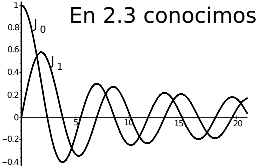
Lo sabemos y vamos a usar de Bessel $x^2y''+xy'+[x^2-p^2]y=0$.



En 2.3 conocimos: $J_0(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m!)^2}\left[\frac{x}{2}\right]^{2m}$, $J_1(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(m+1)!}\left[\frac{x}{2}\right]^{2m+1}$.

Cada J_p tenía infinitos ceros en $(0,\infty)$ y los de J_0 eran: 2.4048, 5.5201, 8.6532, ... También vimos:

$\left[x^pJ_p\right]'=x^pJ_{p-1}$ (en particular, $[xJ_1]'=xJ_0$, $[J_0]'=-J_1$).

Las otras soluciones no estaban acotadas en 0.

Y al final de 2.2 ya supimos que si $p=\frac{1}{2}$ era $y=c_1\frac{\operatorname{sen}x}{\sqrt{x}}+c_2\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$.

En 3.1 apareció $\boxed{\begin{array}{l} xy''+y'+\lambda xy=0 \\ y \text{ acotada en } x=0,\ y(1)=0 \end{array}}$ $\to\ \left[xy'\right]'+\lambda xy=0$. $r(x)=x$.

Con $s=\sqrt{\lambda}\,x=wx$, la EDO pasaba a ser la de Bessel de orden 0:

$$s\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{dy}{ds}+sy=0 \to\ y=c_1J_0(wx)+c_2K_0(wx) \xrightarrow{\text{acotada}} c_1J_0(w)=0\ \to$$

$$\lambda_n=w_n^2,\ w_n \text{ infinitos ceros de } J_0. \text{ Y las autofunciones } y_n=\left\{J_0(w_nx)\right\}.$$

Y además, en el ejemplo 7 de 3.2 se calculó (en los apuntes) $\langle y_n,y_n\rangle$:

$$\int_0^1 xJ_0^2(w_nx)\,dx=\frac{1}{w_n^2}\int_0^{w_n}uJ_0^2(u)\,du=\frac{1}{2w_n^2}\Big[u^2\big(J_0^2(u)+J_1^2(u)\big)\Big]_0^{w_n}=\frac{1}{2}J_1^2(w_n)$$

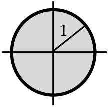
Puesto que $\int uJ_0^2\,du=\frac{u^2}{2}J_0^2+\int uJ_0\,uJ_1\,du=\frac{u^2}{2}J_0^2+\frac{1}{2}\left[uJ_1\right]^2$.

Un problema con Bessel

24. Placa de 1 cm de de radio a 0° cuyo borde en $t=0$ se calienta hasta 1°.

$$\boxed{\begin{array}{l} u_t-\left[u_{rr}+\frac{u_r}{r}\right]=0,\ r<1,\ t>0 \\ u(r,0)=0,\ u(1,t)=1 \end{array}}$$

Primero debemos hacer la condición de contorno cero.



$$\xrightarrow{v=u-1} \begin{cases} v_t-\left[v_{rr}+\frac{1}{r}v_r\right]=0 \\ v(r,0)=-1,\ v(1,t)=0 \end{cases} \xrightarrow{v=RT} \begin{cases} T'+\lambda T=0 \\ rR''+R'+\lambda rR=0 \\ R \text{ acotada, } R(1)=0 \end{cases}$$

Problema singular de 3.1: $\lambda_n=w_n^2$ con $J_0(w_n)=0$, $R_n=\{J_0(w_nr)\}$ y peso r.

$$v(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{-\lambda_n t} J_0(w_nr) \to \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(w_nr)=-1\,.$$

Necesitamos utilizar la teoría general de desarrollos de Fourier:

$$c_n=\frac{\langle -1,y_n\rangle}{\langle y_n,y_n\rangle}=-\frac{2}{J_1^2(w_n)}\int_0^1 rJ_0(w_nr)\,dr\,,$$

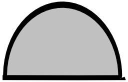
pues en la página anterior se calculó $\langle y_n,y_n\rangle=\int_0^1 rJ_0^2(w_nr)\,dr=\frac{1}{2}J_1^2(w_n)$.

Sólo falta hallar $\int_0^1 rJ_0(w_nr)\,dr=\frac{1}{\lambda_n}\int_0^{w_n} sJ_0(s)\,ds=\frac{1}{\lambda_n}\left[sJ_1(s)\right]_0^{w_n}=\frac{1}{w_n}J_1(w_n)$.

La solución (única como se prueba uniendo las demostraciones para calor y Laplace) es pues:

$$\boxed{u(r,t)=1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-w_n^2t}}{w_nJ_1(w_n)}J_0(w_nr)} \quad \left[\xrightarrow[t\to\infty]{} \boxed{1}\right].$$

nuevo. Resolver $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0\,,\ r<1\,,\ 0<\theta<\pi \\ u(1,\theta)=\text{sen}\,\frac{\theta}{2}\,,\ u(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0 \end{cases}$



Conocemos las EDOs que aparecen al separar variables en Laplace

$$\begin{cases} \Theta''+\lambda\Theta=0 \\ \Theta(0)=\Theta'(\pi)=0 \end{cases} \to \lambda_n=\frac{(2n-1)^2}{4},\ \Theta_n=\left\{\text{sen}\,\frac{2n-1}{2}\theta\right\},\ \ \text{y}\ \ r^2R''+rR'-\lambda_nR=0\,.$$
$$n=1,2,\ldots$$

Las soluciones acotadas en $r=0$ de la de Euler son: $R_n=\left\{r^{n-\frac{1}{2}}\right\}$

Probamos pues $u=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\,r^{n-\frac{1}{2}}\,\text{sen}\,\frac{2n-1}{2}\theta \to \sum_{n=1}^{\infty}c_n\,\text{sen}\,\frac{2n-1}{2}\theta=\text{sen}\,\frac{\theta}{2}$.

Luego obviamente $c_1=1$ y el resto de $c_n=0 \to \boxed{u(r,\theta)=r^{1/2}\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}}$.

23. Resolver $\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}+4u=0\,,\ r<1\,,\ 0<\theta<\pi \\ u(1,\theta)=\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\,,\ u(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0 \end{cases}$

$u=R\Theta$, $\frac{r^2R''}{R}+\frac{rR'}{R}+4r^2=-\frac{\Theta''}{\Theta}=\lambda\,,\ \begin{cases}\Theta''+\lambda\Theta=0\\ \Theta(0)=\Theta'(\pi)=0\end{cases},\ \lambda_n=\frac{(2n-1)^2}{4},\ \Theta_n=\left\{\operatorname{sen}\frac{2n-1}{2}\theta\right\}$, $n=1,2,\dots$

y $r^2R''+rR'+(4r^2-\lambda_n)R=0$, parecida a Bessel.

Para quitar el 4 hacemos el habitual cambio 'matalambdas': $s=\sqrt{4}\,r=2r\to$

$R'=2\frac{dR}{ds}\,,\ R''=4\frac{d^2R}{ds^2}\ \to\ s^2\frac{d^2R}{ds^2}+s\frac{dR}{ds}+(s^2-\lambda_n)R=0$, Bessel con $p=n-\frac{1}{2}$,

de soluciones acotadas en $r=0$: $\{J_{n-\frac{1}{2}}(s)\}=\{J_{n-\frac{1}{2}}(2r)\}=R_n$ (funciones elementales)

Probamos $u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}c_nJ_{n-\frac{1}{2}}(2r)\operatorname{sen}\frac{2n-1}{2}\theta\ \to\ \sum_{n=1}^{\infty}c_nJ_{n-\frac{1}{2}}(2)\operatorname{sen}\frac{2n-1}{2}\theta=\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$

$\to\ c_1=\frac{1}{J_{\frac{1}{2}}(2)}$ y resto 0, $u(r,\theta)=\frac{1}{J_{\frac{1}{2}}(2)}J_{\frac{1}{2}}(2r)\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$,

que podemos escribir como funciones elementales, pues (salvo constante)

$J_{\frac{1}{2}}(2r)=\frac{\operatorname{sen}2r}{\sqrt{2r}}\ \left[\frac{\cos 2r}{\sqrt{2r}}\right.$ no acotada en $\left.r=0\right]$ y $J_{\frac{1}{2}}(2)=\frac{\operatorname{sen}2}{\sqrt{2}}$, $\boxed{u=\frac{\operatorname{sen}2r}{\operatorname{sen}2\,\sqrt{r}}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}$.