2. Soluciones de EDOs en forma de serie

En el estudio de las EDOs lineales se comprueba que hay escasas formas de resolver elementalmente la ecuación con coeficientes variables

$$[\mathrm{e}] \quad \boxed{y''+a(x)y'+b(x)y=0}$$

Este capítulo trata una forma general de atacarla: **suponer la solución desarrollada en serie de potencias e introducir esta serie en la ecuación para determinar sus coeficientes**.

En la sección 2.1 recordaremos la definición de función **analítica** (aquella que se puede escribir como una serie de potencias convergente) y las manipulaciones matemáticas que se pueden hacer con ellas. **Si** a **y** b **son analíticas en** $x=x_o$ (punto **regular**) siempre se podrán encontrar dos soluciones linealmente independientes de [e] en forma de serie de potencias por el siguiente camino: llevando la serie a la ecuación se podrá expresar sus coeficientes c_k en función de los dos primeros c_0 y c_1, que serán las dos constantes arbitrarias que deben aparecer en la solución de cualquier EDO de orden dos (algunas veces podremos dar la expresión general del c_k, pero otras nos limitaremos a ir calculando coeficiente a coeficiente). Un teorema, que aceptaremos sin demostración, asegurará que las series solución convergen al menos en el intervalo en que las series de a y b lo hacían. Imponer datos iniciales en x_o será inmediato, pues tendremos que $y(x_o)=c_0$ y $y'(x_o)=c_1$.

Empezaremos la 2.2 resolviendo elementalmente (con el cambio $x=e^s$ se convierte en una de coeficientes constantes) la ecuación de Euler:

$$[\mathrm{u}] \quad \boxed{x^2y''+axy'+by=h(x)\,,\ a,b\in\mathbf{R}}$$

Pasaremos luego a resolver utilizando series la ecuación homogénea más general:

$$[\mathrm{e}^*] \quad \boxed{x^2y''+x\,a^*(x)\,y'+b^*(x)\,y=0}$$

Si a^* y b^* son analíticas en $x=0$ diremos que este punto es **singular regular** (otros puntos x_o se llevan al origen haciendo $s=x-x_o$). La forma de resolver [e*] es sólo algo más complicada (es el **método de Frobenius**). Calcularemos primero una solución y_1 que será siempre de la forma $x^r\sum$ (siendo r la mayor de las raíces del llamado **polinomio indicial**) y a continuación otra y_2, linealmente independiente de la anterior, que unas veces (según sea la diferencia entre las raíces) será del mismo tipo y otras contendrá además un término incluyendo el $\ln x$, que ya aparecía en las de Euler. Un teorema no probado garantizará la convergencia de las series que vayamos hallando.

El cálculo de los coeficientes de las series es sencillo (aunque algo pesado). El problema básico es la dificultad de obtener información sobre las soluciones que se encuentran (muchas veces ni tendremos su término general). Pero ecuaciones del tipo [e] o [e*] aparecen resolviendo EDPs y las series son el único instrumento para abordarlas. Por eso hay libros enteros (los de funciones especiales de la física) dedicados a estudiar las propiedades de las series solución de algunas de estas ecuaciones (las de Legendre, Hermite, Bessel, Laguerre, Tchebycheff, ...). Una pequeña muestra de tales estudios son las propiedades de las soluciones de las ecuaciones de **Legendre, Hermite** y **Bessel** citadas en la sección 2.3.

Las series solución en torno a cualquier punto (salvo que se puedan identificar con una función elemental) no dan ninguna información sobre el comportamiento cuando $x\to\infty$ de las soluciones. En la sección 2.4, para estudiar la ecuación para grandes valores de x, introduciremos el llamado **punto del infinito**, punto $s=0$ de la ecuación que se obtiene haciendo $x=1/s$ en la inicial.

2.1 Funciones analíticas y puntos regulares

Recordemos que una función real $f(x)$ es **analítica** en $x=x_o$ si viene dada por una **serie de potencias** cerca de x_o:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_o)^k = c_0+c_1(x-x_o)+c_2(x-x_o)^2+\cdots$$

A partir de ahora, $x=0$ (si no, con $x-x_o=s$ estaríamos en ese caso): $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$.

A cada serie de potencias está asociado un **radio de convergencia** R tal que:

Si $R=0$, la serie sólo converge en $x=0$. Si $R=\infty$, converge para todo x.

Si $0<R<\infty$, converge si $|x|<R$ y diverge si $|x|>R$ (en $x=\pm R$ no sabemos).

Además, si $0<x_o<R$, la serie converge uniformemente en $[-x_o,x_o]$.

El R se puede calcular en muchas ocasiones aplicando el **criterio del cociente**:

Sea $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ y $p=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$. Entonces si $p<1$ la $\sum$ converge, y si $p>1$ diverge.

Propiedad básica de las series de potencias es que, para $|x|<R$ (si $R>0$), **se pueden derivar e integrar término a término** (infinitas veces):

$$f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^{k-1}=c_1+2c_2x+\cdots\,,\qquad \left(\Rightarrow f^{(k)}(0)=k!c_k\right)$$
$$f''(x)=\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2}=2c_2+6c_3x+\cdots\,,\ \ \ldots$$
$$\int\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = C+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{k+1}x^{k+1} = C+c_0x+\tfrac{c_1}{2}x^2+\cdots \text{ si } |x|<R\,.$$

También pueden sumarse, multiplicarse,... estas series como si fuesen polinomios:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ si } |x|<R_f \text{ y } g(x)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \text{ si } |x|<R_g \Rightarrow \text{ Si } |x|<\text{mín}\{R_f,R_g\}\,,$$
$$f(x)+g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}[a_k+b_k]x^k\,,\ \ f(x)g(x)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\cdots$$

[También f/g es analítica si $g(0)\neq 0$, o si anulándose tiene el cociente límite en $x=0$ (así lo son $\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}$, $\frac{\operatorname{sen}x}{x}$, ...); en el primer ejemplo ya haremos desarrollos de cocientes].

Caso particular importante de las series de potencias son las de **Taylor**:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \text{, para una } f \text{ con infinitas derivadas en } 0\,.$$

La siguientes funciones elementales coinciden con su serie de Taylor (y por tanto son analíticas) en todo el intervalo de convergencia de la serie. Por ejemplo $\forall x\in\mathbf{R}$ son:

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\,,\ \ \operatorname{sen}x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,,\ \ \cos x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\,,\ \ \operatorname{sh}x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,,\ \ \operatorname{ch}x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x^{2k}}{(2k)!}\,.$$

Y para $|x|<R=1$: $\quad \frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k\,,\ \ [1+x]^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots\,,$

$$\ln(1+x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}\,,\ \ \arctan x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}\,.$$

[$\ln x$ y x^{α} ($\alpha\notin\mathbf{N}$) no son analíticas en $x=0$ (discontinuas o no C^{∞}), aunque sí en cualquier otro punto x_o, como también lo son, por ejemplo, e^x o $\arctan x$].

Aunque f sea C^{∞}**(R)** y su serie de Taylor converja $\forall x$ puede que ambas no coincidan, como le ocurre a $f(x)=e^{-1/x^2}$, $f(0)=0$ (que cumple $f^{(k)}(0)=0\ \forall k$, con lo que su serie de Taylor es $\sum 0\cdot x^k=0$ y, por tanto, f no es analítica). Para que una f lo sea, debe al menos tener infinitas derivadas en el punto, pero esto no es suficiente.

[Entender los comportamientos extraños de las series de potencias reales exige pensar en el mundo complejo: $f(z)=e^{-1/z^2}$ en el eje imaginario es la discontinua $f(iy)=e^{1/y^2}$].

Ej 1. Hallemos de varias formas (algunas nada naturales) el desarrollo de $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$.

$$f(x)=-\frac{d}{dx}\frac{1}{1+x} \to \frac{1}{(1+x)^2}=-\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}(-x)^k=-\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k k\,x^{k-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)\,x^k \text{ si } |x|<1 .$$

Otra forma:

$$(1+x)^{-2}=1-2x+\frac{-2(-2-1)}{2!}x^2+\frac{-2(-2-1)(-2-2)}{3!}x^3+\cdots=1-2x+3x^2-4x^3+\cdots,\ |x|<1 .$$

Multiplicando: $f(x)=[1-x+x^2-\cdots][1-x+x^2-\cdots]$

$$=[\,1+(-1-1)x+(1+1+1)x^2+\cdots]=1-2x+3x^2-\cdots \text{ si } |x|<1 .$$

También podemos 'dividir': buscar una serie $\sum c_k x^k$ tal que

$$[c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\cdots][x^2+2x+1]=1 \Rightarrow$$

$$c_0=1\ ;\quad 2c_0+c_1=0 \to c_1=-2c_0=-2\ ;\quad c_0+2c_1+c_2=0 \to c_2=-c_0-2c_1=3\ ;\ \ldots$$

[**El radio** R **del desarrollo de un cociente** P/Q**, con** P **y** Q **polinomios, simplificados los factores comunes, y siendo** $Q(0)\neq 0$**, es la distancia al origen de la raíz (real o compleja) de** Q **más próxima**].

Y con un caso sencillo de 'composición' de series:

$$\frac{1}{1+(2x+x^2)}=1-(2x+x^2)+(2x+x^2)^2-(2x+x^2)^3+\cdots=1-2x+(-1+4)x^2+\cdots$$

Pasemos ya a resolver ecuaciones diferenciales ordinarias por medio de series. En esta sección no dedicaremos a los **puntos regulares**. Sea la ecuación:

$$\text{[e]}\quad \boxed{y''+a(x)\,y'+b(x)\,y=0}\ .$$

Se dice que $x=x_o$ **es un punto regular de** [e] **si** a **y** b **son analíticas en** $x=x_o$. En caso contrario se dice que $x=x_o$ es **punto singular** de [e].

Supongamos que $x=0$ es regular. Se podrán, pues, escribir a y b como series de potencias para $|x|<R$ (mínimo de los radios de a y b). Y es esperable que las soluciones de [e] también se puedan escribir como una serie de potencias para $|x|<R$. Empecemos con un ejemplo:

Ej 2. $\boxed{(1+x^2)y''+2xy'-2y=0}$, es decir, $y''+\frac{2x}{1+x^2}y'-\frac{2}{1+x^2}y=0$,

$a(x)$ y $b(x)$ son analíticas en $x=0$ (regular) con $R=1$ ($x=\pm i$ ceros del denominador).

Sustituyamos una solución en forma de serie arbitraria y sus derivadas en la ecuación inicial (mejor que en la otra, pues deberíamos desarrollar a y b) y hallemos sus coeficientes:

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k\ ,\quad y'=\sum_{k=1}^{\infty}kc_kx^{k-1}\ ,\quad y''=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^{k-2} \to$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}[k(k-1)c_kx^{k-2}+k(k-1)c_kx^k]+\sum_{k=1}^{\infty}2kc_kx^k-\sum_{k=0}^{\infty}2c_kx^k=0$$

[Se podría poner $k=0$ en las tres series, pues se anularía el primer término en la de $k=1$ y los dos primeros en la de $k=2$, pero así es clara la potencia con la que empieza cada una].

La solución de esta lineal de segundo orden deberá tener dos constantes arbitrarias. Vamos a **intentar escribir los** c_k **en función de los dos primeros** c_0 y c_1. Como han de ser 0 los coeficientes de cada potencia de x, deducimos:

$$x^0:\quad 2\cdot1\cdot c_2-2\cdot c_0=0 \to c_2=c_0$$

$$x^1:\quad 3\cdot2\cdot c_3+[2-2]c_1=0 \to c_3=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x^k:\quad (k+2)(k+1)c_{k+2}+[k(k-1)+2k-2]c_k=0$$

[Hemos escrito aparte los primeros términos porque cada serie empieza a aportar términos para distintos k; como potencia general hemos tomado x^k porque era la más repetida, pero también podríamos haber escogido x^{k-2}].

De la última igualdad deducimos la **regla de recurrencia** que expresa un coeficiente en función de los anteriores ya conocidos (en este ejemplo, queda c_{k+2} en función sólo de c_k, pero en otros pueden aparecer varios); para facilitar los cálculos, **factorizamos los polinomios que aparecen** calculando sus raíces:

$$c_{k+2}=-\frac{(k+2)(k-1)}{(k+2)(k+1)}c_k=-\frac{k-1}{k+1}c_k\ ,\quad k=0,1,\ldots$$

Si preferimos tener el c_k en términos de los anteriores, basta cambiar k por $k-2$:

$$c_k = -\frac{k-3}{k-1}\,c_{k-2}\ ,\quad k=2,3,\ldots$$

A partir de la regla de recurrencia escribimos algunos c_k más (siempre en función de c_0 o c_1) con el objetivo de encontrar la expresión del **término general** de la serie (en muchos ejemplos esto no será posible, pero aquí sí):

$$c_4 = -\tfrac{1}{3}c_2 = -\tfrac{1}{3}c_0\ ,\quad c_6 = -\tfrac{3}{5}c_4 = \tfrac{1}{5}c_0\ ,\quad c_8 = -\tfrac{5}{7}c_6 = -\tfrac{1}{7}c_0\ ,\ \ldots$$

$c_5=0$ por estar en función de c_3 que se anulaba. Análogamente $c_7=c_9=\cdots=0$.

Por si no está todavía clara la expresión de los c_{2k}, usamos la recurrencia 'desde arriba':

$$c_k = -\tfrac{k-3}{k-1}c_{k-2} = \tfrac{k-3}{k-1}\tfrac{k-5}{k-3}c_{k-4} = \tfrac{k-5}{k-1}c_{k-4} = -\tfrac{k-7}{k-1}c_{k-6} = \cdots$$

El numerador de c_{2k} es 1, el denominador es $2k-1$ y el signo va alternando, así que:

$$c_{2k} = (-1)^{k+1}\frac{1}{2k-1}c_0\ ,\quad k=2,3,\ldots$$

Agrupamos los términos que acompañan a c_0 y c_1 (que quedan indeterminados) y obtenemos por fin:

$$y = c_0\big[1+x^2-\tfrac{1}{3}x^4+\tfrac{1}{5}x^6+\cdots\big]+c_1x = c_0\Big[1+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^{2k}}{2k-1}\Big]+c_1x = c_0y_1+c_1y_2$$

Expresión con la estructura clásica de las soluciones de las lineales de segundo orden. Pero para que lo sea de verdad, las series deben converger en un entorno de $x=0$, y además y_1 y y_2 han de ser linealmente independientes. Esto es lo que sucede. La serie de y_1 (lo prueba el criterio del cociente) converge si $|x|<1$ y la 'serie' de y_2 (truncada a partir de su segundo término) converge $\forall x$. Y además el wronskiano de ambas soluciones en $x=0$ es 1 (pues $y_1(0)=1$, $y_1'(0)=0$, $y_2(0)=0$, $y_2'(0)=1$).

Si, en vez de la solución general, buscamos la que cumple los **datos iniciales** $y(0)=y_o$, $y'(0)=y_o'$ (que existirá y será única por ser a y b analíticas en $x=0$), dada la forma de las series de y_1 e y_2, es inmediato que debe tomarse $c_0=y_o$, $c_1=y_o'$.

La ecuación se podía haber resuelto sin series. Bastaba advertir que $y_2=x$ era una solución y hallar la y_1 mediante la fórmula citada en el apéndice:

$$y_1 = y_2\int y_2^{-2}\,e^{-\int a}\,dx = x\int x^{-2}\,e^{-\int\frac{2x}{1+x^2}}\,dx = x\int\frac{dx}{x^2(1+x^2)} = -1-x\arctan x\,.$$

[Su desarrollo, salvo el signo, coincide con el obtenido anteriormente para y_1].

Gran parte de lo visto en este ejemplo ocurre en general, como asegura el siguiente teorema que no demostraremos.

Teor

Si $x=0$ regular y R es el menor de los radios de convergencia de las series de a y b, la solución general de [e] $y''+a(x)y'+b(x)y=0$ es

$$y = c_0y_1+c_1y_2 = c_0\big[1+\textstyle\sum\big]+c_1\big[x+\textstyle\sum\big]\,,$$

con c_0, c_1 arbitrarios, y las series, que contienen potencias x^k con $k\geq 2$, convergen, al menos, si $|x|<R$. Los coeficientes las series se determinan de forma única probando una serie de potencias arbitraria en la ecuación (con las funciones $a(x)$ y $b(x)$ desarrolladas) y expresando sus coeficientes c_k, para $k\geq 2$, en función de c_0 y c_1. La solución única de [e] con $y(0)=y_o$, $y'(0)=y_o'$ se obtiene simplemente tomando $c_0=y_o$, $c_1=y_o'$.

[El desarrollo de a y b, desde luego, será innecesario si esas funciones son polinomios, y esto sucede en la mayoría de las ecuaciones que se resuelven por series en la física].

Para dar las soluciones de [e] cerca de otro x_o regular, el **cambio de variable** $s=x-x_o$ (que no afecta a las derivadas por ser $ds/dx=1$) lleva a una ecuación en la variable s para la que $s=0$ es regular. Probaríamos entonces para hallar su solución la serie:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty}c_ks^k\quad\Big[\text{es decir,}\quad y = \sum_{k=0}^{\infty}c_k(x-x_o)^k\ \Big].$$

Ej 3. $\boxed{y'' + (x-2)y = 0 \;,\; y(0)=2 \,,\; y'(0)=1}$ $x=0$ es regular puesto que $a(x)=0$ y $b(x)=x-2$ son analíticas en todo $\mathbf{R}$.

El ejemplo 2 era demasiado sencillo. En general, y como en este, las cosas se complican. Llevamos de nuevo una serie arbitraria y sus derivadas a la ecuación e igualamos a 0 los coeficientes de cada x^k:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \;\to\; \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} \big[c_k x^{k+1} - 2c_k x^k \big] = 0 \;\to$$

$$x^0:\; 2\cdot 1\cdot c_2 - 2\cdot c_0 = 0 \to c_2 = c_0 \;;\quad x^1:\; 3\cdot 2\cdot c_3 + c_0 - 2\cdot c_1 = 0 \to c_3 = -c_0 + c_1 \;;\; \ldots$$

$$x^{k-2}:\; k(k-1)c_k + c_{k-3} - 2c_{k-2} = 0 \;\to\; c_k = -\tfrac{1}{k(k-1)}c_{k-3} + \tfrac{2}{k(k-1)}c_{k-2} \;,\; k=3,4,\ldots$$

(regla de recurrencia de 3 términos que suele traer muchos más problemas que las de 2). Escribimos un par de términos más en función de c_0 y c_1:

$$c_4 = -\tfrac{1}{12}c_1 + \tfrac{2}{12}c_2 = \tfrac{1}{6}c_0 - \tfrac{1}{12}c_1 \;,\quad c_5 = -\tfrac{1}{20}c_2 + \tfrac{2}{20}c_3 = -\tfrac{1}{15}c_0 + \tfrac{1}{30}c_1 \;.$$

No hay forma de encontrar la expresión del término general, aunque paso a paso podemos ir calculando el número de términos que queramos.

La solución general es entonces:

$$y = c_0\big[1 + x^2 - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{6}x^4 - \tfrac{1}{15}x^5 + \cdots \big] + c_1\big[x + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{12}x^4 + \tfrac{1}{30}x^5 + \cdots \big].$$

Y la particular pedida: $y = 2 + x + 2x^2 + \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{10}x^5 + \cdots$ (converge $\forall x$ según el teorema).

Para calcular unos pocos términos (pero no para hallar muchos o buscar la expresión del término general) de una serie solución cerca de un punto regular (en los singulares regulares no se podrá hacer) se puede seguir el siguiente camino:

Haciendo $x=0$ en la ecuación: $y''(0) + (0-2)y(0) = 0 \to y''(0) = 4$

Derivando la ecuación y volviendo a hacer $x=0$:

$$y''' + (x-2)y' + y = 0 \to y'''(0) = 2y'(0) - y(0) = 0$$

Derivando otra vez: $y'''' + (x-2)y'' + 2y' = 0 \to y''''(0) = 2y''(0) - 2y'(0) = 6 \;,\ldots\ldots$

Y de estas derivadas deducimos la expresión de la serie solución:

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \tfrac{y''(0)}{2}x^2 + \tfrac{y'''(0)}{6}x^3 + \cdots = 2 + x + \tfrac{4}{2}x^2 + \tfrac{0}{6}x^3 + \tfrac{6}{24}x^4 + \cdots$$

Si los datos iniciales fueran $\boxed{y(2) = 6 \,,\, y'(2) = 0}$, la solución general de antes, dada por series en $x=0$, no sirve para imponer los datos. Se debe resolver en torno a este punto:

$s = x-2 \to \boxed{y'' + sy = 0}$ (esta derivada es respecto a s, pero la seguimos llamando igual).

$$s=0 \text{ regular} \to y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k \to \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k s^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^{k+1} = 0 \to$$

$$\to\; s^0:\;\; 2c_2 = 0 \;;\quad s^1:\; 6c_3 + c_0 = 0 \,,\; c_3 = -c_0 \;;\quad \ldots\;;$$

$$s^{k-2}:\; k(k-1)c_k + c_{k-3} = 0 \;\to\; c_k = -\tfrac{1}{k(k-1)}c_{k-3} \;;\; k=3,4,\ldots \;\to$$

$$c_5 = c_8 = \cdots = 0 \;;\; c_4 = -\tfrac{1}{4\cdot 3}c_1 \;;\; c_6 = -\tfrac{1}{6\cdot 5}c_3 = \tfrac{1}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}c_0 \;;\; c_7 = -\tfrac{1}{7\cdot 6}c_4 = \tfrac{1}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}c_1 \;\to$$

$$y = c_0\big[1 - \tfrac{1}{6}s^3 + \tfrac{1}{180}s^6 + \cdots \big] + c_1\big[s - \tfrac{1}{12}s^4 + \tfrac{1}{504}s^7 + \cdots \big] \xrightarrow{\text{datos}}$$

$$y = 6 - s^3 + \tfrac{1}{30}s^6 + \cdots = 6 - (x-2)^3 + \tfrac{1}{30}(x-2)^6 + \cdots$$

(Aquí sí podemos dar su término general, menos compacto que en el ejemplo 2:

$$y = c_0\Big[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{(-1)^k (x-2)^{3k}}{2\cdot 5\cdots(3k-1)\cdot 3\cdot 6\cdots(3k)} \Big] + c_1\Big[x + \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{(-1)^k (x-2)^{3k+1}}{3\cdot 6\cdots(3k)\cdot 4\cdot 7\cdots(3k+1)} \Big] \Big).$$

2.2 Ecuación de Euler y puntos singulares regulares

Empecemos la sección tratando una EDO lineal de segundo orden con **coeficientes variables**, resoluble de forma elemental, que dará ideas para el trabajo con series.

Ecuaciones de Euler: [u] $\boxed{x^2y''+axy'+by=h(x)}$, $x>0$.

Haciendo el cambio de variable independiente $x=e^s$ ($s=\ln x$), [u] se convierte en una ecuación lineal con coeficientes constantes:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{ds}\ ,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x^2}\Big[\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy}{ds}\Big]\to\ \boxed{\frac{d^2y}{ds^2}+(a-1)\frac{dy}{ds}+by=h(e^s)}\ ,$$

de ecuación característica $\boxed{Q(\mu)\equiv\mu(\mu-1)+a\mu+b=0}$.

Conocemos las soluciones de la homogénea para la segunda ecuación. Deshaciendo el cambio , obtenemos que la solución general de una ecuación de Euler **homogénea** es:

Si $\mu_1\neq\mu_2$ reales, $y=c_1x^{\mu_1}+c_2x^{\mu_2}$.
Si μ doble (real), $y=(c_1+c_2\ln x)x^{\mu}$.
Si $\mu=p\pm qi$, $y=\big[c_1\cos(q\ln x)+c_2\,\mathrm{sen}(q\ln x)\big]x^p$.

(Observemos que la 'ecuación característica' de una ecuación de Euler sería la que obtendríamos probando en la homogénea soluciones de la forma x^{μ}).

Ej 1. $\boxed{xy''+ay'=0}$, es decir, $x^2y''+axy'=0$ de 'ecuación característica' $\mu(\mu-1)+a\mu=0$.

Como $\mu=1-a,0$, su solución general será: $y=c_1+c_2x^{1-a}$ si $a\neq1$, $y=c_1+c_2\ln x$ si $a=1$.

Expresiones, en general, con sentido cuando $x>0$ (aunque para algunos a valgan $\forall x$).

Podemos con facilidad dar unas soluciones válidas también si $x<0$ escribiendo:

$$y=c_1+c_2|x|^{1-a}\ ,\qquad y=c_1+c_2\ln|x|\ .$$

[También se podría resolver esta ecuación haciendo $y'=v$: $v'=-\frac{av}{x}\ \to\ v=Cx^{-a}$.
Integrando se llega a las soluciones de antes (con otro nombre de las constantes):
$y=Cx^{1-a}+K$, $a\neq1$, $\qquad y=C\ln|x|+K$, $a=1$].

Para la solución particular de la ecuación no homogénea siempre se tiene la **fórmula de variación de las constantes con** $f(x)=h(x)/x^2$, y para la de coeficientes constantes en s , el método de los **coeficientes indeterminados** si $h(e^s)$ es del tipo adecuado.

[Aunque todas las ecuaciones a resolver con series en este capítulo serán homogéneas, volverán a aparecer las de Euler en la separación de variables del capítulo 4 para la ecuación de Laplace en polares y allí se deberán resolver también las no homogéneas].

Ej 2. Resolvamos ahora la ecuación de Euler no homogénea $\boxed{x^2y''+xy'-y=2x}$.

La homogénea es siempre muy fácil: $\mu(\mu-1)+\mu-1=0$, $\mu=\pm1\ \to\ x_h=c_1x+c_2x^{-1}$.
(válida en este caso $\forall x\neq0$).

Con la fórmula de variación de las constantes:

$$|\mathbf{W}|(x)=\begin{vmatrix}x & x^{-1}\\ 1 & -x^{-2}\end{vmatrix}=-2x^{-1},\ f(x)=\frac{2}{x}\ \to\ y_p=x^{-1}\!\int\frac{x\,2x^{-1}dx}{-2x^{-1}}-x\!\int\frac{x^{-1}\,2x^{-1}dx}{-2x^{-1}}=x\ln x-\frac{x}{2}\ .$$

Luego la solución general de la no homogénea es $y=c_1x+\frac{c_2}{x}+x\ln x$ (regalando el $-\frac{1}{2}$ a c_1).

La y_p se puede hallar utilizando coeficientes indeterminados en la ecuación $y''-y=2e^s$ a la que conduce el cambio $x=e^s$. La y_p que debemos probar en la ecuación en s sería $y_p=Ase^s$, o lo que es lo mismo, podemos probar $y_p=Ax\ln x$ en la de Euler inicial:

$$y_p'=A[\ln x+1]\ ,\ y_p''=\frac{A}{x}\ \to\ Ax+Ax=2x\ \to\ A=1\ ,\ y_p=x\ln x\ \text{ como antes.}$$

Volvamos a las soluciones por medio de series. Supondremos en esta sección que para [e] $y''+a(x)y'+b(x)y=0$ es $x=x_o$ un **punto singular**, es decir, que a o b o ambas no son analíticas en $x=x_o$, con lo que no es aplicable el método de la sección anterior.

Interesa precisamente a menudo conocer la forma de las soluciones de [e] cerca de sus puntos singulares. Sólo sabremos decir algo sobre ellas para un tipo particular de puntos sólo débilmente singulares: los **singulares regulares** que pasamos a definir.

Suponemos a partir de ahora que $x=0$ es el punto singular. Para tratar las soluciones cerca de otro $x_o\neq 0$ singular, el cambio $s=x-x_o$ traslada el problema al estudio de las soluciones cerca de 0 de la ecuación en s. Empecemos escrbiendo [e] de otro modo.

Multiplicando por x^2 y llamando $a^*(x)=xa(x)$, $b^*(x)=x^2b(x)$ se obtiene:

$$[e^*]\quad \boxed{x^2y''+x\,a^*(x)\,y'+b^*(x)\,y=0}$$

$x=0$ es punto **singular regular** de [e] - [e*] si a^* y b^* son analíticas en $x=0$.

Ej 3. $\boxed{x(x-1)^2y''-xy'+(x-1)y=0}$, es decir, $y''-\frac{1}{(x-1)^2}y'+\frac{1}{x(x-1)}y=0$.

$x=0$ y $x=1$ son puntos singulares de la ecuación (todos los demás serían regulares).

Para [e*] $x^2y''-x\frac{x}{(x-1)^2}y'+\frac{x}{x-1}y=0$ son $a^*=-\frac{x}{(x-1)^2}$ y $b^*=\frac{x}{x-1}$ analíticas en $x=0\Rightarrow$ este punto es singular regular.

Con $x-1=s$ obtenemos: $s^2(s+1)y''-(s+1)y'+sy=0$, es decir, $s^2y''-s\frac{1}{s}y'+\frac{s}{s+1}y=0$

Como $-\frac{1}{s}$ no es analítica en 0 (aunque $\frac{s}{s+1}$ lo sea), $x=1$ ($s=0$) es singular no regular.

[En torno a $x=1$ no sabremos resolver la ecuación por series (la teoría es complicada)].

Queremos resolver [e*] cerca de $x=0$ suponiendo a^* y b^* analíticas en él, es decir, que admiten desarrollo en serie válido en $|x|<R$ (mínimo de los radios de convergencia):

$$\boxed{a^*(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k^*x^k=a_0^*+a_1^*x+\cdots\ ,\quad b^*(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k^*x^k=b_0^*+b_1^*x+\cdots}\ ,\ |x|<R.$$

[Normalmente será $a_0^*=a^*(0)$ y $b_0^*=b^*(0)$ salvo para funciones como $\frac{\operatorname{sen}x}{x}$].

[e*] se resolverá con el **teorema de Frobenius** de la siguiente página. No lo probaremos, pero intentemos intuir sus hipótesis y conclusiones. La ecuación más sencilla del tipo [e*] es la de Euler (en ella $a^*(x)$ y $b^*(x)$ son 'series' que se reducen a su primer término). Viendo sus soluciones está claro que no hay, en general, soluciones analíticas de [e*]. Pero ya que las tiene del tipo x^r se podría pensar que [e*] posee soluciones en forma de serie que comiencen por términos x^r.

Probemos por tanto en [e*] la solución $y=x^r\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k=c_0x^r+c_1x^{r+1}+c_2x^{r+2}+\cdots\to$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)c_kx^{k+r}+\Big(\sum_{k=0}^{\infty}a_k^*x^k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)c_kx^{k+r}\Big)+\Big(\sum_{k=0}^{\infty}b_k^*x^k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+r}\Big)=0$$

El coeficiente de la potencia de menor orden (x^r) debe anularse: $\big[r(r-1)+a_0^*\,r+b_0^*\big]c_0=0$.

Si la serie ha de empezar por términos x^r, debe ser $c_0\neq 0$. Por tanto, los únicos r para los que pueden existir soluciones no triviales de la forma $x^r\sum$ son las raíces del polinomio:

$Q(r)\equiv r(r-1)+a_0^*\,r+b_0^*$, llamado **polinomio indicial** de [e*].

Es coherente con lo obtenido para Euler. Para ella, si $Q(r)$ tenía dos raíces distintas r_1 y r_2, dos soluciones independientes suyas eran x^{r_1} y x^{r_2}. Si la raíz era doble sólo había una solución de esa forma, y la segunda era la primera multiplicada por el $\ln x$. Luego también es de esperar que en la solución general de [e*] aparezcan logaritmos.

Pero al resolver por series [e*] aparecen problemas que no se daban en el caso particular de Euler. Igualando a 0 el coeficiente que acompaña a x^{r+k} tenemos:

$$\big[(r+k)(r+k-1)+(r+k)a_0^*+b_0^*\big]c_k+\big[(r+k-1)a_1^*+b_1^*\big]c_{k-1}+\cdots=0$$

donde los puntos son términos con c_{k-2}, c_{k-3}, ... Podemos despejar c_k en función de los anteriores ya hallados cuando no se anule el corchete que le precede, que es $Q(r+k)$. Si r_1 es la mayor de las dos raíces $Q(r_1+k)\neq 0\;\forall k$. Pero si r_2 es la menor, y $r_1-r_2=n$ entero positivo, es $Q(r_2+n)=0$. Y salvo que los demás sumandos también se anulen (entonces quedaría indeterminado c_n), no hay forma de anular el coeficiente de x^{r_2+n} y no puede haber soluciones $x^{r_2}\sum$.

Enunciamos ya el teorema de **Frobenius** (aunque se podrían considerar raíces complejas de Q, nos limitamos, por sencillez, a las reales, que son las que nos aparecerán):

Teor

> Supongamos que el polinomio indicial $Q(r)=r(r-1)+a_0^*r+b_0^*$ tiene raíces reales r_1, r_2 con $r_1\geq r_2$. Entonces:
>
> Siempre hay una solución de [e*] de la forma $y_1=x^{r_1}\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_kx^k$, $c_0\neq 0$.
>
> La otra solución y_2 linealmente independiente es, según los casos:
>
> **a]** Si r_1-r_2 no es cero ni entero positivo: $y_2=x^{r_2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_kx^k$, $b_0\neq 0$.
>
> **b]** Si $r_1=r_2$, $y_2=x^{r_1+1}\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_kx^k+y_1\ln x$.
>
> **c]** Si $r_1-r_2=1,2,3,\ldots$, $y_2=x^{r_2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_kx^k+dy_1\ln x$, $b_0\neq 0$, $d\in\mathbf{R}$.
>
> Todas las soluciones están definidas al menos si $0<x<R$ y los coeficientes c_k, b_k y la constante d se pueden determinar sustituyendo cada una de las soluciones en la ecuación.

En el caso **a]** se pueden calcular las soluciones en el orden que se quiera, pero en los otros dos debe hallarse primero la y_1, pues aparece en la expresión de la y_2.

En el **c]** la constante d puede ser perfectamente 0 (como ocurre en las ecuaciones de Euler), con lo que, a pesar de todo, hay dos soluciones independientes del tipo $x^r\sum$.

Se prueba sin dificultad que obtenemos otras soluciones válidas en $-R<x<0$ a partir de las anteriores sin más que sustituir $\ln x$ por $\ln|x|$ y las expresiones de la forma x^r que preceden a las series por $|x|^r$.

Ej 4. $\boxed{2xy''+y'+xy=0}$, o sea, $x^2y''+x\frac{1}{2}y'+\frac{x^2}{2}y=0\ \to\ a^*(x)=\frac{1}{2}$, $b^*(x)=\frac{x^2}{2}$.

$a^*(x)$ y $b^*(x)$ analíticas ($R=\infty$) $\Rightarrow$ $x=0$ singular regular. Como $a_0^*=\frac{1}{2}$ y $b_0^*=0$, el polinomio indicial es $r(r-1)+\frac{1}{2}r+0=r\left(r-\frac{1}{2}\right)\ \to\ r_1=\frac{1}{2}$, $r_2=0$, con $r_1-r_2\notin\mathbf{N}$.

Las dos series solución linealmente independientes (una analítica y la otra no) son, pues:

$$y_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+1/2},\ c_0\neq 0,\quad y_2=\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k,\ b_0\neq 0\quad \text{(convergen } \forall x\in\mathbf{R}\text{, según el teorema).}$$

Llevando y_1 a la ecuación (estas series se derivan como las de potencias habituales):

$$\sum_{k=0}^{\infty}2(k+\tfrac{1}{2})(k-\tfrac{1}{2})c_kx^{k-1/2}+\sum_{k=0}^{\infty}(k+\tfrac{1}{2})c_kx^{k-1/2}+\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+3/2}=0$$

(ahora las 3 empiezan en $k=0$ pues no se van los primeros términos al derivar).

Igualando a 0 los coeficientes de las diferentes potencias de x:

$x^{-1/2}$: $\left[2\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]c_0=0\cdot c_0=0$ y c_0 queda indeterminado como debía.

$x^{1/2}$: $\left[2\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}\right]c_1=0\to c_1=0$,

$x^{k-1/2}$: $\left[2\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{1}{2}\right)+\left(k+\frac{1}{2}\right)\right]c_k+c_{k-2}=0\to\ c_k=-\frac{1}{k(2k+1)}c_{k-2}$, $k=2,3,\ldots$

Por tanto: $c_3=c_5=\cdots=0$, $c_2=-\frac{1}{2\cdot 5}c_0$, $c_4=-\frac{1}{4\cdot 9}c_2=\frac{1}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 9}c_0$, ... $\to$

$$y_1=x^{1/2}-\tfrac{1}{10}x^{5/2}+\cdots=x^{1/2}\Big[1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2\cdot 4\cdots 2m\cdot 5\cdot 9\cdots(4m+1)}x^{2m}\Big]$$ (eligiendo $c_0=1$, por ejemplo).

Para la otra raíz del $Q(r)$: $\sum\limits_{k=0}^{\infty}2k(k-1)b_kx^{k-1}+\sum\limits_{k=0}^{\infty}kb_kx^{k-1}+\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_kx^{k+1}=0\to$

x^0: $b_1=0$, x^1: $[4+2]b_2+b_0=0\to b_2=-\frac{1}{6}b_0$.

x^{k-1}: $[2k(k-1)+k]b_k+b_{k-2}=0\to\ b_k=-\frac{1}{k(2k-1)}b_{k-2}$, $k=2,3,\ldots\to b_3=b_5=\cdots=0$.

$$b_4=-\tfrac{1}{4\cdot 7}b_2=\tfrac{1}{2\cdot 4\cdot 3\cdot 7}b_0,\ldots\ \to\ y_2=1-\tfrac{1}{6}x^2+\cdots=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2\cdot 4\cdots 2m\cdot 3\cdot 7\cdots(4m-1)}x^{2m}.$$

El criterio del cociente dice que, como debían, las series convergen $\forall x$. La y_2 vale $\forall x$, pero y_1 sólo para $x>0$ (en $x=0$ es y_1 una función acotada, pero no es ni derivable). Una y_1 válida $\forall x\neq 0$ es $y_1=|x|^{1/2}\left[1+\sum\right]$, que es ya una función continua en $x=0$.

Ej 5. $\boxed{x^2y''+\left(\frac{1}{4}-4x^2\right)y=0}$ Hallemos algunos términos de sus series solución.

$a^*(x)=0$, $b^*(x)=\frac{1}{4}-4x^2$ son analíticas con $R=\infty$. Es $x=0$ singular regular con

$$r^2-r+\tfrac{1}{4}=0,\ r=\tfrac{1}{2} \text{ doble } \to\ y_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+1/2} \to \sum_{k=0}^{\infty}\left[k^2c_kx^{k+1/2}-4c_kx^{k+5/2}\right]=0 \to$$

$$x^{1/2}:\ 0\cdot c_0=0,\ c_0 \text{ cualquiera};\quad x^{3/2}:\ c_1=0;$$

$$x^{k+1/2}:\ k^2c_k-4c_{k-2}=0;\ c_k=\tfrac{4}{k^2}c_{k-2} \quad \text{regla de recurrencia}$$

$$\to\ c_3=c_5=\cdots=0,\ c_2=c_0,\ c_4=\tfrac{4}{16}c_2=\tfrac{1}{4}c_0,\ c_6=\tfrac{1}{9}c_4=\tfrac{1}{36}c_0,\ldots,$$

$$y_1=x^{1/2}\left[1+x^2+\tfrac{1}{4}x^4+\tfrac{1}{36}x^6+\cdots\right] \to\ y_1'=\tfrac{1}{2}x^{-1/2}+\tfrac{5}{2}x^{3/2}+\tfrac{9}{8}x^{7/2}+\cdots$$

Como es raíz doble, seguro que la otra solución contiene un logaritmo:

$$y_2=x^{3/2}\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k+y_1\ln x \to\ y_2'=\sum_{k=0}^{\infty}\left(k+\tfrac{3}{2}\right)b_kx^{k+1/2}+\tfrac{1}{x}y_1+y_1'\ln x,$$

$$y_2''=\sum_{k=0}^{\infty}\left(k+\tfrac{3}{2}\right)\left(k+\tfrac{1}{2}\right)b_kx^{k-1/2}-\tfrac{1}{x^2}y_1+\tfrac{2}{x}y_1'+y_1''\ln x \to$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+1)^2b_kx^{k+3/2}-4b_kx^{k+7/2}\right]-y_1+2xy_1'+\ln x\left[x^2y_1''+\left(\tfrac{1}{4}-4x^2\right)y_1\right]=0.$$

El último $[\cdot\cdot]=0$ por ser y_1 solución (**lo que acompaña a** $\ln x$ **siempre se anula**).

Operamos como siempre, utilizando los desarrollos de y_1 e y_1' dados arriba:

$$\to\ x^{3/2}:\ b_0=0;\quad x^{5/2}:\ 4b_1+4=0,\ b_1=-1;\quad x^{7/2}:\ 9b_2-4b_0=0,\ b_2=0;$$

$$x^{9/2}:\ 16b_3-4b_1+2=0,\ b_3=-\tfrac{3}{8};\ \ldots\ \to\ y_2=-x^{5/2}-\tfrac{3}{8}x^{9/2}+\cdots+y_1\ln x.$$

[Observemos que, como ocurre con todos los puntos singulares regulares, desde que se tienen las raíces del polinomio inicial, se sabe ya mucho sobre sus soluciones. Por ejemplo, aquí sabemos que ninguna (salvo la trivial) es analítica. O que todas ellas tienden a 0 cuando $x\to 0^+$, pues recordemos que $x^a\ln x \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$, si $a>0$].

El ejemplo anterior muestra que son más largas las cuentas para el cálculo de la y_2 en el caso **b]** del teorema que en el **a]**. Y también son más complicadas las del **c]**, caso al que pertenecen los siguientes ejemplos. Para distinguir en ellos si aparecen logaritmos o no (es decir, si es o no $d\neq 0$) no se necesita dar la expresión del término general, bastan los primeros términos de la y_1.

Ej 6. $\boxed{xy''+2e^xy'=0}$. Se puede resolver sin utilizar series, pero acudamos a Frobenius:

$x=0$ es singular regular [$a^*(x)=2e^x$ y $b^*(x)\equiv 0$ analíticas en todo **R**]. $r_1=0$, $r_2=-1$.

La $y_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k$ se ve (¡a ojo!) que es $y_1\equiv 1$. La otra es: $y_2=\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^{k-1}+d\ln x \to$

$$y_2'=\sum_{k=0}^{\infty}(k-1)b_kx^{k-2}+\tfrac{d}{x},\quad y_2''=\sum_{k=0}^{\infty}(k-1)(k-2)b_kx^{k-3}-\tfrac{d}{x^2} \to$$

$$2b_0x^{-2}+2b_3x+\cdots-dx^{-1}+\left[2+2x+x^2+\tfrac{1}{3}x^3+\cdots\right]\left[dx^{-1}-b_0x^{-2}+b_2+2b_3x+\cdots\right]=0 \to$$

x^{-2}: $2b_0-2b_0=0 \to b_0$ indeterminado como debía.

x^{-1}: $-d+2d-2b_0=0 \to d=2b_0$ (aparecen, pues, logaritmos).

x^0: $2d-b_0+2b_2=0 \to b_2=\frac{1}{2}b_0-d=-\frac{3}{2}b_0$.

x^1: $2b_3+d-\frac{1}{3}b_0+2b_2+4b_3=0 \to b_3=\frac{2}{9}b_0$. ·········

$$\to\quad y_2=2\ln x+\tfrac{1}{x}-\tfrac{3}{2}x+\tfrac{2}{9}x^2+\cdots$$

[No podemos, desde luego, dar el término general de esta solución].

Resolvamos la ecuación ahora sin series: $y'=v \to v'=-\frac{2e^x}{x}v \to$

$$v=Ce^{-\int 2x^{-1}e^xdx}=Ce^{\int(-2/x-2-x-x^2/3+\cdots)dx}=Cx^{-2}e^{-2x-x^2/2-x^3/9+\cdots}$$

$$=Cx^{-2}\left[1+\left(-2x-\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{9}x^3-\cdots\right)+\tfrac{1}{2}\left(-2x-\tfrac{1}{2}x^2-\cdots\right)^2+\tfrac{1}{6}\left(-2x-\cdots\right)^3+\cdots\right] \to$$

$$y=K+C\int\left[x^{-2}-2x^{-1}+\tfrac{3}{2}-\tfrac{4}{9}x+\cdots\right]dx=K-C\left[2\ln x+\tfrac{1}{x}-\tfrac{3}{2}x+\tfrac{2}{9}x^2+\cdots\right].$$

Ej 7. $\boxed{x^2y''+2x^2y'-2y=0}$ $x=0$ singular regular; $a^*(x)=2x$, $b^*(x)=-2$ con $R=\infty$.

$r(r-1)+0\cdot r-2$ tiene por raíces $r_1=2$, $r_2=-1$. Así pues:

$$y_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+2},\ c_0\neq 0 \to \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_kx^{k+2}+\sum_{k=0}^{\infty}2(k+2)c_kx^{k+3}-\sum_{k=0}^{\infty}2c_kx^{k+2}=0 \to$$

c_0 indeterminado, $c_k=-\frac{2(k+1)}{k(k+3)}c_{k-1}$, $k=1,2,\dots \to c_1=-c_0$, $c_2=\frac{3}{5}c_0$, $c_3=-\frac{4}{15}c_0$, ...,

$$c_k=(-1)^k\frac{2(k+1)}{k(k+3)}\frac{2k}{(k-1)(k+2)}\frac{2(k-1)}{(k-2)(k+1)}\cdots c_0=\frac{(-2)^k(k+1)}{(k+3)!}6c_0 \to$$

Si elegimos $c_0=\frac{1}{6}$, $y_1=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^k(k+1)}{(k+3)!}x^{k+2}=\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{6}x^3+\cdots \to y_1'=\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}x^2+\cdots$

La otra solución (caso **c]**) es $y_2=\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^{k-1}+dy_1\ln x$, $b_0\neq 0$, d constante (quizás nula)

$$\to \sum_{k=0}^{\infty}\big[(k-1)(k-2)b_kx^{k-1}+2(k-1)b_kx^k-2b_kx^{k-1}\big]$$
$$+d\big[(-1+2x)y_1+2xy_1'\big]+d\ln x\big[x^2y_1''+2x^2y_1'-2y_1\big]=0.$$

Como siempre, el tercer corchete se anula, por ser y_1 solución. Sustituyendo las series de y_1 y y_1' escritas arriba en el segundo corchete y agrupando potencias de x:

$$-2b_0-2b_1-2b_2x+\big[2b_3+2b_2-2b_3-\tfrac{d}{6}+\tfrac{2d}{3}\big]x^2+\cdots=0 \to$$
$$b_1=-b_0,\ b_2=0,\ d=0,\ b_0,\ b_3 \text{ indeterminados.}$$

Como $d=0$, y_2 no tiene $\ln x$. Por el teorema debía ser $b_0\neq 0$. Que también quede libre b_3 se debe a que proporciona potencias x^2, comienzo de la serie de y_1. Elegimos $b_0=1$ y $b_3=0$ (para no volver a calcular y_1). Como en la recurrencia cada b_k depende de b_{k-1} es $b_4=b_5=\cdots=0$. Concluimos que:

$$y_2=\tfrac{1}{x}(1-x)=\tfrac{1}{x}-1 \quad \text{[es fácil comprobar que satisface la ecuación].}$$

[De la y_2 sacaríamos otra con: $y_1^*=\frac{1-x}{x}\int\frac{x^2e^{-2x}}{(1-x)^2}dx$. La primitiva no parece calculable, pero esto no impide desarrollar e integrar para obtener una serie solución:

Lo más corto para desarrollar el integrando (se podría hacer un cociente) es:

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} \to x^2\big[1-2x+2x^2-\tfrac{4}{3}x^3+\cdots\big]\big[1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\big]=x^2+x^4+\tfrac{2}{3}x^5+\cdots$$
$$\to y_1^*=\big[\tfrac{1}{x}-1\big]\big[\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{5}x^5+\tfrac{1}{9}x^6+\cdots\big]=\tfrac{1}{3}x^2-\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{5}x^4-\tfrac{4}{45}x^5+\cdots.$$

Aunque no lo pareciese, la primitiva sí se puede calcular: $u=x^2e^{-2x}$, $dv=\frac{1}{(1-x)^2} \to$

$$\int\frac{x^2e^{-2x}}{(1-x)^2}dx=\frac{x^2e^{-2x}}{1-x}-\int 2xe^{-2x}dx=\frac{1}{2}\frac{1+x}{1-x}e^{-2x} \to y_1^\bullet=\big(1+\tfrac{1}{x}\big)e^{-2x}.$$

y_1 no es exactamente ni y_1^* ni $y_1^\bullet$ (es $\frac{1}{2}y_1^*$ y una combinación lineal de y_2 e $y_1^\bullet$)].

En este ejemplo, si, en vez de partir de la raíz mayor $r_1=2$, se hubiese sustituido la y_2, habríamos obtenido las dos series de un tirón. Pero esto se debe a que resulta ser $d=0$. Si fuera $d\neq 0$ sólo obtendríamos así la solución trivial $y=0$ y habría que empezar de nuevo desde el principio.

Ej 8. $\boxed{x^2y''+xy'+(x^2-\frac{1}{4})y=0}$ $x=0$ singular regular con $r=\pm\frac{1}{2}$, $r_1-r_2=1$. $y_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+1/2}$.

$y_2=\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^{k-1/2}+dy_1\ln x$. Probamos primero esta y_2 con $d=0$ buscando el atajo citado:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\big[(k-\tfrac{1}{2})(k-\tfrac{3}{2})b_kx^{k-1/2}+(k-\tfrac{1}{2})b_kx^{k-1/2}-\tfrac{1}{4}b_kx^{k-1/2}+b_kx^{k+3/2}\big]$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\big[k(k-1)b_kx^{k-1/2}+b_kx^{k+3/2}\big]=0 \to x^{-1/2}: 0b_0=0,\ b_0 \text{ indeterminado.}$$

$x^{1/2}$: $0b_1=0$, también $\forall b_1$. $x^{3/2}$: $b_2=-\frac{1}{2}b_0$. $x^{5/2}$: $b_3=-\frac{1}{6}b_1$. $x^{k-1/2}$: $b_k=-\frac{1}{k(k-1)}b_{k-2}$.

$$\to b_4=-\tfrac{1}{12}b_2=\tfrac{1}{4!}b_0,\ b_5=-\tfrac{1}{20}b_2=\tfrac{1}{5!}b_1,\ \dots\quad y=x^{-1/2}\Big[b_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!}+b_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!}\Big].$$

Son series conocidas y dan la solución con funciones elementales: $y=b_0\frac{\cos x}{\sqrt{x}}+b_1\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}$.

[Se puede comprobar la solución haciendo el cambio $y=x^{-1/2}u$ que lleva a $u''+u=0$].

2.3 Ecuaciones de Legendre, Hermite y Bessel

La ecuación de **Legendre** es [L] $\boxed{(1-x^2)y''-2xy'+py=0}$, $p\geq 0$.

[En muchos textos se escribe esta ecuación poniendo $p(p+1)$ en vez de p].

La resolvemos primero en torno a $x=0$ que es regular. Como $a(x)=-2x/(1-x^2)$ y $b(x)=p/(1-x^2)$ son analíticas en $|x|<1$ la ecuación tiene series solución que convergen al menos en ese intervalo. Probamos pues:

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k \to \sum_{k=2}^{\infty}\left[k(k-1)c_kx^{k-2}-k(k-1)c_kx^k\right]-\sum_{k=1}^{\infty}2kc_kx^k+\sum_{k=0}^{\infty}pc_kx^k=0 \to$$

$$x^0:\ 2\cdot 1\cdot c_2+p\cdot c_0=0 \to c_2=-\tfrac{p}{2\cdot 1}c_0\ ;\quad x^1:\ 3\cdot 2\cdot c_3+(p-2)\cdot c_1=0 \to c_3=-\tfrac{p-2}{3\cdot 2}c_1\ ;\ \ldots$$

$$x^k:\ (k+2)(k+1)c_{k+2}+[p-k(k+1)]c_k=0 \to c_{k+2}=-\frac{p-k(k+1)}{(k+2)(k+1)}c_k\ ,\ k=0,1,\ldots \to$$

$$c_4=-\tfrac{p-6}{4\cdot 3}c_2=\tfrac{p(p-6)}{4!}c_0\ ;\quad c_5=-\tfrac{p-12}{5\cdot 4}c_3=\tfrac{(p-2)(p-12)}{5!}c_1\ ,\ \ldots \to$$

$$y=c_0\left[1-\tfrac{p}{2}x^2+\tfrac{p(p-6)}{4!}x^4+\cdots\right]+c_1\left[x-\tfrac{p-2}{6}x^3+\tfrac{(p-2)(p-12)}{5!}x^5+\cdots\right]=c_0y_1+c_1y_2\,.$$

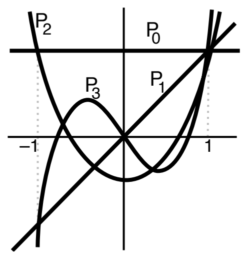
Cuando $p=n(n+1)$ con $n\in\mathbf{N}$ una de las dos series pasa a ser un polinomio de grado n , pues c_{n+2} (y, por tanto, c_{n+4} ...) se anulan. Se trunca y_1 si n par y lo hace y_2 si n impar:

$$p=0\to y_1=1\ ,\quad p=6\to y_1=1-3x^2\ ,\quad p=20\to y_1=1-10x^2+\tfrac{35}{3}x^4\ ,\ \ldots$$

$$p=2\to y_2=x\ ,\quad p=12\to y_2=x-\tfrac{5}{3}x^3\ ,\quad p=30\to y_2=x-\tfrac{14}{3}x^3+\tfrac{21}{5}x^5\ ,\ \ldots$$

Se llama **polinomio de Legendre de grado** n al polinomio P_n solución de [L] con $p=n(n+1)$ que cumple $P_n(1)=1$, o sea:

$$\boxed{\begin{array}{l} P_0=1\ ,\ \ P_1=x\ ,\ \ P_2=\tfrac{3}{2}x^2-\tfrac{1}{2}\ ,\ \ P_3=\tfrac{5}{2}x^3-\tfrac{3}{2}x\ , \\ P_4=\tfrac{35}{8}x^4-\tfrac{15}{4}x^2+\tfrac{3}{8}\ ,\ \ P_5=\tfrac{63}{8}x^5-\tfrac{35}{4}x^3+\tfrac{15}{8}x\ ,\ \ldots \end{array}}$$



Los P_{2m} tienen simetría par y los P_{2m+1} impar. P_{2m+1} y P'_{2m} se anulan en 0 . Se pueden probar además las propiedades:

P_n tiene n ceros reales, todos en $(-1,1)$. $P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ fórmula de **Rodrigues**

Los P_n son **ortogonales**: $\int_{-1}^{1}P_nP_m\,dx=0$, si $m\neq n$; $\int_{-1}^{1}P_n^2\,dx=\frac{2}{2n+1}$.

Los P_n son las únicas soluciones de [L] **acotadas a la vez en** $x=1$ **y** $x=-1$.

Para intentar comprobar lo último resolvemos en torno a $x=1$, haciendo $s=x-1$:

$$[\mathrm{L}_1]\ \ s(s+2)y''+2(s+1)y'-py=0\ ,\quad a^*(s)=\tfrac{2(s+1)}{s+2}\ ,\ b^*(s)=-\tfrac{ps}{s+2}\quad \text{analíticas para } |s|<2$$

$s=0$ es singular regular, y es $r=0$ doble $\forall p$. Por tanto sus soluciones son:

$$y_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_ks^k\quad \text{e}\quad y_2=|s|\sum_{k=0}^{\infty}b_ks^k+y_1\ln|s|\ ,\quad c_0=1\,,$$

y las series convergen al menos si $|s|<2$. Sin hallar ningún coeficiente podemos ya afirmar que y_1 está acotada $\forall p$ en $s=0$ ($x=1$), mientras que y_2 no lo está ($\to-\infty$ si $s\to 0$).

Calculemos y_1 y comprobemos que si $p=n(n+1)$ obtenemos los P_n [pues $y_1(1)=1$]. Debe ser:

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left[k(k-1)c_ks^k+2k(k-1)c_ks^{k-1}\right]+\sum_{k=1}^{\infty}\left[2kc_ks^k+2kc_ks^{k-1}\right]-\sum_{k=0}^{\infty}pc_ks^k=0 \to$$

$$c_k=\frac{p-k(k-1)}{2k^2}c_{k-1}\ ,\quad k=1,2,\ldots \to y_1(s)=1+\tfrac{p}{2}s+\tfrac{p[p-2]}{16}s^2+\cdots$$

Si $p=n(n+1)$ la regla de recurrencia nos dice que c_{n+1} y los siguientes se anulan. En particular:

$$p=0\to y_1=1\ ;\quad p=2\to y_1=1+s=x\ ;\quad p=6\to y_1=1+3s+\tfrac{6[6-2]}{16}s^2=\tfrac{3}{2}x^2-\tfrac{1}{2}\ ;\ \ldots$$

Faltaría demostrar (es difícil) que si $p\neq n(n+1)$ la y_1 no está acotada cuando $s\to-2$ ($x\to-1$) para comprobar que no hay más soluciones de [L] acotadas en $x=\pm 1$ que los P_n .

Otra ecuación ligada a problemas físicos es la de **Hermite**: [H] $\boxed{y''-2xy'+2py=0}$.

Tiene solución analítica ($x=0$ regular), convergente en todo **R**. Resolvemos:

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k \to \sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^{k-2}-\sum_{k=1}^{\infty}2kc_kx^k+\sum_{k=0}^{\infty}2pc_kx^k=0 \to c_k=2\frac{k-2-p}{k(k-1)}c_{k-2}\ ,\ k=2,3,\dots$$

$$\to\ y=c_1\Big[1+\sum_{n=1}^{\infty}2^n\frac{(-p)(2-p)\cdots(2n-2-p)}{(2n)!}x^{2n}\Big]+c_2\Big[x+\sum_{n=1}^{\infty}2^n\frac{(1-p)(3-p)\cdots(2n-1-p)}{(2n+1)!}x^{2n+1}\Big].$$

Como para Legendre, [H] posee solución polinómica cuando $p=n\in N$. Si $p=2m$, la primera solución y_1 pasa a ser un polinomio de grado $2m$, y si $p=2m+1$ es la y_2 la que se convierte en un polinomio de ese mismo grado:

$$p=0\to y_1=1\ ;\ \ p=1\to y_2=x\ ;\ \ p=2\to y_1=1-2x^2\ ;\ \ p=3\to y_2=x-\tfrac{2}{3}x^3\ ;\ \dots$$

Los **polinomios de Hermite** $H_n(x)$ son las soluciones polinómicas de [H] tales que los términos con potencias más altas de x son de la forma 2^nx^n, es decir:

$$\boxed{H_0=1\ ;\ \ H_1=2x\ ;\ \ H_2=4x^2-2\ ;\ \ H_3=8x^3-12x\ ;\ \ \dots}$$

Citemos, una vez más sin prueba, algunas propiedades de los H_n que serán útiles, por ejemplo, cuando aparezcan en física cuántica. Una forma de generarlos todos es:

$$e^{2xs-s^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n!}H_n(x)\,s^n$$ (a esa exponencial se le llama **función generatriz** de los H_n).

[Nos limitamos a comprobarlo para los 4 que ya hemos calculado:

$$\big(1+2xs+2x^2s^2+\tfrac{4x^3}{3}s^3+\cdots\big)\big(1-s^2+\tfrac{1}{2}s^4-\cdots\big)=1+2xs+\big(2x^2-1\big)s^2+\big(\tfrac{4x^3}{3}-2x\big)s^3+\cdots\ ].$$

De la función generatriz sale otra fórmula de **Rodrigues**: $H_n(x)=(-1)^n\,e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$.

$$\Big[\text{Pues } H_n(x)=\frac{\partial e^{2xs-s^2}}{\partial s^n}\Big|_{s=0}=e^{x^2}\frac{\partial e^{-(x-s)^2}}{\partial s^n}\Big|_{s=0}=\Big(x-s=z,\ \frac{\partial}{\partial s}=-\frac{\partial}{\partial z}\Big)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dz^n}e^{-z^2}\Big|_{z=x}\Big].$$

En cuántica no aparece [H], sino $u''+\big(2p+1-x^2\big)u=0$. Haciendo $u=ye^{-x^2/2}$ en ella se llega a [H]. Se prueba (no es fácil hacerlo), que las **únicas soluciones** u **de la inicial que** $\to 0$ **si** $|x|\to\infty$ son las de la forma $u_n(x)=e^{-x^2/2}H_n(x)$, llamadas **funciones de Hermite** de orden n. Sólo estas u_n interesan físicamente.

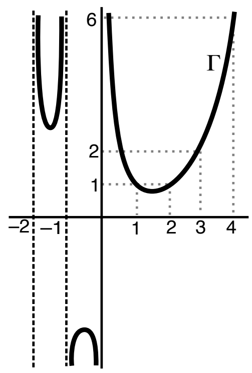
Como los P_n, se puede ver que también las u_n son **ortogonales**, ahora en $(-\infty,\infty)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}u_nu_m dx=\int_{-\infty}^{\infty}H_nH_me^{-x^2}dx=0\text{, si } m\neq n\ ;\ \int_{-\infty}^{\infty}u_n^2dx=\int_{-\infty}^{\infty}H_n^2e^{-x^2}dx=2^nn!\sqrt{\pi}\,.$$

[Lo comprobamos exclusivamente cuando $n=0,1$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}u_0u_1=\int_{-\infty}^{\infty}2xe^{-x^2}=0\ ,\ \int_{-\infty}^{\infty}u_0^2=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}=\sqrt{\pi}\ ,\ \int_{-\infty}^{\infty}u_1^2=-2xe^{-x^2}\Big|_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}2e^{-x^2}=2\sqrt{\pi}\ ].$$

Para expresar compactamente las soluciones de la última ecuación de interés físico que vamos a estudiar (la de Bessel) utilizaremos las propiedades de la **función gamma** (que generaliza el factorial para números no enteros) definida por esta impropia convergente:



$$\Gamma(s)=\int_0^{\infty}e^{-x}x^{s-1}dx\ \text{ si } s>0,\ \text{ y extendida a } s<0 \text{ con:}$$

$$\Gamma(s)=\frac{\Gamma(s+n)}{(s+n-1)\cdots(s+1)s}\ ,\text{ si } -n<s<-n+1\ ,\ n\in\mathbf{N}\,.$$

Se cumplen para la Γ las siguientes igualdades:

$$\Gamma(1)=\int_0^{\infty}e^{-x}dx=1\,.\ \ \Gamma\big(\tfrac{1}{2}\big)=2\int_0^{\infty}e^{-u^2}du=\sqrt{\pi}\,.$$

$$\Gamma(s+1)=-e^{-x}x^s\Big]_0^{\infty}+s\Gamma(s)=s\Gamma(s)$$

$$\to\ \Gamma(s+n)=(s+n-1)\cdots(s+1)\,s\,\Gamma(s)\ \to\ \Gamma(n+1)=n!\,,\ n\in\mathbf{N}\,.$$

La ecuación de **Bessel** es: [B] $\boxed{x^2y''+xy'+[x^2-p^2]y=0}$, $p\geq 0$.

$x=0$ es singular regular con polinomio indicial r^2-p^2, $r_1=p$, $r_2=-p$. Entonces

$$y_1=x^p\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k\,,\ x>0\,,\quad (\textbf{acotada}\text{ en } x=0\ \forall p\,)$$

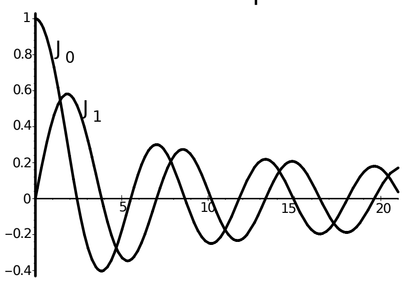
es una solución definida por una serie que convergerá en todo **R**. Llevándola a [B]:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\big[k(2p+k)c_kx^{p+k}+c_kx^{p+k+2}\big]=0\ ;\ c_k=-\tfrac{c_{k-2}}{k(2p+k)}\,,\ k=2,3,\dots;\quad c_1=0\to c_3=\dots=0$$

$$c_2=-\frac{c_0}{2^2(p+1)}\ ;\ c_4=\frac{c_0}{2^4 2(p+1)(p+2)}\ ;\ \dots\ \to\ y_1=c_0\,x^p\Big[1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^mx^{2m}}{2^{2m}m!\,(p+1)\cdots(p+m)}\Big].$$

Eligiendo $c_0=\frac{1}{2^p\Gamma(p+1)}$ $\to$ $\boxed{J_p(x)\equiv\big[\frac{x}{2}\big]^p\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(p+m+1)}\big[\frac{x}{2}\big]^{2m}}$ [**función de Bessel de primera especie y orden** p].

En particular son: $J_0(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m!)^2}\big[\frac{x}{2}\big]^{2m}$, $J_1(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,(m+1)!}\big[\frac{x}{2}\big]^{2m+1}$,



cuyas gráficas están a la izquierda. Se prueba que, como J_0 y J_1 , todas las J_p oscilan y que si x grande:

$$J_p\sim\sqrt{\tfrac{2}{\pi x}}\,\cos\big[x-(2p+1)\tfrac{\pi}{4}\big]$$

Cada J_p tiene un infinitos ceros en $(0,\infty)$ [que deben conocerse para resolver algunas EDPs]:

los de J_0 son: 2.4048, 5.5201, 8.6532, . . . ,
los de J_1 : 3.8317, 7.0156, 10.1735, ...

Para hallar una solución linealmente independiente (**no acotada** seguro en $x=0$), nos dice Frobenius que si $r_1-r_2=2p\neq 0,1,\dots$ la y_2 es de la forma:

$$y_2=x^{-p}\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k\,,\ x>0\quad\Big(\text{llevándola a [B] se tiene } J_{-p}(x)\equiv\big[\tfrac{x}{2}\big]^{-p}\sum_{m=0}^{\infty}\tfrac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(p+m+1)}\big[\tfrac{x}{2}\big]^{2m}\Big).$$

Si $p\notin\mathbf{N}$, pero $2p\in\mathbf{N}$ $\big(p=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\dots\big)$, la y_2 no contiene el $\ln x$ posible de Frobenius (caso **c]** con $d=0$). Para $p=\frac{1}{2}$ la resolvimos ya en el ejemplo 8 de 2.2. O sustiyendo en $J_{\pm p}$:

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\tfrac{2}{x}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^mx^{2m+1}}{2^{2m+1}m!(m+\frac{1}{2})\cdots\frac{1}{2}\,\Gamma(1/2)}=\boxed{\sqrt{\tfrac{2}{\pi x}}\,\mathrm{sen}\,x}\ ,\quad J_{-\frac{1}{2}}(x)=\cdots=\boxed{\sqrt{\tfrac{2}{\pi x}}\cos x}\ ,$$

que son linealmente independientes $\big($la expresión asintótica pasa a ser exacta si $p=\frac{1}{2}$ $\big)$.
Como será $J_{p+1}=\frac{2p}{x}J_p-J_{p-1}$, **todas las** $J_{\frac{2n+1}{2}}$, $n\in\mathbf{Z}$, **son funciones elementales**.

Para $p=n\in\mathbf{N}$ el atajo anterior no sirve, pues cambiando n por $-n$ la J_{-n} que aparece no es independiente de J_n [es $J_{-n}=(-1)^nJ_n$]. Tendríamos que hallar las y_2 de Frobenius (y obtendríamos un $\ln x$ en su larga expresión). Por ejemplo, para $p=0$ (que seguro contiene logaritmos) se acaba encontrando:

$$y_2(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(m!)^2}\Big[1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{m}\Big]\Big[\frac{x}{2}\Big]^{2m}+J_0(x)\ln x\equiv K_0(x)\,,\ x>0$$

[**función de Bessel de segunda especie y orden** 0].

Pero en bastantes problemas físicos en los que surge la ecuación [B] (en otros no) es necesario que las soluciones estén acotadas, y para ellos no servirá de nada disponer de estas complicadas segundas soluciones.

Lo que sí nos será útil en el futuro será conocer estas propiedades de las derivadas:

$$\boxed{\tfrac{d}{dx}\big[x^pJ_p(x)\big]=x^pJ_{p-1}(x)\,,\ \tfrac{d}{dx}\big[x^{-p}J_p(x)\big]=-x^{-p}J_{p+1}(x)}\quad\Big(\text{En particular, } \begin{matrix}[xJ_1]'=J_0\\ [J_0]'=-J_1\end{matrix}\Big).$$

$$\Big(\text{Son inmediatas: } \frac{d}{dx}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^mx^{2m+2p}}{2^{2m+p}m!\Gamma(p+m+1)}=x^p\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^mx^{2m+2p-1}}{2^{2m+p-1}m!\Gamma(p+m+1)}\ \text{ y similar la otra}\Big).$$

Derivándolas y despejando J_p' : $J_p'=J_{p-1}-\frac{p}{x}J_p=-J_{p+1}+\frac{p}{x}J_p\ \Rightarrow\ \boxed{J_{p+1}=\frac{2p}{x}J_p-J_{p-1}}$, que es la relación de recurrencia citada, que expresa cada J_{p+1} en función de las anteriores.

2.4 El punto del infinito

Nos preocupamos por el comportamiento de las soluciones de una lineal de segundo orden para grandes valores de x. Pocas ecuaciones son resolubles elementalmente. Por otra parte, las soluciones en forma de serie (salvo que se puedan identificar con funciones elementales) no dan ninguna información para grandes x, incluso aunque converjan $\forall x$. Si queremos ver qué sucede cuando $x\to\infty$, la idea natural es efectuar el **cambio de variable** $x=1/s$ y estudiar el comportamiento de las soluciones de la nueva ecuación cuando $s\to 0^+$, que será fácil de precisar si $s=0$, llamado **punto del infinito** de la ecuación inicial, es punto regular o singular regular de esta ecuación.

A diferencia del cambio $s=x-x_o$ que no modifica las derivadas, hacer $x=1/s$ exige usar la regla de la cadena. Denotando las derivadas respecto a s con puntos:

$$x=\tfrac{1}{s} \to y'=\dot y\,\tfrac{ds}{dx}=-\tfrac{1}{x^2}\,\dot y\ ,\ y''=\tfrac{1}{x^4}\,\ddot y+\tfrac{2}{x^3}\,\dot y \to \boxed{y'=-s^2\,\dot y\ ,\ \ y''=s^4\,\ddot y+2s^3\,\dot y}\ .$$

Ej 1. $\boxed{(1+x^2)y''+xy'-y=0}$. Estudiemos su comportamiento para grandes x:

$$x=\tfrac{1}{s} \to\ (1+\tfrac{1}{s^2})s^4\ddot y+(1+\tfrac{1}{s^2})2s^3\dot y-\tfrac{s^2}{s}\dot y-y=s^2(1+s^2)\ddot y+s(1+2s^2)\dot y-y=0\ .$$

Para esta ecuación $s=0$ es singular regular, con $r=\pm 1$. Sus soluciones para $s>0$ son:

$$y_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_k s^{k+1}=c_0 s+c_1 s^2+\cdots\ ,\ c_0\neq 0\ ;\ \ y_2=\sum_{k=0}^{\infty}b_k s^{k-1}+dy_1\ln s\ ,\ b_0\neq 0\ .$$

Si $s\to 0^+$, la solución $y_1\to 0$, mientras que la $y_2\to\infty$ (si $b_0>0$, sea $d=0$ ó $d\neq 0$), con lo que deducimos, sin necesidad de resolver nada, que hay soluciones de la ecuación inicial que, cuando $x\to\infty$, tienden a 0, mientras que otras tienden a ∞.

Como la ecuación es resoluble elementalmente pues $y_1=x$ es solución que salta a la vista, podemos en este caso concreto hallar su solución general y comprobar:

$$y_2=x\int x^{-2}e^{-\int a dx}dx=x\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}=-\sqrt{1+x^2}\ \to\ y=c_1x+c_2\sqrt{1+x^2}\ .$$

Hay soluciones que claramente $\to\infty$ y las de la forma $C(x-\sqrt{1+x^2})=\frac{-C}{x+\sqrt{1+x^2}}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}0$.

De paso observemos que $y_1=x=\frac{1}{s}$ es la y_2 que obtendríamos arriba (es $d=0$).

Para Hermite y Bessel este camino parece adecuado para estudiar sus soluciones para x gordo, pero por desgracia, se comprueba que $s=0$ en ambos casos es singular no regular. Aunque para **Legendre** lo interesante físicamente es lo que sucede en $[-1,1]$, vamos a analizar su punto del infinito. En 2.3 obtuvimos sus series solución en torno a $x=0$ [que hablan sólo de lo que ocurre en $|x|<1$] y en torno a $x=1$ [hablan de $x\in(-1,3)$].

$$[\mathrm{L}]\ (1-x^2)y''-2xy'+py=0\ \xrightarrow{x=1/s}\ [\mathrm{L}_\infty]\ s^2(s^2-1)\ddot y+2s^3\dot y+py=0\ .$$

Para $[\mathrm{L}_\infty]$ es $s=0$ singular regular, con $a^*(s)=2s^2/(s^2-1)$, $b^*(s)=p/(s^2-1)$ analíticas en $|s|<1$. Las series solución de $[\mathrm{L}_\infty]$ convergerán al menos en ese intervalo y de ellas podremos extraer información, por tanto, sobre las soluciones de [L] para $|x|>1$. Como el polinomio indicial de $[\mathrm{L}_\infty]$ tiene para todo $p\geq 0$ una raíz $r_1=\frac{1}{2}\big[1+\sqrt{1+4p}\,\big]>0$ deducimos, por ejemplo, que siempre hay soluciones de [L] que tienden a 0 para $x\to\infty$.

$$\Big[\text{Pues } y_1(s)=s^{r_1}\sum_{k=0}^{\infty}c_k s^k\to 0 \text{ si } s\to 0^+\text{, o sea, } y_1(x)=x^{-r_1}\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^{-k}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}0\ \Big].$$

Resolvamos por series $[\mathrm{L}_\infty]$ si $p=0$ (único p para el que $s=0$ es regular): $y=\sum_{k=0}^{\infty}c_k s^k\to$

$$c_k=\tfrac{k-2}{k}c_{k-2}\ ,\ k=2,3,\ldots\to y=c_0+c_1[s+\tfrac{1}{3}s^3+\tfrac{1}{5}s^5+\cdots]=c_0+c_1[x^{-1}+\tfrac{1}{3}x^{-3}+\tfrac{1}{5}x^{-5}+\cdots]\ ,$$

serie (no de potencias) que describe las soluciones para $|x|>1$, que es donde converge.

De otro modo: $(1-x^2)y''+2xy'=0\to y'=\frac{c_1}{1-x^2}\to\ y=c_0+c_1\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|=c_0+c_1\ln\left|\frac{1+s}{1-s}\right|,\ x,s\neq\pm 1$.