen} 3w=0\,,\ \lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{9}\,,\ y_n=\left\{\frac{1}{\sqrt{x}}\operatorname{sen}\frac{n\pi(x-1)}{3}\right\},\ n=1,2,\dots$$

O con el cambio que sugieren las soluciones de Bessel $p=\frac{1}{2}$: $u=\sqrt{x}\,y\ \to$

$$\left.\begin{array}{l} u''+\lambda u=0 \\ u(1)=u(4)=0 \end{array}\right\}\xrightarrow{x=s+1}\left.\begin{array}{l} u''+\lambda u=0 \\ u(0)=u(3)=0 \end{array}\right\},\ u_n=\left\{\operatorname{sen}\frac{n\pi s}{3}\right\}=\left\{\operatorname{sen}\frac{n\pi(x-1)}{3}\right\}.$$

El peso es $r=x$ y por tanto.

$$\langle y_n,y_n\rangle=\int_1^4 x\,\frac{1}{x}\operatorname{sen}^2\frac{n\pi(x-1)}{3}\,dx=\frac{1}{2}\int_1^4\left(1-\cos\frac{2n\pi(x-1)}{3}\right)dx=\frac{3}{2}\,.$$



las tres primeras autofunciones

ad19. $\boxed{\begin{array}{l} x^2y''-4xy'+\lambda y=0 \\ y'(2)=y(3)=0 \end{array}}$ $\left[\frac{y'}{x^4}\right]'+\frac{\lambda}{x^6}y=0$. $\mu^2-5\mu+\lambda=0$.

$\lambda=0 \to y=c_1x^5+c_2$. $\left.\begin{array}{r} c_1=0\downarrow \\ c_2=0 \end{array}\right\}$ No autovalor.

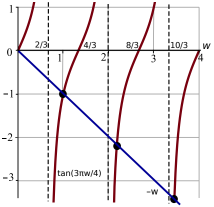
$\lambda=6$, $y=c_1x^3+c_2x^2$. $\left.\begin{array}{r} 12c_1+4c_2=0 \\ 9(3c_1+c_2)=0 \end{array}\right\} \to c_2=-3c_1$. Autovalor $\boxed{y_n=\{x^3-3x^2\}}$.

Como $r(x)=\frac{1}{x^6}$, $\langle y_n,y_n\rangle=\int_2^3\frac{1}{x^6}x^4(x-3)^2dx=\boxed{\frac{5}{2}-6\ln\frac{3}{2}}$.

Para $\lambda=0$ claramente solución **única**. [Sólo $y\equiv 0$ el homogéneo].
Para $\lambda=6$ habrá infinitas o ninguna según se anule o no la integral:

$\int_2^3\frac{4x-9}{x^6}(x^3-3x^2)\,dx=\left[-\frac{4}{x}+\frac{21}{2x^2}-\frac{9}{x^3}\right]_2^3=0$. **Infinitas**. [O con $y=c_1x^3+c_2x^2+2x-\frac{3}{2}$].

15jn1. $\boxed{\begin{array}{l} y''+\lambda y=0 \\ y(0)=y(3\pi/4)+y'(3\pi/4)=0 \end{array}}$ $y=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x$.



$c_1=0 \to c_2\left[\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]=0\ \forall c_2$. Autovalor, $\boxed{y_1=\{\operatorname{sen}x\}}$.

Ya forma autoadjunta. $r\equiv 1$.

$1=c_1\operatorname{sen}x+\cdots \to c_1=\frac{\langle 1,y_1\rangle}{\langle y_1,y_1\rangle}=\frac{\int_0^{3\pi/4}\operatorname{sen}x\,dx}{\int_0^{3\pi/4}\operatorname{sen}^2x\,dx}=\boxed{\frac{4(2+\sqrt{2})}{3\pi+2}}$.

$\int_0^{3\pi/4}(6\operatorname{sen}x\cos x-a)\operatorname{sen}x\,dx=0 \to a=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\boxed{\sqrt{2}-1}$.

[Más largo con $y=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}2x-a$].

$y=c_1\cos wx+c_2\operatorname{sen}wx$. $c_1=0$, $c_2\left[\operatorname{sen}\frac{3\pi w}{4}+w\cos\frac{3\pi w}{4}\right]=0$, $\tan\frac{3\pi w}{4}=\overset{\uparrow}{-}w$.

w_2 a la derecha de la asíntota en 2 $\Rightarrow \lambda_2=w_2^2>4$. [Numéricamente ≈ 4.76].

ad15. $\boxed{\begin{array}{l} y''-2y'+\lambda y=0 \\ y'(0)=y'(1)=0 \end{array}}$ Ver que $\lambda=0$ es autovalor, dar $\{y_0\}$ y hallar el c_0 del desarrollo de $f(x)=e^x$. Precisar cuántas soluciones tiene $y''-2y'-3y=3$ con esos datos.

$\left[e^{-2x}y'\right]'+\lambda e^{-2x}y=0$. Peso $r(x)=e^{-2x}$. $\mu=1\pm\sqrt{1-\lambda}$. $\lambda=0$, $\mu=0,2$.

$$y=c_1+c_2e^{2x}\,,\ y'=2c_2e^{2x} \to \left.\begin{array}{l} 2c_2=0 \\ 2c_2e^2=0 \end{array}\right\},\ \text{autovalor},\ \boxed{y_0=\{1\}}\,.$$

$$e^x=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\,y_n(x) \to c_0=\frac{\langle e^x,y_0\rangle}{\langle y_0,y_0\rangle}=\frac{\int_0^1 e^{-x}dx}{\int_0^1 e^{-2x}dx}=2\,\frac{1-e^{-1}}{1-e^{-2}}=2e\,\frac{e-1}{e^2-1}=\boxed{\frac{2e}{e+1}}\,.$$

El homogéneo tiene sólo $y\equiv 0$ ⇒ el no homogéneo tiene **solución única**.

[Directamente: La solución general de la no homogénea es: $y=c_1\,e^{3x}+c_2\,e^{-x}-1 \xrightarrow{c.c.} y=-1$].

ad25. c) $\boxed{\begin{array}{l} x^2y''+xy'+\lambda y=0 \\ y(1)=5y(2)-6y'(2)=0 \end{array}}$ ¿Son $\lambda=-1$ y $\lambda=0$ autovalores? ¿Cuántas soluciones de $x^2y''+xy'-y=x^2$ cumplen esos datos?

Euler con $\mu=\pm\sqrt{-\lambda}$. $\lambda=-1$: $\mu=\pm 1$, $y=c_1x+c_2x^{-1}$, $y'=c_1-c_2x^{-2} \xrightarrow{c.c.}$

$$\left\{\begin{array}{l} c_1+c_2=0 \\ 4c_1+4c_2=0 \end{array}\right. \to c_2=-c_1\,.\ \text{Autovalor, con } y_{-1}=\boxed{\left\{x-\frac{1}{x}\right\}}\,.$$

$$\lambda=0:\ \mu=0 \text{ doble},\ y=c_1+c_2\ln x\,,\ y'=\frac{c_2}{x} \xrightarrow{c.c.} \left\{\begin{array}{l} c_1=0 \searrow \\ c_2(5\ln 2-3)=0 \end{array}\right. \to c_1=c_2=0\,.$$

[Las demás w_n son las raíces de $\tan(w\sqrt{2})=\frac{3w}{5}$]. No autovalor.

El homogéneo tiene infinitas soluciones. $\left(xy'\right)'-\frac{1}{x}y=x=f(x)$.

$\int_1^2 f\,y_{-1}\,dx=\int_1^2(x^2-1)\,dx>0$ ⇒ el no homogéneo **no tiene solución**.

[Se podría ver a partir de la solución $y=c_1x+c_2x^{-1}+\frac{1}{3}x^2$].

1ad(s0). Sea $\begin{cases} x^2y''-xy'+\lambda y=0 \\ y'(1)=y(3)=0 \end{cases}$. Escribir en forma autoadjunta. Estudiar si son o no autovalores i) $\lambda=-3$ y ii) $\lambda=\frac{3}{4}$, dando la autofunción si lo es.

$\left[\frac{y'}{x}\right]'+\frac{\lambda}{x^3}y=0$. $\mu^2-2\mu+\lambda=0$, $\mu=1\pm\sqrt{1-\lambda}$.

i) $\lambda=-3$, $y=c_1x^3+c_2x^{-1}$. $\left.\begin{matrix} 3c_1-c_2=0 \\ 27c_1+c_2/3=0 \end{matrix}\right\}$ No autovalor. [O $\alpha\alpha'=\cdots=0$].

ii) $\lambda=\frac{3}{4}$, $\mu=\frac{3}{2},\frac{1}{2}$. $y=c_1x^{3/2}+c_2x^{1/2}$. $\left.\begin{matrix} \frac{3}{2}c_1+\frac{1}{2}c_2=0 \\ 3\sqrt{3}c_1+\sqrt{3}c_2=0 \end{matrix}\right\}$, $c_2=-3c_1$.

Autovalor con autofunción $\boxed{\left\{x^{3/2}-3x^{1/2}\right\}}$.

23ad. Sea $\begin{cases} \cos x\, y''-2\,\mathrm{sen}\, x\, y'=f(x) \\ y'(-\frac{\pi}{4})=y'(\frac{\pi}{4})-ay(\frac{\pi}{4})=0 \end{cases}$ Encontrar una a y una $f(x)$ para las que existan infinitas soluciones.

Para la homogénea: $y'=v \rightarrow v'=\frac{2\,\mathrm{sen}\, x}{\cos x}v$, $v=\frac{C}{\cos^2 x}$, $y=C\tan x+K \rightarrow$

$\left.\begin{matrix} y'(-\pi/4)=2C=0 \\ y'(\pi/4)-y(\pi/4)=2C-aC-aK=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow a\neq 0 \Rightarrow y\equiv 0$; si $a=0 \Rightarrow C=0$, $\forall K$, $y_h=\{1\}$.

Si $a\neq 0$, el no homogéneo tiene 1 solución. Si $\boxed{a=0}$, **infinitas o ninguna**.

En forma autoadjunta $\left[\cos^2 x\, y'\right]'=f(x)\cos x$. Tendrá entonces infinitas si $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(x)\cos x\, dx=0$. Esto ocurre, por ejemplo, **para cualquier f impar**.

Otro del 2021 para repasar las 3 secciones

ad9. $\boxed{\begin{array}{l} y''+\lambda y=\cos 3x \\ y'(0)=y'(\frac{\pi}{4})+y(\frac{\pi}{4})=0 \end{array}}$ Hallar un término del desarrollo de $\cos 3x$ en y_n del homogéneo. Precisar cuántas soluciones hay del no homogéneo si i) $\lambda=0$, ii) $\lambda=1$.

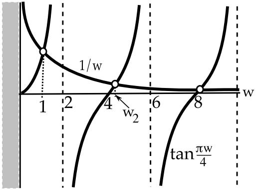
$\begin{array}{l}\alpha\cdot\alpha'=0 \\ \beta\cdot\beta'>0\end{array} \Rightarrow \lambda\geq 0$. $\lambda=0$: $y=c_1+c_2x \rightarrow \left.\begin{array}{l} y'(0)=c_2=0\downarrow \\ y'(\frac{\pi}{4})+y(\frac{\pi}{4})=c_1=0 \end{array}\right\}$ $\lambda=0$ no autovalor.

$\lambda>0$: $y=c_1\cos wx+c_2\operatorname{sen} wx$. $y'(0)=wc_2=0$

$\rightarrow y'(\frac{\pi}{4})+y(\frac{\pi}{4})=c_1\big[\cos\frac{w\pi}{4}-w\operatorname{sen}\frac{w\pi}{4}\big]=0$.

Si el corchete es 0, c_1 queda indeterminado. Infinitos $\lambda_n=w_n^2$ cumplen $\tan\frac{\pi w_n}{4}=\frac{1}{w_n}$. A cada uno está asociada la $y_n=\{\cos w_n x\}$.

Es calculable $\boxed{\lambda_1=1\rightarrow y_1=\{\cos x\}}$ $\big(\tan\frac{\pi}{4}=1\big)$.



Si $\cos 3x=c_1\cos x+\sum_{n=2}^{\infty}c_n\cos w_n x$, el primer coeficiente c_1 es:

$$c_1=\frac{\langle\cos 3x,\cos x\rangle}{\langle\cos x,\cos x\rangle}=\frac{\int_0^{\pi/4}\cos 3x\cos x\,dx}{\int_0^{\pi/4}\cos^2 x\,dx}=\frac{\int_0^{\pi/4}(\cos 4x+\cos 2x)\,dx}{\int_0^{\pi/4}(1+\cos 2x)\,dx}=\boxed{\frac{2}{\pi+2}}.$$

Para i), por no ser $\lambda=0$ autovalor hay solución única del no homogéneo.

Para ii), hay infinitas del homogéneo $y_h=\{\cos x\}$ y el no homogéneo no tiene solución pues: $\int_0^{\pi/4}\cos 3x\cos x\,dx=\frac{1}{4}\neq 0$.