Separación de variables para el calor

Tienen **solución única** $\begin{cases} u_t-ku_{xx}=F(x,t),\ x\in(0,L),\ t>0 \\ u(x,0)=f(x),\ \text{c.contorno físicas} \end{cases}$.

$\begin{matrix} u(0,t)=h_0(t) \\ u(L,t)=h_L(t) \end{matrix}$; $\begin{matrix} u_x(0,t)=h_0(t) \\ u_x(L,t)=h_L(t) \end{matrix}$; $\begin{matrix} u(0,t)-au_x(0,t)=h_0(t) \\ u(L,t)+bu_x(L,t)=h_L(t) \end{matrix}$, $a,b>0$ [temperaturas o flujo dados o radiación libre]

$\begin{matrix} u_t-ku_{xx}=0,\ u=XT \ \to \\ X''+\lambda X=0,\ T'+\lambda kT=0 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} u_t-k[u_{xx}+u_{yy}]=0 \xrightarrow{u=XYT} \\ X''+\lambda X=0,\ Y''+\mu Y=0,\ T'+[\lambda+\mu]T=0 \end{matrix}$

Si las condiciones de contorno no son homogénas hay que hacer un cambio de variable.
En particular, $v(x,t)=\big[1-\frac{x}{L}\big]h_0(t)+\frac{x}{L}h_L(t)$ satisface $v(0,t)=h_0(t)$, $v(L,t)=h_L(t)$.
Para problemas no homogéneos se prueban desarrollos en autofunciones del homogéneo.

Separación de variables para ondas

$\begin{matrix} u_{tt}-c^2u_{xx}=0,\ u=XT \ \to \\ X''+\lambda X=0,\ T''+\lambda c^2T=0 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} u_{tt}-c^2\big[u_{rr}+\frac{n}{r}u_r\big]=0,\ u=RT \ \to \\ rR''+nR'+\lambda rR=0,\ T''+\lambda c^2T=0 \end{matrix}$

Separación de variables para Laplace

$\begin{cases} \Delta u=F \text{ en } D \text{ acotado} \\ u=f \text{ en } \partial D \end{cases}$ tiene **solución única**. [Si $F\equiv 0$ máximo y mínimo se dan en ∂D].

Tiene **unicidad salvo constante** $\begin{cases} \Delta u=F \text{ en } D \\ u_{\mathbf{n}}=f \text{ en } \partial D \end{cases}$ si se cumple $\iint_D F\,dxdy=\oint_{\partial D} f\,ds$.

$u_{xx}+u_{yy}=0,\ u=XT \ \to\ X''\pm\lambda X=0,\ Y''\mp\lambda Y=0$.

$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0,\ u=R\Theta \ \to\ \Theta''+\lambda\Theta=0,\ r^2R''+rR'-\lambda R=0$.

En un **círculo**, $\Theta_n=\{\cos n\theta, \operatorname{sen} n\theta\}$, $R_n=\{r^n\}$ (interior), $R_n=\{r^{-n}\}$ (exterior), $n=0,1,\dots$

La solución de $\begin{cases} \Delta u=0,\ r<R \\ u(R,\theta)=f(\theta) \end{cases}$ es $u(r,\theta)=\frac{R^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\phi)\,d\phi}{R^2-2Rr\cos(\theta-\phi)+r^2}$ fórmula integral de Poisson.

En el **espacio**: $u=R\Theta\Phi \ \to\ r^2R''+2rR'-\lambda R=0,\ \Phi''+\mu\Phi=0$,

$u_{rr}+\frac{2u_r}{r}+\frac{u_{\theta\theta}}{r^2}+\frac{\cos\theta\, u_\theta}{\operatorname{sen}\theta\, r^2}+\frac{u_{\phi\phi}}{\operatorname{sen}^2\theta\, r^2}=0$ $\quad (\operatorname{sen}\theta\,\Theta')'+\Big(\lambda\operatorname{sen}\theta-\frac{\mu}{\operatorname{sen}\theta}\Big)\Theta=0 \xrightarrow{s=\cos\theta}$

$\frac{d}{ds}\Big([1-s^2]\frac{d\Theta}{ds}\Big)+\Big(\lambda-\frac{\mu}{1-s^2}\Big)\Theta=0$ (con $\mu=0$ si no depende de ϕ)

$P_n^m(s)=(1-s^2)^{m/2}\frac{d^m}{ds^m}P_n(s)$ satisfacen $(1-s^2)\Theta''-2s\Theta'+\Big[n(n+1)-\frac{m^2}{1-s^2}\Big]\Theta=0$.

En **esfera** con simetría, $\Theta_n=\{P_n(\cos\theta)\}$, $R_n=\{r^n\}$ (interior), $R_n=\{r^{-n-1}\}$ (exterior), $n=0,1,\dots$

Series de Fourier dobles

$f(x,y)\in C^1([a,b]\times[c,d])$. $X_n(x)$, $x\in[a,b]$ e $Y_m(y)$, $y\in[c,d]$ autofunciones de problemas con pesos respectivos $r(x)$ y $s(y)$. Para cada $(x,y)\in(a,b)\times(c,d)$ es:

$$f(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}c_{nm}X_nY_m\ ,\quad c_{nm}=\frac{1}{\langle X_n,X_n\rangle}\frac{1}{\langle Y_m,Y_m\rangle}\int_a^b\!\!\int_c^d f(x,y)X_nY_m\,r\,s\,dydx\,.$$

Algunas propiedades de funciones trigonométricas e hiperbólicas:

$\cos x=\operatorname{sen}\big(x+\frac{\pi}{2}\big)$, $1+\tan^2x=\frac{1}{\cos^2x}$ $\qquad \operatorname{sen}a\,\operatorname{sen}b=\frac{1}{2}\big[\cos(a-b)-\cos(a+b)\big]$

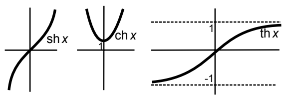
$\operatorname{sen}(a\pm b)=\operatorname{sen}a\cos b\pm\cos a\operatorname{sen}b$ $\qquad \cos a\,\cos b=\frac{1}{2}\big[\cos(a+b)+\cos(a-b)\big]$

$\cos(a\pm b)=\cos a\cos b\mp\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b$ $\qquad \operatorname{sen}a\,\cos b=\frac{1}{2}\big[\operatorname{sen}(a+b)+\operatorname{sen}(a-b)\big]$

$\operatorname{sen}^2a=\frac{1}{2}-\frac{\cos 2a}{2}$, $\cos^2a=\frac{1}{2}+\frac{\cos 2a}{2}$, $\operatorname{sen}^3a=\frac{3\operatorname{sen}a}{4}-\frac{\operatorname{sen}3a}{4}$, $\cos^3a=\frac{3\cos a}{4}+\frac{\cos 3a}{4}$.

$\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\operatorname{th}x=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}$. $\begin{matrix}[\operatorname{sh}x]'=\operatorname{ch}x \\ [\operatorname{ch}x]'=\operatorname{sh}x\end{matrix}$.

$\operatorname{sh}(x\pm y)=\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y\pm\operatorname{ch}x\operatorname{sh}y$
$\operatorname{ch}(x\pm y)=\operatorname{ch}c\operatorname{ch}y\pm\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y$. $[\operatorname{th}x]'=1-\operatorname{th}^2x=\frac{1}{\operatorname{ch}^2x}$.



Algunas EDOs de primer orden $\boxed{\frac{dy}{dx}=f(x,y)}$ resolubles

[Si f, f_y son continuas en un entorno de (x_o,y_o) existe solución única con $y(x_o)=y_o$].

Separables: $y'=\frac{p(x)}{q(y)}$. $y'=f\big(\frac{y}{x}\big)$, se hace $z=\frac{y}{x}$. $y'=f(ax+by)$, se hace $z=ax+by$.

Lineales: $y'=a(x)y+f(x) \ \to\ y=Ce^{\int a(x)dx}+e^{\int a(x)dx}\int e^{-\int a(x)dx}f(x)dx$ [sgh + y_p].

Exactas: $M(x,y)+N(x,y)\,y'=0$ con $M=U_x$, $N=U_y$ [$M_y\equiv N_x$] $\to U(x,y)=C$.

EDOs lineales de segundo orden

[n] $\boxed{y''+a(x)y'+b(x)y=f(x)}$ $\quad |W|(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$.
a, b, f continuas en I.

Si $x_o\in I$, tiene una sola solución (definida en todo I) con $y(x_o)=y_o$, $y'(x_o)=y_o'$.
Si y_1, y_2 son soluciones de la homogénea ($f\equiv 0$) con wronskiano $|W|(s)\neq 0$ para algún $s\in I$, la solución general de la homogénea es: $y=c_1y_1+c_2y_2$.
Si y_p es una solución de [n], la solución general de [n] es: $y=c_1y_1+c_2y_2+y_p$.
Una solución particular de [n] es: $y_p=y_2\int\frac{y_1f}{|W|}dx-y_1\int\frac{y_2f}{|W|}dx$ [**fvc**].
Si $b(x)\equiv 0$, $y'=v$ lleva [n] a lineal de primer orden en v.
y_1 solución de la homogénea $\Rightarrow$ $y_2=y_1\int e^{-\int a\,dx}y_1^{-2}dx$ solución de la homogénea.

Coeficientes constantes: $\boxed{y''+ay'+by=0}$, $\mu^2+a\mu+b=0$

$\mu_1\neq\mu_2$ reales $\to y=c_1e^{\mu_1x}+c_2e^{\mu_2x}$
μ doble (real) $\to y=(c_1+c_2x)e^{\mu x}$
$\mu=p\pm iq \to y=(c_1\cos qx+c_2\operatorname{sen}qx)e^{px}$

Método de coeficientes indeterminados para $y''+ay'+by=f(x)$:

Si $f(x)=e^{\mu x}p_m(x)$, p_m polinomio de grado m, y μ no es autovalor hay solución particular $y_p=e^{\mu x}P_m(x)$. Si μ es autovalor de multiplicidad r, hay $y_p=x^re^{\mu x}P_m(x)$.

Si $f(x)=e^{px}\big[p_j(x)\cos qx+q_k(x)\operatorname{sen}qx\big]$, p_j, q_k de grados j, k, y $p\pm iq$ no es autovalor hay $y_p=e^{px}\big[P_m(x)\cos qx+Q_m(x)\operatorname{sen}qx\big]$ con P_m y Q_m de grado $m=\text{máx}\{j,k\}$.

Si $p\pm iq$ es autovalor hay $y_p=xe^{px}\big[P_m(x)\cos qx+Q_m(x)\operatorname{sen}qx\big]$.

EDPs de primer orden

$\boxed{A(x,y)\,u_y+B(x,y)\,u_x=H(x,y)\,u+F(x,y)}$ $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{A(x,y)}{B(x,y)} \to$ características $\xi(x,y)=K$

$\begin{cases} \xi=\xi(x,y) \\ \eta=y \end{cases} \to A\,u_\eta=H\,u+F$; $\begin{cases} \xi=\xi(x,y) \\ \eta=x \end{cases} \to B\,u_\eta=H\,u+F$.

Hay una única solución local $u(x,y)$ con valores dados sobre una curva $G=\big(g(s),h(s)\big)$ del plano xy si G no es tangente a las características $\Leftrightarrow T(s)\equiv g'A(g,h)-h'B(g,h)\neq 0$.

Clasificación y formas canónicas de EDPs de 2^o orden

$\boxed{Au_{yy}+Bu_{xy}+Cu_{xx}+Du_y+Eu_x+Hu=F}$ $\quad \begin{cases} \xi=px+qy \\ \eta=rx+sy \end{cases} \to \begin{matrix} u_{yy}=q^2u_{\xi\xi}+2qsu_{\xi\eta}+s^2u_{\eta\eta} \\ u_{xy}=pqu_{\xi\xi}+(ps+qr)u_{\xi\eta}+rsu_{\eta\eta} \\ u_{xx}=p^2u_{\xi\xi}+2pru_{\xi\eta}+r^2u_{\eta\eta} \end{matrix}$

Hiperbólicas ($B^2-4AC>0$)
$\begin{cases} \xi=x-\frac{B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}y \\ \eta=x-\frac{B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}y \end{cases}$ $\to \boxed{u_{\xi\eta}+\cdots=F^*}$

Parabólicas ($B^2-4AC=0$)
$\begin{cases} \xi=x-\frac{B}{2A}y \\ \eta=y \end{cases}$ $\to \boxed{u_{\eta\eta}+\cdots=F^*}$

Elípticas ($B^2-4AC<0$)
$\begin{cases} \xi=\frac{2Ax-By}{\sqrt{4AC-B^2}} \\ \eta=y \end{cases}$ $\to \boxed{u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\cdots=F^*}$

[Cambios del tipo $u=e^{py}e^{qx}w$ suprimen derivadas de menor orden].

Formas canónicas resolubles: $\boxed{u_{\eta\eta}+E^*u_\eta+H^*u=F^*}$, $\boxed{u_{\xi\eta}+D^*u_\xi=F^*}$, $\boxed{u_{\xi\eta}+E^*u_\eta=F^*}$.

Ecuación de ondas

La solución única de $\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=F(x,t)\,,\ x,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=f(x)\,,\ u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$ es:

$$\boxed{u(x,t)=\tfrac{1}{2}\big[f(x+ct)+f(x-ct)\big]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)\,ds+\frac{1}{2c}\int_0^t\int_{x-c[t-\tau]}^{x+c[t-\tau]}F(s,\tau)\,ds\,d\tau}$$ fórmula de D'Alembert

Si $F=0$, $\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2c}\int_0^x g$ viaja hacia la derecha y $\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2c}\int_0^x g$ hacia la izquierda.

$$\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=F,\ x\geq 0,\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=f\,,\ u_t(x,0)=g \\ u(0,t)=0 \end{cases},\ \begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=F,\ x\in[0,L],\ t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=f\,,\ u_t(x,0)=g \\ u(0,t)=u(L,t)=0 \end{cases} \to \begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=F^*(x,t)\,,\ x,t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=f^*(x),\ u_t(x,0)=g^*(x) \end{cases}$$

f^*, g^*, F^* extensiones impares de $f(x)$, $g(x)$, $F(x,t)$ respecto a $x=0$ ó a $x=0$ y $x=L$.

Si las condiciones de contorno no son homogénas se hace $w=u-v$ con v que las cumpla.

$$\begin{cases} u_{tt}-c^2\big[u_{rr}+\frac{2}{r}u_r\big]=0\,,\ r\geq 0,\ t\in\mathbf{R} \\ u(r,0)=f(r)\,,\ u_t(r,0)=g(r) \end{cases} \xrightarrow{v=ur} \begin{cases} v_{tt}-c^2v_{rr}=0\,,\ r\geq 0,\ t\in\mathbf{R} \\ v(r,0)=rf(r),\ v_t(r,0)=rg(r),\ v(0,t)=0 \end{cases}$$

Transformada de Fourier

La transformada de $f(x)$ absolutamente integrable es $\hat{f}(k)\equiv\mathcal{F}(f)(k)\equiv\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,e^{ikx}\,dx$.

Si $f\in C^1(\mathbf{R})$ y absolutamente integrable, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(k)\,e^{-ikx}\,dk\quad\forall x\in\mathbf{R}$.

Si $f,f',f''\in C(\mathbf{R})$ y absolutamente integrables: $\mathcal{F}(f')=-ik\mathcal{F}(f)$, $\mathcal{F}(f'')=-k^2\mathcal{F}(f)$.

$\mathcal{F}^{-1}\big[\hat{f}(k)\,e^{iak}\big]=f(x-a)$. $\quad\mathcal{F}\big(e^{-ax^2}\big)=\frac{1}{\sqrt{2a}}\,e^{-k^2/4a}$.

Si $h(x)=\begin{cases}1,\ x\in[a,b]\\ 0 \text{ en el resto}\end{cases}$, $\mathcal{F}(h)=\frac{e^{ikb}-e^{ika}}{\sqrt{2\pi}\,ik}$. $\quad\mathcal{F}^{-1}\big(e^{-ak^2}\big)=\frac{1}{\sqrt{2a}}\,e^{-x^2/4a}$. $\quad\int_{-\infty}^{\infty}e^{-as^2}ds=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}$.

Si $(f*g)(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-s)\,g(s)\,ds$, es $f*g=g*f$, y es $\mathcal{F}(f*g)=\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$.

La solución única de $\begin{cases} u_t-u_{xx}=0\,,\ x\in\mathbf{R},\ t>0 \\ u(x,0)=f(x)\,,\ u \text{ acotada} \end{cases}$ es: $\boxed{u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}f(s)\,e^{-(x-s)^2/4t}\,ds}$.

Soluciones de EDOs por medio de series

$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, $\operatorname{sen}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!}$, $\operatorname{sh}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\operatorname{ch}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ $\forall x$.

$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{n+1}}{n+1}$, $\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{2n+1}$, $[1+x]^p=1+px+\frac{p(p-1)}{2!}x^2+\cdots$, $|x|<1$.

Puntos regulares:
[e] $y''+a(x)y'+b(x)y=0$
a, b analíticas en $(-R,R)$

La solución de [e] es $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_kx^k=c_0y_1+c_1y_2$, c_0, c_1 arbitrarios e y_1, y_2 soluciones que convergen, al menos, en $(-R,R)$.

Euler: $\boxed{x^2y''+axy'+by=0}$
$\mu(\mu-1)+a\mu+b=0$

$\mu_1\neq\mu_2$ reales $\to y=c_1x^{\mu_1}+c_2x^{\mu_2}$
μ doble (real) $\to y=[c_1+c_2\ln x]\,x^{\mu}$
$\mu=p\pm qi\to y=\big[c_1\cos(q\ln x)+c_2\operatorname{sen}(q\ln x)\big]x^p$

Una y_p de $x^2y''+axy'+by=h(x)$ se obtiene de la [**fvc**] (con $f(x)=h(x)/x^2$), o utilizando que con $x=e^s$ se convierte en $y''(s)+(a-1)y'(s)+by(s)=h(e^s)$.

Puntos singulares regulares:
[e*] $x^2y''+xa^*(x)y'+b^*(x)y=0$
a^*, b^* analíticas en $(-R,R)$
$q(r)=r(r-1)+a_0^*r+b_0^*$
$r_1\geq r_2$ raíces reales de $q(r)$

Hay solución y_1 de [e*] de la forma $y_1=x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}c_kx^k$, $c_0\neq 0$.
La y_2 linealmente independiente es:
a] Si $r_1-r_2\neq 0,1,2,\dots$: $y_2=x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty}b_kx^k$, $b_0\neq 0$.
b] Si $r_1=r_2$: $y_2=x^{r_1+1}\sum_{n=0}^{\infty}b_kx^k+y_1\ln x$.
c] Si $r_1-r_2=1,2,\dots$: $y_2=x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty}b_kx^k+dy_1\ln x$, $b_0\neq 0$, $d\in\mathbf{R}$.

Punto del infinito: $s=\frac{1}{x}\to\frac{dy}{dx}=-s^2\frac{dy}{ds}$; $\frac{d^2y}{dx^2}=s^4\frac{d^2y}{ds^2}+2s^3\frac{dy}{ds}$.

Problemas de contorno para EDOs

$(\mathrm{P_s})\begin{cases} [py']'-qy+\lambda ry=0 \\ \alpha y(a)-\alpha'y'(a)=\beta y(b)+\beta'y'(b)=0 \end{cases}$, $p\in C^1$, $q,r\in C$, $p,r>0$ en $[a,b]$; $|\alpha|+|\alpha'|$, $|\beta|+|\beta'|\neq 0$. problema **separado**

$\lambda_n\to\infty$. Las $\{y_n\}$ son espacio vectorial de dimensión 1 e y_n tiene $n-1$ ceros en (a,b).
$\langle y_n,y_m\rangle\equiv\int_a^b r\,y_n\,y_m\,dx=0$, si $n\neq m$. Si $\alpha\cdot\alpha'\geq 0$, $\beta\cdot\beta'\geq 0$, $q(x)\geq 0$ en $[a,b]$ $\Rightarrow\lambda_n\geq 0$.

Si f es C^1 a trozos en $[a,b]$ la serie de Fourier $\sum_{n=1}^{\infty}c_ny_n(x)$, $c_n=\frac{\langle f,y_n\rangle}{\langle y_n,y_n\rangle}$, converge a $f(x)$ en los $x\in(a,b)$ en que f es continua y en los que es discontinua hacia $\frac{1}{2}\big[f(x^-)+f(x^+)\big]$.

$\boxed{y''+\lambda y=0}$. Problemas conocidos (**senos**, **cosenos**, **senos impares**, **cosenos impares**):

c.contorno	$y(0)=y(L)=0$	$y'(0)=y'(L)=0$	$y(0)=y'(L)=0$	$y'(0)=y(L)=0$
λ_n	$\frac{n^2\pi^2}{L^2}$, $n=1,2,\dots$	$\frac{n^2\pi^2}{L^2}$, $n=0,1,\dots$	$\frac{[2n-1]^2\pi^2}{2^2L^2}$, $n=1,2,\dots$	$\frac{[2n-1]^2\pi^2}{2^2L^2}$, $n=1,2,\dots$
y_n, $\langle y_n,y_n\rangle$	$\{\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\}$, $\frac{L}{2}$	$\{\cos\frac{n\pi x}{L}\}$, $\underset{(n=0)}{L}$ ó $\frac{L}{2}$	$\{\operatorname{sen}\frac{[2n-1]\pi x}{2L}\}$, $\frac{L}{2}$	$\{\cos\frac{[2n-1]\pi x}{2L}\}$, $\frac{L}{2}$

En estos cuatro casos es, pues, $c_n=\frac{2}{L}\int_0^L fy_n\,dx$ (poniendo $\frac{c_0}{2}$ en la serie de cosenos).

La serie en $\begin{matrix}\text{senos}\\ \text{cosenos}\end{matrix}$ converge hacia la extensión $\begin{matrix}\text{impar}\\ \text{par}\end{matrix}$ y $2L$-periódica de la f.

Condiciones **periódicas** $y(-L)=y(L)$, $y'(-L)=y'(L)\to y_n=\big\{\cos\frac{n\pi x}{L},\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\big\}$, $n=0,1,\dots$.

La serie en senos y cosenos en $[-L,L]$: $f(x)=\frac{a_o}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\big[a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\big]$, con
$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$, $n=0,1,2,\dots$, $b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx$, $n=1,2,\dots$,
converge hacia $f(x)$ en los x en que su extensión $2L$-periódica es continua (y hacia $\frac{1}{2}\big[f(x^-)+f(x^+)\big]$ en los que es discontinua). Además converge uniformemente en todo intervalo cerrado que no contenga discontinuidades de la f extendida.

$(\mathrm{P_f})\begin{cases} \big[p(x)y'\big]'+g(x)y=f(x) \\ \alpha y(a)-\alpha'y'(a)=\beta y(b)+\beta'y'(b)=0 \end{cases}$ tiene 1 solución si y sólo si el homogéneo $(\mathrm{P_h})$ tiene sólo la solución $y\equiv 0$.

Si $(\mathrm{P_h})$ tiene soluciones no triviales $\{y_h\}$, $(\mathrm{P_f})$ tiene $\begin{matrix}\text{infinitas}\\ \text{ninguna}\end{matrix}$ según $\int_a^b f\,y_h\,dx \begin{matrix}=0\\ \neq 0\end{matrix}$.

Para escribir $y''+a(x)y'+b(x)y=f(x)$ en forma autoadjunta, se multiplica por $e^{\int a}$.

Legendre: $\boxed{(1-x^2)y''-2xy'+py=0}$ tiene soluciones polinómicas si $p=n(n+1)$, $n\in\mathbf{N}$:

$P_0=1$, $P_1=x$, $P_2=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$, $P_3=\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x$, ... $\int_{-1}^{1}P_nP_m\,dx=0$, $m\neq n$, $\int_{-1}^{1}P_n^2\,dx=\frac{2}{2n+1}$.

Bessel: $\boxed{x^2y''+xy'+[x^2-p^2]y=0}\to J_p(x)\equiv\big[\frac{x}{2}\big]^p\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\,[x/2]^{2m}}{m!\,\Gamma(p+m+1)}$, $\Gamma(s)=\int_0^{\infty}e^{-x}x^{s-1}dx$

J_p acotadas en $x=0$, con infinitos ceros [los de J_0: 2.40.., 5.52.., ...]. Las K_p no acotadas.

Si $p=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\dots$, las soluciones son funciones elementales $\big[p=\frac{1}{2}\to y=c_1\frac{\operatorname{sen}x}{\sqrt{x}}+c_2\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\big]$.

Recurrencia: $J_{p+1}=\frac{2p}{x}J_p-J_{p-1}$. Derivadas: $\big[x^pJ_p(x)\big]'=x^pJ_{p-1}(x)$, $J_0'(x)=-J_1$.

Problemas **singulares** conocidos:

$\begin{cases} xy''+2y'+\lambda xy=0 \\ y \text{ acotada en } x=0,\ y(1)=0 \end{cases}$
$u=xy\to u''+\lambda u=0$,
$\lambda_n=n^2\pi^2$, $\big\{\frac{\operatorname{sen}n\pi x}{x}\big\}$.

$\begin{cases} xy''+y'+\lambda xy=0 \\ y \text{ acotada en } x=0,\ y(1)=0 \end{cases}$
$s=wx\to\big\{J_0(w_nx)\big\}$,
con $J_0(w_n)=0$.

$\begin{cases} \big[(1-x^2)y'\big]'+\lambda y=0 \\ y \text{ acotada en } x=\pm 1 \end{cases}$
$\lambda_n=n(n+1)$,
$\big\{P_n(x)\big\}$ Legendre