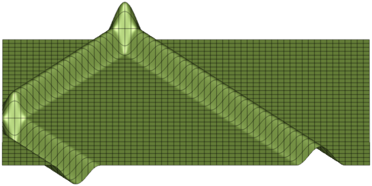
resumen del curso y de los apuntes de métodos matemáticos II (EDPs)



pparanda@ucm.es

https://teorica.fis.ucm.es/pparanda/EDPs.html

Tutorías: L 14-16 , J 11-13 (2.313, 2pl.O). **M 14-16** (meet o cita).

Bibliografía básica

Haberman. ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES con Series de Fourier y Problemas de Contorno. Prentice Hall

Boyce-Di Prima. ECUACIONES DIFERENCIALES y problemas con valores en la frontera. Limusa

Calendario aproximado de Métodos II C (24-25) | hr | 55,5

L	M	X	J	V	S	D	
14		15		12		55,5	
Enero-Febrero							
20	21	22	23	24	25	26	1.12
27	28	29	30	31	1	2	1.23
3	4	5	6	7	8	9	1.45
10	11	12	13	14	15	16	1.5-2.12
17	18	19	20	21	22	23	r1-c1-2.2
24	25	26	27	28	1	2	2-234
Marzo							
3	4	5	6	7	8	9	3.12
10	11	12	13	14	15	16	3.23
17	18	19	20	21	22	23	4.1
24	25	26	27	28	29	30	4.12
Abril							
31	1	2	3	4	5	6	4.23-r2
7	8	9	10	11	12	13	c2-4.3
21	22	23	24	25	26	27	4.3
Mayo							
28	29	30	1	2	3	4	4.4
5	6	7	8	9	10	11	4.4-repaso
	13	14	15				
	20	16:30		23			
				30			

Tema	hr
introducción	**14**
1.1 primer orden	3
1.2 segundo orden	3
1.3 problemas clásicos	1
1.4 cuerda vibrante	4
1.5 transformada de Fourier	3
EDOs por series	**7,5**
2.1 regulares	2
2.2 singulares regulares	3
2.3 Legendre, Bessel	2
2.4 punto del infinito	2
problemas de contorno	**8**
3.1 homogéneos	3
3.2 series de Fourier	3
3.3 no homogéneos	3
separación de variables	**22**
4.1 calor	7
4.2 ondas	5
4.3 Laplace	6
4.4 tres variables	5
repaso	**1**
controles	**3**
entrega problemas grupos	

	L	M	X	J	V
11				Tutorías 11-13	
12				Tutorías 11-13	
13					
14	Tutorías 14-16	Tutorías virtuales pptut25 14-16			
15	Tutorías 14-16	Tutorías virtuales pptut25 14-16	FC	op	MII 15-16
16			FC	op	FC
17	MII 17-18:30	em2	MII 17-18:30	em2	FC
18					

control 1 = 4.3 pts

control 2, 3, 4.12 = 5.3 pts

A = 0.4 + 4.3 + 5.3 = 10 pts

CF = máx(0.35A+0.65E , E)

Otras actividades A:

Por cada **entrega de problemas en grupo**: hasta 0.2 puntos.

[No deben ser iguales a los de otro grupo y se valora más el trabajo que el resultado final].

Valor de los **controles** hechos en un aula en hora de clase:

Control 1 (sobre el tema 1): de 0 a 4.3 puntos.

Control 2 (sobre temas 2, 3, 4_{12}): de 0 a 5.3 puntos.

Valor máximo de otras actividades A: $0.2\times 2+4.3+5.3=10$ puntos.

[La nota de otras actividades se guarda para la convocatoria extraordinaria].

Exámenes E (según afirma la ficha de la asignatura de la guía del grado):

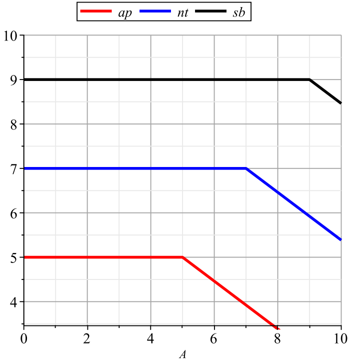
un examen final valorado de 0 **a** 10 **puntos**.

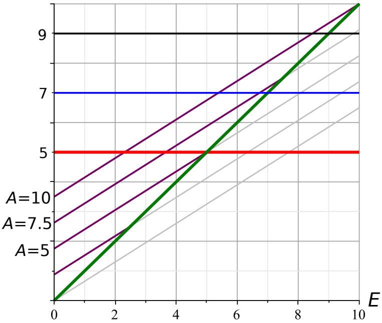
[Los controles y exámenes consisten en la resolución por escrito de problemas similares a los propuestos a lo largo del curso y se hacen con un formulario oficial y sin calculadora ni móvil].

La calificación final C_F viene dada por: $\boxed{C_F=\max\big(0.35\,A+0.65\,E\,,E\,\big)}$.

[La ficha dice que esa es la fórmula si $E\geq 3.5$, yo interpreto que lo que quiere decir es que para aprobar es necesaria esa nota en el final de mayo o junio].

Para ilustrar esta fórmula, un par de dibujos:





El primero muestra la nota necesaria en exámenes E en función de los puntos obtenidos A para tener una calificación final de 5, 7 y 9 (aprobado, notable, sobresaliente). Por ejemplo, se aprueba con $4.9/10$ en E y $5.1/10$ en A, con $4.4/10$ en E y $6/10$ en A, o con $3.9/10$ en E y $7/10$ en A, se saca notable con $6/10$ en E y $8.8/10$ en A, y sobresaliente con $8.4/10$ en E y $10/10$ en A.

El otro compara la nota pura de exámenes E (en verde) con las mixtas $0.35\,A + 0.65\,E$ para varios A $\left[\text{en concreto, } A = 0, 2.5, 5, 7.5, 10\right]$. La línea roja es el 5 necesario para aprobar la asignatura.

Introducción

En este curso estudiaremos principalmente las **ecuaciones en derivadas parciales** (EDPs), aunque también las soluciones por medio de series y los problemas de contorno de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs).

Una EDP es una ecuación en la que aparecen derivadas parciales de una función incógnita de varias variables. Todas las que veremos serán **lineales**. Y sobre todo las **de segundo orden** (con derivadas de orden 2 o menor):

$$\text{[E]} \quad L[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} D_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + Hu = F$$

con u, A_{ij}, D_j, H y F funciones de $(x_1, ..., x_n)$. Principalmente veremos el caso $n=2$. Una **solución** de [E] será una función $u(x_1, \dots, x_n)$ de C^2 en una región D de $\mathbf{R}^n$ que sustituida en la ecuación la convierte en una identidad.

Entre ellas se encuentran las tres clásicas:

ecuación de ondas	$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$
ecuación del calor	$u_t - k \Delta u = 0$
y **ecuación de Laplace**	$\Delta u = 0$,

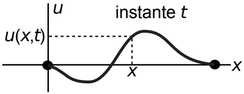
ejemplos respectivos de los tres tipos en que se clasifican: **hiperbólicas**, **parabólicas** y **elípticas**. La teoría avanzada de EDPs es la generalización del estudio de estas tres ecuaciones. Sus propiedades son tan diferentes que no existen teorías generales como la de las EDOs lineales.

En el **capítulo 1** se ven las pocas veces que se puede resolver de una EDP con integraciones (en el 4 se usarán series). Daremos la solución general de algunas de **primer orden** en dos variables (habrá una función arbitraria de las **características**, soluciones de una EDO ligada a la EDP) y de pocas de **segundo** (con dos funciones arbitrarias). Se verá qué condiciones (iniciales o de contorno) se imponen a las EDPs para tener **solución única**. De las clásicas, sólo para **ondas** tendremos así una fórmula (de **D'Alembert**) para su solución. Con la **transformada de Fourier** se resolverán más EDPs en recintos no acotados (como el calor en toda la recta).

El **2** describe cómo resolver EDOs lineales de orden dos usando **series de potencias** (única forma posible en general), en torno a puntos **regulares** y a **singulares regulares**, incluido el 'punto del infinito'. Se aplica el método a tres ecuaciones importantes en física: Legendre, Hermite y Bessel.

El **capítulo 4** trata el método de **separación de variables** para resolver las EDPs clásicas (homogéneas y no homogéneas, en 2 o más variables y en diferentes coordenadas) en recintos acotados, al menos, en una variable. Se supone la solución producto de funciones de cada variable y esto lleva a resolver EDOs para cada una, alguna de ellas con condiciones de contorno. Las soluciones aparecen en términos de **series de Fourier**. La teoría de los **problemas de contorno para EDOs** (diferente de la valores iniciales) y un estudio de esas series se ve previamente en el **capítulo 3**. Al final del 4 se ven brevemente las **funciones de Green** para EDOs y para **Laplace**.

La ecuación de **ondas** unidimensional o de la **cuerda vibrante** describe las oscilaciones transversales de pequeña amplitud de una cuerda. Si $u(x,t)$ es el desplazamiento vertical del punto x en el instante t, la u cumple la EDP:



$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t) \ ,$$

donde $c^2 = T_o/\rho$, T_o fuerza de tensión, ρ densidad y $F(x,t)$ fuerza externa que actúa verticalmete sobre el punto x en el instante t. Para precisar la evolución de una cuerda concreta, se debe dar la posición de la cuerda y la distribución de velocidades verticales en el instante inicial, es decir, $u(x,0)$ y $u_t(x,0)$. También, si permanece fija en los extremos $x=0$ y $x=L$, debe cumplir las condiciones de contorno $u(0,t)=u(L,t)=0$.

La distribución de temperaturas a lo largo del tiempo en una varilla delgada viene regida por la **ecuación del calor** $u_t - ku_{xx} = 0$, donde $u(x,t)$ es la temperatura del punto x en el instante t y $k>0$ mide la conductividad de la varilla. Si hay fuentes de calor en el interior aparece una $F(x,t)$ en el segundo miembro de la EDP. Aquí basta dar sólo la distribución inicial de temperaturas $u(x,0)$ (y las condiciones de contorno) para fijar la solución.

Entre otras situaciones, la ecuación de **Laplace** $u_{xx} + u_{yy} = 0$ describe la distribución estacionaria de temperaturas en una placa bidimensional. Las fuentes de calor dentro de la placa darían una F en el segundo miembro. Frente a las otras EDPs que describían la evolución temporal de un sistema, ésta describe situaciones estacionarias y sus condiciones son de contorno.