

3. Problemas de contorno para EDOs

Un problema de valores iniciales para una EDO lineal con coeficientes continuos tenía solución única. En concreto, quedaba determinada la solución de una lineal de orden dos fijando el valor de la solución y de su derivada en un punto dado. Las cosas cambian si imponemos las condiciones en los dos extremos de un intervalo $[a, b]$. Esos **problemas de contorno** presentan propiedades muy diferentes. Por ejemplo, es fácil comprobar que tiene infinitas soluciones un problema tan sencillo y regular como

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = 0 \\ y(0) = 0, y(\pi) = 0 \end{cases} \rightarrow y = C \operatorname{sen} x, \text{ con } C \text{ constante arbitraria.}$$

Los problemas de contorno que nos aparecerán insistentemente al utilizar el método de **separación de variables** del capítulo 4 dependerán de un parámetro λ . Para precisar y probar algunas de sus propiedades se deberán reescribir las ecuaciones más generales en la siguiente forma (llamada autoadjunta):

$$(P) \begin{cases} (py')' - qy + \lambda ry = 0 \\ \alpha y(a) - \alpha' y'(a) = \beta y(b) + \beta' y'(b) = 0 \end{cases}$$

Ante un problema como (P), para el que $y=0$ es siempre solución trivial, nuestro objetivo (que no siempre alcanzaremos) será **hallar los valores de λ para los que tiene soluciones no triviales** [que se denominan **autovalores** de (P)] y esas **soluciones no triviales** asociadas a cada λ [sus **autofunciones**]. Observemos que, por ser lineales y homogéneas la ecuación y ambas condiciones de contorno, si $y(x)$ es solución de (P) también, para cualquier C , lo es $Cy(x) \equiv \{y(x)\}$. La notación y lenguaje algebraicos son abundantes en esta teoría.

Comenzaremos en 3.1 estudiando ejemplos con variadas condiciones de contorno para la ecuación $y'' + \lambda y = 0$ (la más sencilla y la que más veces aparece separando variables). En ellos aparecerá una sucesión infinita λ_n de autovalores y las autofunciones $\{y_n\}$ asociadas a λ_n distintos serán **ortogonales** entre sí. Después precisaremos para qué tipo de problemas de contorno (P) más generales se mantienen esas propiedades. Serán los que se llaman **problemas de Sturm-Liouville separados**. Veremos ejemplos más complicados para mostrar las dificultades que pueden darse y hablaremos brevemente también de los problemas **periódicos** y de los **singulares**.

En la sección 3.2 aseguraremos que cualquier función f continua y derivable a trozos se podrá escribir como una **serie de Fourier** (una **suma infinita de autofunciones** $\{y_n\}$ de un problema de Sturm-Liouville). Esto será muy útil en la resolución de EDPs. Como caso particular trataremos con algún detalle más los desarrollos de Fourier en **senos y cosenos**. Aunque la convergencia natural de estas series sea la llamada 'convergencia en media', nosotros nos limitaremos a hablar de convergencia puntual y uniforme.

Separando variables en la ecuación de Laplace y otras similares aparecerán, además de problemas de Sturm-Liouville homogéneos, otros problemas de contorno con la ecuación o alguna condición de contorno **no homogéneas**. Por eso, estudiaremos problemas de ese tipo en 3.3. Para ellos, ni $y=0$ es solución, ni lo son los múltiplos de una solución dada. La existencia de soluciones dependerá de si existen o no soluciones no triviales del problema homogéneo. Tendrán solución única en el último caso, e infinitas o ninguno si el homogéneo tiene infinitas.

La notación en todo este capítulo será $y(x)$, pero en separación de variables las funciones de nuestros problemas de contorno serán $X(x), Y(y), R(r), \Theta(\theta), \dots$

3.1. Problemas de Sturm-Liouville homogéneos

Antes de dar la teoría general, hallemos los **autovalores** y **autofunciones** (es decir, busquemos sus soluciones no triviales) de dos problemas de contorno homogéneos para la sencilla EDO lineal $y'' + \lambda y = 0$.

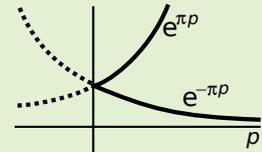
Ya que su polinomio característico es $\mu^2 + \lambda = 0 \rightarrow \mu = \pm \sqrt{-\lambda}$, la solución general de la ecuación será diferente según la constante λ sea menor, igual ó mayor que 0.

Ej 1. $(P_1) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0, y(\pi) = 0 \end{cases}$ Imponemos las condiciones de contorno en cada caso:

Si $\lambda < 0$ la solución general es $y = c_1 e^{\rho x} + c_2 e^{-\rho x}$, con $\rho = \sqrt{-\lambda} > 0$.

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 = 0 \\ y(\pi) = c_1 e^{\pi\rho} + c_2 e^{-\pi\rho} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_2 = -c_1 \\ c_1 [e^{\pi\rho} - e^{-\pi\rho}] = 0 \end{cases}$$

Por tanto $c_1 = c_2 = 0$ (pues $e^{\pi\rho} \neq e^{-\pi\rho}$ para $\rho > 0$). Para ningún ρ existen soluciones no triviales y ningún $\lambda < 0$ es autovalor.



Si $\lambda = 0$ es $y = c_1 + c_2 x \rightarrow \begin{cases} y(0) = c_1 = 0 \\ y(\pi) = c_1 + c_2 \pi = 0 \end{cases} \rightarrow y \equiv 0$. $\lambda = 0$ tampoco es autovalor.

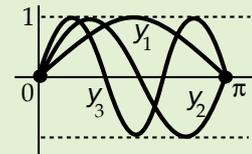
Y para $\lambda > 0$ es $y = c_1 \cos wx + c_2 \sin wx$, llamando $w = \sqrt{\lambda} > 0 \rightarrow \begin{cases} y(0) = c_1 = 0 \\ y(\pi) = c_2 \sin w\pi = 0 \end{cases}$

Para tener solución no trivial debe ser $c_2 \neq 0$.

Lo será si el seno es cero: $w\pi = \pi\sqrt{\lambda} = n\pi \rightarrow \lambda_n = n^2, n = 1, 2, \dots$

Para cada uno de estos λ_n hay soluciones no triviales

$$y_n = c_2 \sin nx \equiv \{\sin nx\}.$$



Observemos que se cumple para $m \neq n$: $\int_0^\pi \sin nx \sin mx dx = 0$,

$$\text{pues } \frac{1}{2} \int_0^\pi [\cos(n-m)x - \cos(n+m)x] dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n-m)x}{n-m} - \frac{\sin(n+m)x}{n+m} \right]_0^\pi = 0.$$

(P_1) tiene una **sucesión infinita de autovalores** $\lambda_n = n^2, n = 1, 2, \dots$. Las **autofunciones** $y_n = \{\sin nx\}$ asociadas a cada λ_n constituyen un **espacio vectorial de dimensión 1**. La **n -sima autofunción posee $n-1$ ceros en el intervalo $(0, \pi)$** . **Autofunciones distintas son ortogonales en $[0, \pi]$** [respecto del **producto escalar** $\langle u, v \rangle = \int_0^\pi u v dx$].

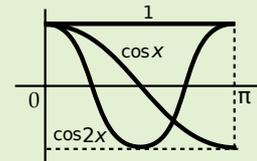
Ej 2. $(P_2) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = y'(\pi) = 0 \end{cases}$ Imponemos las nuevas condiciones a las soluciones de arriba:

$\lambda < 0 \rightarrow \begin{cases} y'(0) = \rho[c_1 - c_2] = 0 \\ y'(\pi) = \rho[c_1 e^{\pi\rho} - c_2 e^{-\pi\rho}] = 0 \end{cases} \rightarrow c_2 = c_1 \rightarrow c_1 \rho [e^{\pi\rho} - e^{-\pi\rho}] = 0 \rightarrow y \equiv 0$.

$\lambda = 0 \rightarrow \begin{cases} y'(0) = c_2 = 0 \\ y'(\pi) = c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda = 0$ autovalor con autofunción $y_0 = c_1 = \{1\}$.

$\lambda > 0 \rightarrow \begin{cases} y'(0) = w c_2 = 0 \\ y'(\pi) = -w c_1 \sin w\pi = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = n^2, y_n = c_1 \cos nx$.

Los $\lambda_n = n^2$ y las $y_n = \{\cos nx\}, n = 0, 1, 2, \dots$ (se suelen escribir así, poniendo $\{1\}$ como el caso particular $\{\cos 0\}$) poseen las mismas propiedades resaltadas para el problema anterior.



Por ejemplo, la autofunción que ocupa el lugar n se anula $n-1$ veces y continúa habiendo ortogonalidad $\langle y_n, y_m \rangle = 0$, cualesquiera que sean m y n distintos (0 incluido):

$$\int_0^\pi \cos nx \cos mx dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi [\cos(n-m)x + \cos(n+m)x] dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n-m)x}{n-m} + \frac{\sin(n+m)x}{n+m} \right]_0^\pi = 0.$$

[No es 0 la integral, desde luego, si $m = n$: $\int_0^\pi 1^2 dx = \pi, \int_0^\pi \cos^2 nx dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi [1 + \cos 2nx] dx = \frac{\pi}{2}$].

Pasemos a tratar ya el problema general. Consideremos la ecuación lineal de segundo orden que depende de un parámetro real λ :

$$y'' + a(x)y' + b(x)y + \lambda c(x)y = 0, \text{ con } a, b, c \in C[a, b], \text{ } c(x) > 0 \text{ en } [a, b].$$

Para estudiar y probar sus propiedades (no para resolverla) se reescribe de otra forma, que se suele llamar '**autoadjunta**' o '**Sturm-Liouville**', con todas las derivadas en un único término. Multiplicando todo por $e^{\int a}$ y agrupando los dos primeros sumandos:

$$[e^{\int a} y']' + b e^{\int a} y + \lambda c e^{\int a} y \equiv [p y']' - q y + \lambda r y = 0, \text{ con } p \in C^1, q, r \in C, p, r > 0.$$

Las condiciones que más nos van a interesar son las condiciones **separadas** (cada una afecta a los valores de y o de y' sólo en uno de los extremos del intervalo):

Se llama **problema de Sturm-Liouville separado regular** a uno del tipo:

$$(P_s) \begin{cases} [p y']' - q y + \lambda r y = 0 \\ \alpha y(a) - \alpha' y'(a) = 0, \beta y(b) + \beta' y'(b) = 0 \end{cases} \text{ (condiciones separadas)}$$

donde $p \in C^1[a, b], q, r \in C[a, b], p, r > 0$ en $[a, b], |\alpha| + |\alpha'|, |\beta| + |\beta'| \neq 0$.

[La función que más aparecerá será la r que acompaña a λ e y , **peso** del producto escalar].

[Las últimas condiciones simplemente dicen que α y $|\alpha'|, |\beta|$ y $|\beta'|$ no se anulan a la vez].

Los ejemplos 1 y 2 eran unos (P_s) . Este teorema generaliza sus propiedades:

Teor 1.

Los autovalores de (P_s) son una sucesión infinita $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$ que tiende a ∞ . Las autofunciones $\{y_n\}$ forman un espacio vectorial de dimensión 1 para cada n y cada y_n posee exactamente $n-1$ ceros en el intervalo (a, b) . Las autofunciones asociadas a autovalores diferentes son ortogonales en $[a, b]$ respecto al peso r , es decir:

$$(y_n, y_m) \equiv \int_a^b r y_n y_m dx = 0, \text{ si } y_n, y_m \text{ están asociadas a } \lambda_n \neq \lambda_m.$$

Si $\alpha\alpha', \beta\beta' \geq 0$ y $q(x) \geq 0$ en $[a, b]$ entonces todos los autovalores $\lambda_n \geq 0$. En particular, para $y(a)=y(b)=0$ [o sea, si $\alpha'=\beta'=0$] todos los $\lambda_n > 0$.

No probamos la primera afirmación y la de los ceros que son difíciles. Sí el resto.

Si y cumple (P_s) : $y'(a) = \frac{\alpha}{\alpha'} y(a), \alpha' \neq 0$; $y'(b) = -\frac{\beta}{\beta'} y(b), \beta' \neq 0$

[y es $y(a)=0$, si $\alpha'=0$; $y(b)=0$, si $\beta'=0$].

Si y, y^* están asociadas al mismo λ , se deduce que dependen linealmente, pues su wronskiano se anula en a (o también en b):

$$|W|(y, y^*)(a) = y y^{*'} - y' y^* |_{x=a} = 0, \text{ si } \alpha' = 0 \text{ o si } \alpha' \neq 0.$$

Sean ahora y_n, y_m asociadas, respectivamente, a λ_n y λ_m :

$$\left. \begin{aligned} \lambda_n r y_n &= -[p y_n']' + q y_n \\ \lambda_m r y_m &= -[p y_m']' + q y_m \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Multiplicando por } y_m \text{ e } y_n, \\ \text{restando e integrando:} \end{array}$$

$$[\lambda_n - \lambda_m] \int_a^b r y_n y_m dx = \int_a^b [y_n (p y_m')' - y_m (p y_n')'] dx \stackrel{\text{partes}}{=} [p (y_n y_m' - y_m y_n')]_a^b = 0,$$

ya que $|W|(y_n, y_m) = 0$ en a y en b . Por tanto, si $\lambda_n \neq \lambda_m$ se tiene que $(y_n, y_m) = 0$.

Si y es la autofunción asociada a λ y $\alpha\alpha' \geq 0, \beta\beta' \geq 0, q \geq 0$ entonces

$$\lambda \int_a^b r y^2 dx = \int_a^b [-y (p y')' + q y^2] dx = \int_a^b [p (y')^2 + q y^2] dx - [p y y']_a^b \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq 0,$$

$$\text{pues } \int_a^b r y^2 dx > 0 \text{ (} r > 0 \text{)}, \int_a^b [p (y')^2 + q y^2] dx \geq 0 \text{ (} p > 0, q \geq 0 \text{)},$$

$$-[p y y']_a^b = \begin{cases} \frac{\beta}{\beta'} p(b) [y(b)]^2 \geq 0 & \text{si } \beta' \neq 0 \\ 0 & \text{si } \beta' = 0 \end{cases}, \quad [p y y']_a^b = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha'} p(a) [y(a)]^2 \geq 0 & \text{si } \alpha' \neq 0 \\ 0 & \text{si } \alpha' = 0 \end{cases}.$$

Si $y(a)=y(b)=0, y = \{1\}$ no es autofunción $\Rightarrow y' \neq 0 \Rightarrow \int_a^b p (y')^2 > 0 \Rightarrow \lambda > 0$.

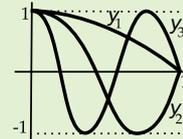
Ej 3. $(P_3) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = y(1) = 0 \end{cases}$ (está ya en forma autoadjunta: $[y']' + \lambda y = 0$ y es $r \equiv 1$).

Tendrá las propiedades del teorema 1. Hallemos sus λ_n . Como $\alpha\alpha' = \beta\beta' = 0$, $q \equiv 0$, nos limitamos a los $\lambda \geq 0$. [Ahora sabemos que podíamos haber hecho esto en el ejemplo 2, y que en el 1 hubieran bastado los $\lambda > 0$; que conste que **hay problemas con $\lambda < 0$**].

$$\lambda = 0: y = c_1 + c_2 x \rightarrow \begin{cases} y'(0) = c_2 = 0 \\ y(1) = c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow y \equiv 0. \lambda = 0 \text{ no es autovalor.}$$

$$\lambda > 0: y = c_1 \cos wx + c_2 \sin wx. y'(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0 \rightarrow y(1) = c_1 \cos w = 0 \\ \rightarrow w_n = \frac{2n-1}{2}\pi, \lambda_n = \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4}, y_n = \left\{ \cos \frac{2n-1}{2}\pi x \right\}, n = 1, 2, \dots$$

El teorema asegura que las $\{y_n\}$ son ortogonales: $\int_0^1 y_n y_m dx = 0, n \neq m$ (sería fácil comprobarlo), y que la autofunción n -sima (como le ocurre a las tres dibujadas) tiene $n-1$ ceros en $(0, 1)$.



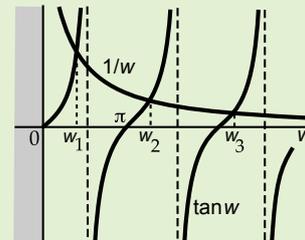
Ej 4. $(P_4) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = y'(1) + y(1) = 0 \end{cases}$ Como es $\alpha\alpha' = 0, \beta\beta' = 1 > 0, q \equiv 0$, volvemos a estudiar sólo los $\lambda \geq 0$.

$$\lambda = 0: y = c_1 + c_2 x \rightarrow \begin{cases} y'(0) = c_2 = 0 \\ y'(1) + y(1) = c_1 + 2c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow y \equiv 0. \lambda = 0 \text{ no autovalor.}$$

$$\lambda > 0: y = c_1 \cos wx + c_2 \sin wx. y'(0) = wc_2 = 0 \rightarrow y'(1) + y(1) = c_1[\cos w - w \sin w] = 0.$$

No podemos hallar exactamente los λ_n , pero tan $w_n = \frac{1}{w_n}$ lo cumplen infinitos w_n (anulan el corchete infinitos w_n), que sólo se pueden calcular aproximadamente. Para cada $\lambda_n = w_n^2$ la autofunción y_n es $\{\cos w_n x\}$. Las y_n serán ortogonales.

[La mayoría de los problemas de S-L no son resolubles, pues pocas lineales de orden dos lo son elementalmente (coeficientes constantes y pocas más), y aunque lo sean puede ocurrir lo que en este ejemplo].



Ej 5. $(P_5) \begin{cases} y'' - 2y' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = y'(1) = 0 \end{cases} \rightarrow \mu^2 - 2\mu + \lambda = 0, \mu = 1 \pm \sqrt{1-\lambda}. [e^{-2x}y']' + \lambda e^{-2x}y = 0.$

Sabemos que los $\lambda \geq 0$, pero esto no ahorra cálculos, pues tenemos que mirar $\lambda <, =, > 1$:

$$\lambda < 1: y = c_1 e^{(1+p)x} + c_2 e^{(1-p)x}, y' = c_1(1+p)e^{(1+p)x} + c_2(1-p)e^{(1-p)x}, p = \sqrt{1-\lambda} \rightarrow \\ \begin{cases} c_1[1+p] + c_2[1-p] = 0 \\ c_1[1+p]e^{1+p} + c_2[1-p]e^{1-p} = 0 \end{cases} \rightarrow c_2(1-p)e[e^{-p} - e^p] = 0 \rightarrow p = 1 (\lambda = 0), y_0 = \{1\}.$$

$$\lambda = 1: y = [c_1 + c_2 x] e^x, y' = [c_1 + c_2 + c_2 x] e^x \rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + 2c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow y \equiv 0. \lambda = 1 \text{ no autovalor.}$$

$$\lambda > 1: y = [c_1 \cos wx + c_2 \sin wx] e^x, w = \sqrt{\lambda-1} \rightarrow y'(0) = c_1 + c_2 w = 0 \rightarrow \\ y' = [(c_1 + c_2 w) \cos wx + (c_2 - c_1 w) \sin wx] e^x \rightarrow y'(1) = c_2 e(1+w^2) \sin w = 0 \rightarrow$$

$$w = n\pi, n = 1, 2, \dots \rightarrow \lambda_n = 1 + n^2 \pi^2, y_n = \{e^x [\sin n\pi x - n\pi \cos n\pi x]\}, n = 1, 2, \dots$$

Las autofunciones serán aquí **ortogonales respecto al peso** $r(x) = e^{-2x}$:

$$\langle 1, y_n \rangle = \int_0^1 e^{-x} [\sin n\pi x - n\pi \cos n\pi x] dx = \dots = 0$$

$$\langle y_n, y_m \rangle = \int_0^1 [\sin n\pi x - n\pi \cos n\pi x] [\sin m\pi x - m\pi \cos m\pi x] dx = \dots = 0 \quad (m \neq n)$$

Ej 6. $(P_6) \begin{cases} x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0 \\ y(1) = y(e) = 0 \end{cases}$ $p(x) = e^{\int a} = e^{\int \frac{dx}{x}} = x \rightarrow [xy']' + \lambda \frac{y}{x} = 0$. Peso $r(x) = \frac{1}{x}$. Es problema separado regular ($p, r > 0$ en $[1, e]$).

Es ecuación de Euler con $r(r-1) + r + \lambda = 0 \rightarrow r = \pm \sqrt{-\lambda}$. Y basta mirar los $\lambda > 0$:

$$y = c_1 \cos(w \ln x) + c_2 \sin(w \ln x), \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 \sin w = 0 \end{cases} \lambda_n = n^2 \pi^2, y_n = \{\sin(n\pi \ln x)\}, n = 1, 2, \dots$$

Como siempre, las autofunciones son ortogonales: $\int_1^e \frac{\sin(n\pi \ln x) \sin(m\pi \ln x)}{x} dx = 0, m \neq n$.

Separando variables aparecerán también (por ejemplo resolviendo Laplace en un círculo) problemas de contorno como el siguiente, que no es separado, pues sus condiciones de contorno mezclan los valores en los dos extremos del intervalo. En concreto, resolvamos este **problema periódico**:

Ej 7. $(P_7) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(-\pi) = y(\pi), y'(-\pi) = y'(\pi) \end{cases}$ [Estas condiciones para las soluciones de la EDO **equivalen a pedir que y sea 2π -periódica**].

$\lambda < 0 \rightarrow \begin{cases} c_1[e^{\pi p} - e^{-\pi p}] - c_2[e^{\pi p} - e^{-\pi p}] = 0 \\ c_1[e^{\pi p} - e^{-\pi p}] + c_2[e^{\pi p} - e^{-\pi p}] = 0 \end{cases}$. Como $\begin{vmatrix} e^{\pi p} - e^{-\pi p} & e^{-\pi p} - e^{\pi p} \\ e^{\pi p} - e^{-\pi p} & e^{\pi p} - e^{-\pi p} \end{vmatrix} = 2(e^{\pi p} - e^{-\pi p})^2 \neq 0$, cuando $p > 0$, el sistema sólo tiene la solución trivial $c_1 = c_2 = 0$, por ser no nulo el determinante de los coeficientes. No hay, por tanto, autovalores negativos.

$\lambda = 0 \rightarrow \begin{cases} c_1 - c_2\pi = c_1 + c_2\pi \\ c_2 = c_2 \end{cases}$ se satisface para $c_2 = 0$ y cualquier c_1 : $y_0 = c_1 = \{1\}$.

$\lambda > 0 \rightarrow \begin{cases} 2c_2 \operatorname{sen} \pi w = 0 \\ 2c_1 w \operatorname{sen} \pi w = 0 \end{cases} \rightarrow \operatorname{sen} \pi w = 0 \rightarrow \lambda_n = n^2, n = 1, 2, \dots$

Para esos autovalores λ_n los datos de contorno se cumplen para todo c_1 y todo c_2 . Las autofunciones son, pues: $y_n = c_1 \cos nx + c_2 \operatorname{sen} nx \equiv \{\cos nx, \operatorname{sen} nx\}$.

[Es claro que exigir simplemente que y sea 2π -periódica lleva directamente a los mismos autovalores y autofunciones].

Las propiedades de (P_7) son algo distintas de las los problemas separados: sigue habiendo una **sucesión infinita de autovalores** $\lambda_n = n^2, n = 0, 1, 2, \dots$ que tiende a ∞ , pero **las autofunciones** $y_0 = \{1\}, y_n = \{\cos nx, \operatorname{sen} nx\}$ **forman ahora un espacio vectorial de dimensión 2** (cuando $n > 0$). Utilizando $\operatorname{sen} a \cos b = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)]$ (y otras relaciones trigonométricas ya vistas) se comprueba que siguen siendo las **autofunciones diferentes ortogonales** entre sí.

Los problemas de Sturm-Liouville pueden generalizarse. Demos alguna idea sobre ello.

En la prueba del teorema se aprecia que lo básico para la ortogonalidad es que $[\rho|W|(y_n, y_m)]_a^b = 0$. Esto puede suceder para otros tipos de condiciones de contorno (y para otros muchos no) además de nuestras separadas.

Por ejemplo ocurre en los llamados problemas **periódicos** que generalizan el (P_7) :

$$(P_p) \begin{cases} [py']' - qy + \lambda ry = 0, \text{ con } p(a) = p(b), p \in C^1[a, b], q, r \in C[a, b], p, r > 0 \text{ en } [a, b] \\ y(a) = y(b), y'(a) = y'(b) \text{ (condiciones periódicas)} \end{cases}$$

Para (P_p) no se anula el wronskiano de dos soluciones ni en a ni en b (y por eso hay espacios de autofunciones de dimensión 2), pero es claro que $[\rho|W|(y_n, y_m)](b) = [\rho|W|(y_n, y_m)](a)$.

Más en general, se llaman **problemas autoadjuntos** aquellos tales que $[\rho|W|(u, v)]_a^b = 0$ para todo par de funciones u, v que cumplan sus condiciones de contorno.

Las y_n de los problemas autoadjuntos (que en libros avanzados se prueba que tienen propiedades similares a las vistas) son, pues, ortogonales. Pero no nos ocupamos más de ellos, pues todos los problemas que nos aparecerán en el capítulo 4 serán todos separados (o el (P_7) de arriba).

[El término 'autoadjunto' se debe a que si llamamos $L[y] = -[py']' + qy$, la ecuación adopta el aire algebraico $L[y] = \lambda ry$. Denotando $(u, v) = \int_a^b uv dx$, se cumple $(L[u], v) = (u, L[v])$ para todo par de funciones u, v que satisfacen las condiciones de contorno. El operador L es 'autoadjunto' en ese conjunto de funciones].

Ej 8. $(P_8) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(\pi), y'(0) = -y'(\pi) \end{cases}$ Se tiene $[\rho|W|(u, v)](\pi) = -[\rho|W|(u, v)](0)$.

El problema, pues, no es autoadjunto. Operando como en el ejemplo 7 es fácil ver que las cosas son muy diferentes: cualquier λ (menor, igual o mayor que 0) es autovalor (asociado, respectivamente, a $\{\operatorname{ch}[\rho(x - \frac{\pi}{2})]\}, \{1\}$ ó $\{\cos[w(x - \frac{\pi}{2})]\}$) y en general es falso que las autofunciones asociadas a λ distintos sean ortogonales.

Resolviendo algunas EDPs aparecerán **problemas singulares** de Sturm-Liouville que no reúnen todas las condiciones de los regulares: p ó r se anulan o no son continuas en algún extremo del intervalo, el intervalo es infinito... Resolvamos tres de ellos (el 9 surge, por ejemplo, tratando ondas o calor en el espacio, el 10 si esas ecuaciones son en el plano y el 11 para Laplace en la esfera), en los que en uno o ambos extremos es $p=0$. En esos extremos las condiciones de contorno de un (P_s) son demasiado fuertes para tener autovalores y autofunciones como en los regulares y se sustituyen por **acotación**, de forma que siga habiendo ortogonalidad, es decir, según vimos en la demostración del teorema 1, que se cumpla:

$$0 = [p(y_n y'_m - y_m y'_n)]_a^b = (\lambda_n - \lambda_m) \langle y_n, y_m \rangle .$$

Ej 9. $(P_9) \begin{cases} xy'' + 2y' + \lambda xy = 0 \\ y \text{ acotada en } x=0, y(1)=0 \end{cases} \quad y'' + \frac{2}{x}y' + \lambda y = 0 \xrightarrow{e^{\int a=x^2}} [x^2 y']' + \lambda x^2 y = 0 .$

Haciendo el cambio $u = xy$ la ecuación se convierte en la muy conocida $u'' + \lambda u = 0 \rightarrow$ la solución general de la inicial para $\lambda > 0$ será $y = c_1 \frac{\cos wx}{x} + c_2 \frac{\sen wx}{x}$, con $w = \sqrt{\lambda}$.

y acotada en $x=0 \rightarrow c_1 = 0$ (pues si $x \rightarrow 0^+$, $\frac{\cos wx}{x} \rightarrow \infty$, mientras que $\frac{\sen wx}{x} \rightarrow w$).

Imponiendo ahora $y(1) = 0 \rightarrow \sen w = 0 \rightarrow \lambda_n = n^2 \pi^2, n = 1, 2, \dots, y_n = \left\{ \frac{\sen n\pi x}{x} \right\}$

[autofunciones ortogonales, como es fácil comprobar, respecto al peso $r(x) = x^2$].

Es fácil ver directamente que no existen $\lambda \leq 0$, o podemos evitar las cuentas pues la prueba de esa parte del teorema se puede adaptar a este problema singular, con lo que $\lambda > 0$.

[También se podría haber observado que las condiciones que quedan tras el cambio son $u(0) = 0 \cdot y(0) = 0, u(1) = 1 \cdot 0 = 0 \rightarrow u_n = \{\sen n\pi x\}$, y haber deshecho el cambio].

[Si hubiésemos impuesto $y(0) = 0, y(1) = 0$, la única solución sería $y \equiv 0 \forall \lambda$; las condiciones para este problema singular habrían sido demasiado fuertes].

Ej 10. $(P_{10}) \begin{cases} xy'' + y' + \lambda xy = 0 \\ y \text{ acotada en } x=0, y(1)=0 \end{cases} \rightarrow [xy']' + \lambda xy = 0 .$

Se puede probar que $\lambda > 0$. Haciendo el cambio de variable independiente $s = \sqrt{\lambda} x = wx$ [$y' = w \frac{dy}{ds}, y'' = w^2 \frac{d^2 y}{ds^2}$], la ecuación se convierte en la de Bessel de orden 0:

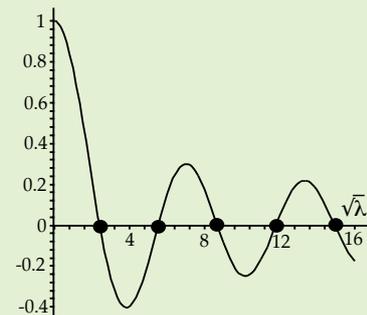
$$s \frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{dy}{ds} + sy = 0 \rightarrow y = c_1 J_0(s) + c_2 K_0(s) = c_1 J_0(wx) + c_2 K_0(wx) .$$

La primera condición de contorno impone que $c_2 = 0$ (pues K_0 no está acotada en $x = 0$). De la otra se deduce que $c_1 J_0(w) = 0$. Así pues, los autovalores son los $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ cuyas raíces son los infinitos ceros w_n de J_0

[$w_1 \approx 2.40, w_2 \approx 5.52, w_3 \approx 8.65, \dots, w_n \approx (n - \frac{1}{4})\pi$ si n grande].

Para estos $\lambda_n = w_n^2$ sus autofunciones son $y_n = \{J_0(w_n x)\}$, ortogonales respecto al peso $r(x) = x$.

Parece complicado, pero en el fondo no es muy distinto del primer ejemplo que vimos. Allí las w_n eran los ceros de un seno. Aquí son los de la una función simplemente menos famosa.



Ej 11. $(P_{11}) \begin{cases} [(1-x^2)y']' + \lambda y = 0 \\ y \text{ acotada en } x = \pm 1 \end{cases}$ La ecuación es la de Legendre con λ en vez de p .

Sabemos que sus únicas soluciones acotadas a la vez en 1 y en -1 son los polinomios de Legendre $P_n(x)$, y que estos aparecen cuando $\lambda = n(n+1), n = 0, 1, 2, \dots$

$$P_0 = 1, P_1 = x, P_2 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, P_3 = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x, \dots$$

Los autovalores son pues $\lambda_n = n(n+1), n = 0, 1, 2, \dots$ y las autofunciones son los $\{P_n\}$, que cumplen, como dijimos en 2.3: $\int_{-1}^1 P_n P_m dx = 0$ si $m \neq n, \int_{-1}^1 P_n^2 dx = \frac{2}{2n+1} [r(x) = 1]$.

3.2. Series de Fourier

Consideremos el problema de Sturm-Liouville separado regular:

$$(P_s) \begin{cases} [py']' - qy + \lambda ry = 0 \\ \alpha y(a) - \alpha' y'(a) = 0, \beta y(b) + \beta' y'(b) = 0 \end{cases}$$

y sean $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ sus autofunciones asociadas a los $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$

La importante propiedad que veremos en esta sección es que **cualquier función f suficientemente regular en $[a, b]$ puede ser desarrollada en serie de dichas autofunciones**, es decir:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x)$$

Supongamos que este desarrollo es válido y que la serie puede ser integrada término a término. Entonces, por ser las y_n ortogonales:

$$\int_a^b r f y_m dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b r y_n y_m dx = c_m \int_a^b r y_m^2 dx$$

Así pues, representando como en 3.1 el producto escalar respecto al peso $r(x)$ por:

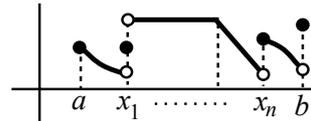
$$\langle u, v \rangle = \int_a^b r u v dx \quad \text{debe ser} \quad c_n = \frac{\langle f, y_n \rangle}{\langle y_n, y_n \rangle}, \quad n=1, 2, \dots$$

[El r es el de la ecuación en forma autoadjunta. En la mayoría de los problemas que aparecerán separando variables en el capítulo 4 dicho peso será 1, pero no siempre].

El problema (nada elemental) reside en precisar para qué funciones f la serie que tiene esos coeficientes (llamada **serie de Fourier de f** en esa familia de autofunciones) converge realmente hacia f en $[a, b]$. Aunque se le pueden exigir condiciones más débiles, nosotros pediremos a f que sea C^1 a trozos, condición que será satisfecha por las funciones que nos aparecerán en los problemas prácticos.

[Se dice que una f es C^1 a trozos en $[a, b]$ si podemos dividirlo en subintervalos $[a, b] = [a, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_n, b]$ de modo que:

- i. f y f' son continuas en cada (x_k, x_{k+1}) ,
- ii. los límites laterales de f, f' en cada x_k existen (son finitos)].



Teor 1. Si f es C^1 a trozos en $[a, b]$ entonces su serie de Fourier:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, y_n \rangle}{\langle y_n, y_n \rangle} y_n(x)$$

converge hacia $f(x)$ en los $x \in (a, b)$ en que f es continua y hacia $\frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)]$ en los $x \in (a, b)$ en que es discontinua.

[El teorema **no dice nada sobre la convergencia en los extremos a y b** y, en general, no sabremos decir lo que ocurre en ellos. Sí lo sabremos en el caso particular de la series ‘en senos’, ‘en cosenos’ y ‘en senos y cosenos’ que pronto veremos].

[La demostración es difícil y la omitimos. En lenguaje de ‘análisis funcional’, las $\{y_n\}$ son una ‘base de Fourier’ del espacio de funciones de dimensión infinita (similar a una base ortonormal de uno de dimensión finita). La cuestión principal es ver que la base es ‘completa’, es decir, que no hay otras funciones ortogonales a las $\{y_n\}$. El espacio ‘natural’ para estudiar las series de Fourier es L^2 (funciones de cuadrado integrable) y la convergencia más ligada a ellas es la ‘convergencia en media cuadrática’:

$$\int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=1}^n c_k y_k(x) \right|^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty]$$

Caso particular de los desarrollos en serie de Fourier son los **desarrollos en series trigonométricas**, que, al ser los que más utilizaremos, estudiamos con detalle.

Para $(P_1) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(L) = 0 \end{cases}$ son $\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}$ y las autofunciones $y_n = \left\{ \sin \frac{n\pi x}{L} \right\}$, $n = 1, 2, \dots$

[Sale fácil directamente, o con $s = \frac{\pi x}{L} \rightarrow y'' + \frac{L^2}{\pi^2} \lambda y = 0$, $y(0) = y(\pi) = 0$ en la variable s , que es casi el ejemplo 1 de 3.1. También conviene trasladar con $s = x - a$ un problema en $[a, b]$ al (P_1) (con $L = b - a$), sin necesidad de estudiarlo desde el principio].

Llamaremos **serie de Fourier en senos** en $[0, L]$ de f al desarrollo en estas $\{y_n\}$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \text{ con } b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, n = 1, 2, \dots \quad [s]$$

Puesto que el peso $r(x) \equiv 1$ y es $\langle y_n, y_n \rangle = \int_0^L \left[\sin \frac{n\pi x}{L} \right]^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L \left[1 - \cos \frac{2n\pi x}{L} \right] dx = \frac{L}{2}$.

Se llamará **serie de Fourier en cosenos** en $[0, L]$ de una f dada al desarrollo en las autofunciones de este segundo problema de contorno:

$$(P_2) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = y'(L) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, y_n = \left\{ \cos \frac{n\pi x}{L} \right\}, n = 0, 1, \dots [y_0 = \{1\}]$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \text{ con } a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, n = 0, 1, 2, \dots \quad [c]$$

Pues $\langle y_0, y_0 \rangle = \int_0^L 1^2 dx = L$ e $\langle y_n, y_n \rangle = \int_0^L \left[\cos \frac{n\pi x}{L} \right]^2 dx = \frac{L}{2}$, si $n \geq 1$.

[Poniendo $\frac{a_0}{2}$ en la serie, la fórmula del a_n vale también para a_0].

Otras dos familias de autofunciones sencillas en las que muchas veces tendremos que desarrollar funciones son las de estos problemas fáciles de resolver:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y'(L) = 0 \end{cases} \text{ con } \lambda_n = \frac{[2n-1]^2 \pi^2}{2L^2}, y_n = \left\{ \sin \frac{[2n-1]\pi x}{2L} \right\}, \langle y_n, y_n \rangle = \frac{L}{2}, n = 1, 2, \dots$$

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = y(L) = 0 \end{cases} \text{ con } \lambda_n = \frac{[2n-1]^2 \pi^2}{2L^2}, y_n = \left\{ \cos \frac{[2n-1]\pi x}{2L} \right\}, \langle y_n, y_n \rangle = \frac{L}{2}, n = 1, 2, \dots$$

A estos desarrollos en autofunciones los llamaremos, respectivamente, series en **senos impares** y en **cosenos impares** en $[0, L]$.

Observemos que **en estos cuatro casos** la fórmula para el coeficiente c_n de la serie de Fourier (que se deduce de la general $\langle f, y_n \rangle / \langle y_n, y_n \rangle$) adopta la forma:

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) y_n(x) dx$$

[No olvidando poner $a_0/2$ para las series en cosenos, que son las únicas que tienen ese término, ya que para las otras tres las sumas empiezan desde $n = 1$].

Ej 1. Desarrollemos $f(x) = x, x \in [0, 1]$ en senos, cosenos y cosenos impares:

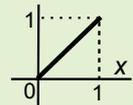
$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\pi x, \text{ pues } b_n = 2 \int_0^1 x \sin n\pi x dx = -\frac{2 \cos n\pi}{n\pi}, n = 1, 2, \dots$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \cos n\pi x = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} \cos(2m-1)\pi x,$$

$$\text{ya que } a_0 = 2 \int_0^1 x dx = 1, a_n = 2 \int_0^1 x \cos n\pi x dx = \frac{2}{n^2 \pi^2} [\cos n\pi - 1], n = 1, 2, \dots$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(2n-1)} - \frac{8}{\pi^2(2n-1)^2} \right] \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2}, \text{ pues } c_n = 2 \int_0^1 x \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2} dx = \dots$$

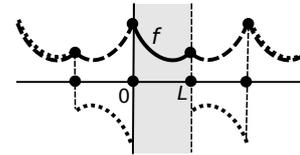
Las tres series, por el teorema 1, convergen hacia $f(x)$ para cada $x \in (0, 1)$. Lo mismo haría el desarrollo en autofunciones de cualquier otro problema de Sturm-Liouville.



Hemos venido escribiendo $f = \Sigma$ aunque la igualdad sólo se da seguro en los $x \in (0, L)$ en que f es continua. En 0 y L vamos a ver ahora lo que pasa para las dos primeras series.

Cada sumando de una **serie en senos** ($\sin \frac{n\pi x}{L}$) es impar y todos son de periodo $2L$ y, por tanto, la serie tendrá esas mismas propiedades. Si la f que desarrollamos, definida inicialmente en $[0, L]$, **se extiende** primero de forma **impar** a $[-L, L]$ y luego de forma **$2L$ -periódica** a todo \mathbf{R} , la suma de la serie será esa función extendida. Donde ésta sea continua, la serie tenderá hacia su valor (y si no, hacia el valor medio). Aparecerán discontinuidades en algún **extremo** del intervalo inicial salvo si es $f(0)=f(L)=0$.

[Si fuese $f(0) \neq 0$ ó $f(L) \neq 0$ la extensión impar y $2L$ -periódica de f no sería continua en 0 o en L . Además está claro que todas las series en senos se anulan en 0 y L , pues lo hace cada sumando].

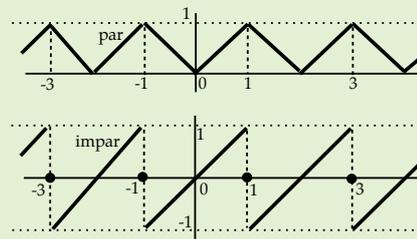
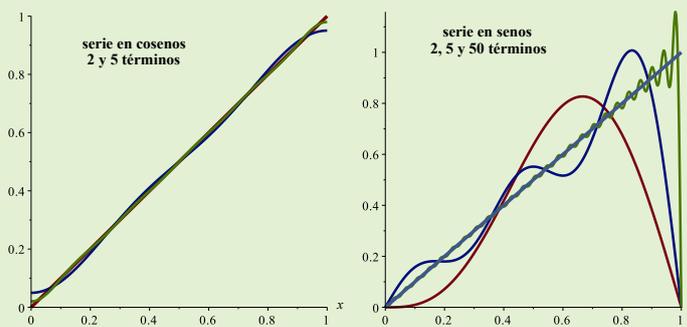


Análogamente, cualquier **serie en cosenos** (cuyos sumandos son pares y periódicos) convergerá hacia la **extensión par** y **$2L$ -periódica** de la f inicial, lo que no crea nuevas discontinuidades en los extremos.

[Aunque las series en cosenos convergen mejor que la de los senos, cuando nos surjan al resolver EDPs no podremos elegir el tipo de series en que desarrollar las funciones: serán impuestas por las condiciones de contorno del problema].

Ej 1*. Ya podemos precisar hacia qué convergen las dos primeras series del ejemplo 1 en los extremos del intervalo.

En particular, la serie de senos no converge hacia f en todo $[0, 1]$ (en $x=1$ la suma será 0) y parece hacerlo uniformemente en todo intervalo $[0, b]$, $b < 1$. La de cosenos parece converger uniformemente en $[0, 1]$.



Comprobamos con ordenador (usando el programa Maple). La suma de 2 y 5 términos de la serie en cosenos ya da una buena aproximación. La de senos, en cambio se ajusta mal cerca de $x=1$ al valor real, incluso con 50 términos. [Cerca de las discontinuidades aparecerán siempre ese tipo de 'picos'. Es el llamado '**fenómeno de Gibbs**'.]

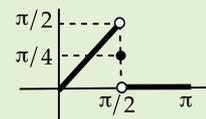
Desarrollamos ahora una función 'rota' en serie de cosenos impares:

Ej 2. Desarrollemos $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$ en serie de autofunciones de $y'' + \lambda y = 0$ $y(0)=y'(\pi)=0$.

Autofunciones conocidas: $\lambda_n = \frac{(2n-1)^2}{2^2}$, $y_n = \{ \sin \frac{(2n-1)x}{2} \}$, $n=1, 2, \dots$. $\langle y_n, y_n \rangle = \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} \rightarrow c_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin \frac{(2n-1)x}{2} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} x \sin \frac{(2n-1)x}{2} dx \\ &= -\frac{4x \cos \frac{(2n-1)x}{2}}{\pi(2n-1)} \Big|_0^{\pi/2} + \frac{4}{\pi(2n-1)} \int_0^{\pi/2} \cos \frac{(2n-1)x}{2} dx = \frac{8 \sin \frac{(2n-1)\pi}{4}}{\pi(2n-1)^2} - \frac{2 \cos \frac{(2n-1)\pi}{4}}{2n-1} \end{aligned}$$

La serie converge hacia f en los $x \in (0, \pi)$ en que es continua, y hacia $\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$ en los que es discontinua. En particular, para $x = \frac{\pi}{2}$ la suma ha de ser $\frac{\pi}{4}$. Por tanto, se tiene que:



$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{(2n-1)\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{8 \sin^2(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4})}{\pi(2n-1)^2} - \frac{\sin \frac{(2n-1)\pi}{2}}{2n-1} \right] = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{\pi}{4}$$

puesto que $\sin^2(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}[1 - \cos(n\pi - \frac{\pi}{2})] = \frac{1}{2}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

Deducimos de la igualdad de arriba el valor de la suma de esta serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

[No es raro obtener sumas de series desconocidas a partir de un desarrollo de Fourier].

[Arriba no hablamos de la convergencia de esta serie en los extremos, aunque no sería complicado ver también lo que sucede con las series en cosenos y senos impares (los extremos con $y=0$ llevan a extensiones impares y los de $y'=0$ a pares y habría que hablar de extensiones $4L$ -periódicas)].

La teoría de series de Fourier también incluye los problemas periódicos. Para:

$$(P_p) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(-L) = y(L), y'(-L) = y'(L) \end{cases} \quad \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad y_0 = \{1\}, \quad y_n = \left\{ \cos \frac{n\pi x}{L}, \sin \frac{n\pi x}{L} \right\}, \quad n = 0, 1, \dots$$

se deduce la siguiente **serie de Fourier en senos y cosenos** en $[-L, L]$:

$$[p] \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right], \quad \text{con coeficientes:}$$

$$[1] \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad \text{y} \quad [2] \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \\ n = 0, 1, 2, \dots \qquad \qquad \qquad n = 1, 2, \dots$$

ya que: $\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 0$ para todo m y n ; $\int_{-L}^L 1^2 dx = 2L$;

$$\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ L & m = n \end{cases}; \quad \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ L & m = n \end{cases}.$$

[Las fórmulas [1] y [2] también sirven para desarrollar una f definida inicialmente en cualquier otro intervalo $[a, a+2L]$ (cambiando los límites a la integral) pues $\int_a^{a+2L} \cos^2 = \int_a^{a+2L} \sin^2 = L$].

Como en el teorema 1, se prueba que la serie [p] converge hacia $f(x)$ para los x en que f es continua. Y también se puede decir lo que pasa en los **extremos** $-L$ y L (pues, al ser sus sumandos de ese periodo, [p] define una función **2L-periódica** en todo \mathbf{R}). Y vamos a dar también aquí un resultado sobre la **convergencia uniforme** de [p] (sin demostrar nada, como en toda la sección):

Teor 2.

Supongamos que f es C^1 a trozos en $[-L, L]$ y extendamos f fuera de $[-L, L]$ de forma $2L$ -periódica. Entonces la serie [p] con a_n y b_n dados por [1] y [2] converge hacia $f(x)$ en todos los puntos en que su extensión es continua (y en los puntos de discontinuidad hacia $\frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)]$).

Además [p] converge uniformemente en cualquier intervalo cerrado sin discontinuidades de la f extendida. Por tanto, si $f(-L) = f(L)$ y f es continua, [p] tiende uniformemente hacia f en todo el intervalo $[-L, L]$.

Las fórmulas [s] y [c] de los coeficientes de las series en senos y en cosenos se pueden ver como casos particulares de [1] y [2]. Una f inicialmente definida en $[0, L]$ se puede extender de forma impar o par a $[-L, L]$. En el primer caso es impar $f(x) \cos(n\pi x/L)$ y par $f(x) \sin(n\pi x/L)$. En el segundo, es par $f(x) \cos(n\pi x/L)$ e impar $f(x) \sin(n\pi x/L)$. Así, $a_n = 0$ y [1] se convierte en [s] en el primero, y en el otro $b_n = 0$ y [2] pasa a ser [c].

[Si definiésemos la f inicial de cualquier otra forma en $[-L, 0)$, la serie en senos y cosenos también convergería hacia $f(x)$ en los x de $(0, L)$ en que fuese continua].

Como consecuencia de lo anterior y del teorema 2 se tiene que:

La serie de cosenos de una f continua en $[0, L]$, con f' continua a trozos, converge uniformemente hacia f en todo $[0, L]$.
Si f cumple además que $f(0) = f(L) = 0$, también lo hará su serie de senos.

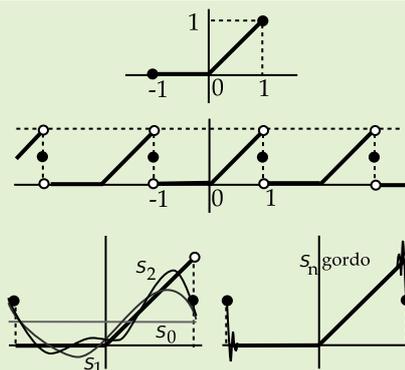
Ahora hacemos un desarrollo en serie de senos y cosenos:

Ej 3. Sea $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$.

Su serie en senos y cosenos ya está casi calculada con las integrales del ejemplo 1:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos n\pi x - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin n\pi x.$$

Viendo su extensión 2-periódica se deduce que la suma de la serie es 0 en $(-1, 0)$, x en $[0, 1)$ y $1/2$ en -1 y 1 . En todo cerrado que no contenga estos dos puntos la convergencia es uniforme. Cerca de ellos la serie converge mal y aparece Gibbs.



Calculemos desarrollos en autofunciones más complicadas que las 4+1 citadas hasta ahora. Debemos ocuparnos en ellos del peso r , del cálculo de los $\langle y_n, y_n \rangle \dots$

Ej 4. Desarrollemos $f(x)=x, x \in [0,1]$ en las autofunciones del ejemplo 4 de 3.1:

$$\{\cos w_n x\} \text{ con } \tan w_n = \frac{1}{w_n} [r(x)=1].$$

$$\langle \cos w_n x, \cos w_n x \rangle = \int_0^1 \cos^2 w_n x \, dx = \frac{1}{2} + \frac{\sin w_n \cos w_n}{2w_n} = \frac{w_n^2 + \cos^2 w_n}{2w_n^2} = \frac{2 + w_n^2}{2(1 + w_n^2)},$$

$$\langle x, \cos w_n x \rangle = \int_0^1 x \cos w_n x \, dx = \frac{\sin w_n}{w_n} + \frac{\cos w_n - 1}{w_n^2} = \frac{2 \cos w_n - 1}{w_n^2}.$$

$$\text{Por tanto: } x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(2 \cos w_n - 1)}{w_n^2 + \cos^2 w_n} \cos w_n x.$$

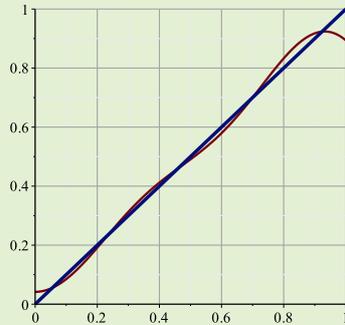
[Vamos a usar el ordenador para hallar varios coeficientes y dibujar algunas sumas parciales de la serie. Primero aproximamos los w_n :

$$w_1 \approx 0.8603, w_2 \approx 3.4256, w_3 \approx 6.4373, w_4 \approx 9.5293 \dots$$

De ellos deducimos los c_n :

$$c_1 \approx 0.5223, c_2 \approx -0.4614, c_3 \approx 0.0460, c_4 \approx -0.0651 \dots$$

A la derecha están dibujadas x y la cuarta suma parcial. Parece que converge también en los extremos, cosa que no sabíamos].



Ej 5. Ahora $f(x)=e^x$ en las $\{y_n\}$ del Ej 5 de 3.1: $y_0 = \{1\}, y_n = \{e^x[\sin n\pi x - \pi \cos n\pi x]\}$.

$$\text{Era } r(x)=e^{-2x} \rightarrow c_0 = \frac{\langle 1, e^{-x} \rangle}{\langle e^{-x}, e^{-x} \rangle} = \frac{\int_0^1 e^{-x} dx}{\int_0^1 e^{-2x} dx} = \frac{1 - e^{-1}}{(1 - e^{-2})/2} = \frac{2e}{e+1}.$$

$$\langle e^x, y_n \rangle = \left[-\frac{1}{n\pi} \cos n\pi x - \sin n\pi x \right]_0^1 = \frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \text{ (se anula si } n \text{ par)}.$$

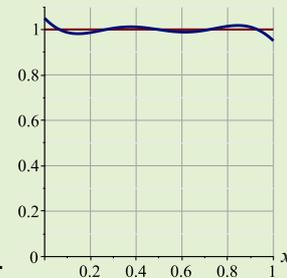
$$\langle y_n, y_n \rangle = \int_0^1 [\sin^2 n\pi x + n^2 \pi^2 \cos^2 n\pi x - n\pi \sin 2n\pi x] dx = \frac{1 + n^2 \pi^2}{2}.$$

$$\text{El desarrollo es: } e^x = \frac{2e}{e+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2[1 - (-1)^n]}{n\pi[1 + n^2 \pi^2]} e^x (\sin n\pi x - \pi \cos n\pi x).$$

$$\text{Se puede poner: } 1 = \frac{2e}{e+1} e^{-x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2[1 - (-1)^n]}{n\pi[1 + n^2 \pi^2]} (\sin n\pi x - \pi \cos n\pi x).$$

Para cada $x \in (0,1)$ la suma de estos últimos infinitos complicados términos deberá ser 1.

Maple muestra que la convergencia es buena (incluso en los extremos). El dibujo es sólo la suma del término con la exponencial y de los dos primeros trigonométricos no nulos ($n=1$ y $n=3$).



Ej 6. Otro desarrollo de $f(x)=x$, ahora en $[1, e]$, en las autofunciones del ejemplo 6 de 3.1.

$$\text{Esta vez el peso no es } 1, \text{ sino } r(x) = \frac{1}{x}. \text{ Como } \int_1^e \frac{\sin^2(n\pi \ln x) dx}{x} = \int_0^1 \sin^2(n\pi s) ds = \frac{1}{2},$$

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin(n\pi \ln x), \text{ si } c_n = 2 \int_1^e \sin(n\pi \ln x) dx = 2 \int_1^1 e^s \sin(n\pi s) ds = \frac{2n\pi[1 - e(-1)^n]}{1 + n^2 \pi^2}.$$

También se pueden hacer desarrollos de Fourier en series de autofunciones de problemas singulares de Sturm-Liouville, en particular en las de los tres que vimos al final de la sección anterior.

Ej 7. Desarrollemos una $f \in C^1$ a trozos en las autofunciones $J_0(w_n x)$ del (P_{10}) de esa sección:

$$(P_{10}) \begin{cases} xy'' + y' + \lambda xy = 0 \\ y \text{ acotada en } x=0, y(1)=0 \end{cases} \rightarrow f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m J_0(w_n x), \text{ con peso } r(x)=x.$$

$$\rightarrow c_n = \frac{\int_0^1 x f(x) J_0(w_n x) dx}{\int_0^1 x J_0^2(w_n x) dx} = \frac{2}{J_1^2(w_n)} \int_0^1 x f(x) J_0(w_n x) dx,$$

$$\text{pues } \int_0^1 x J_0^2(w_n x) dx = \frac{1}{w_n^2} \int_0^{w_n} u J_0^2(u) du = \frac{1}{2w_n^2} [u^2 (J_0^2(u) + J_1^2(u))]_0^{w_n} = \frac{1}{2} J_1^2(w_n),$$

$$\text{ya que las } J_n \text{ satisfacen } [x^n J_n]' = x^n J_{n-1} \rightarrow [x J_1]' = x J_0, J_0' = -J_1$$

$$\rightarrow \int u J_0^2 du = \frac{u^2}{2} J_0^2 + \int u J_0 u J_1 du = \frac{u^2}{2} J_0^2 + \frac{1}{2} [u J_1]^2.$$

3.3. Problemas no homogéneos

Ej 1. Discutamos cuántas soluciones tiene $\begin{cases} y'' = x-d \\ y(1)=y(2)+by'(2)=0 \end{cases}$, d, b constantes.

La solución general es: $y = c_1 + c_2x + \frac{x^3}{6} - \frac{dx^2}{2}$ (con $y' = c_2 + \frac{x^2}{2} - dx$). Imponiendo datos:

$$\begin{cases} y(1) = c_1 + c_2 + \frac{1}{6} - \frac{d}{2} = 0 \\ y(2) + by'(2) = c_1 + 2c_2 + \frac{4}{3} - 2d + bc_2 + 2b - 2bd = 0 \end{cases}, \text{ es decir: } \begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{d}{2} - \frac{1}{6} \\ c_1 + (2+b)c_2 = 2bd + 2d - 2b - \frac{4}{3} \end{cases}$$

Este sistema lineal tiene solución única en c_1 y c_2 si el homogéneo tiene sólo la trivial (si el determinante de los coeficientes es no nulo). Cuando el homogéneo tenga infinitas soluciones, el no homogéneo tendrá infinitas o ninguna. Por tanto, si $b \neq -1$, podemos despejar de forma única c_1 y c_2 , y la solución queda determinada $\forall d$. Pero si $b = -1$:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{d}{2} - \frac{1}{6} \\ c_1 + c_2 = \frac{2}{3} \end{cases}, \text{ este sistema sólo tiene solución cuando } \frac{d}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow d = \frac{5}{3},$$

y en ese caso una de las dos constantes queda libre. Si $b = -1$, $d \neq \frac{5}{3}$, no hay solución.

Demos un teorema que generalice el ejemplo anterior. Consideremos el problema para la **ecuación no homogénea** con condiciones separadas homogéneas:

$$(P_f) \begin{cases} [p(x)y']' + g(x)y = f(x) \\ \alpha y(a) - \alpha' y'(a) = \beta y(b) + \beta' y'(b) = 0 \end{cases}, p \in C^1, g, f \in C, p > 0 \text{ en } [a, b].$$

y llamemos (P_h) al problema homogéneo asociado ($f \equiv 0$). Entonces:

Teor 1. El problema (P_f) tiene solución única si y sólo si (P_h) tiene sólo la solución $y \equiv 0$. Si (P_h) tiene soluciones no triviales $\{y_h\}$ entonces según sea $\int_a^b f(x)y_h(x) dx \stackrel{=}{\neq} 0$, (P_f) tiene infinitas soluciones / ninguna solución.

$$\begin{matrix} 1 \rightarrow 1 \\ \infty \rightarrow \infty \\ 0 \rightarrow 0 \end{matrix}$$

Gran parte del teorema sale de imponer las condiciones de contorno a la solución general de la ecuación $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p$, usando las propiedades de los sistemas algebraicos lineales: tienen solución única si y sólo si el sistema homogéneo tiene sólo la trivial. Además si hay soluciones y de (P_f) debe ser (y esto se ve que también es suficiente):

$$\int_a^b f y_h = \int_a^b [p y']' + g y_h = [p y_h y' - y y_h']_a^b + \int_a^b [p y_h']' + g y_h = 0$$

Ej 1*. Para el Ej 1, (P_h) tiene sólo la solución $y \equiv 0$ si $b \neq -1$. Y cuando $b = -1$ es $y_h = \{1-x\}$.

El (P_f) [para $[y']' = x-d$], tendrá entonces solución única si $b \neq -1$, e infinitas ó cero, para $b = -1$, según se anule o no la integral: $\int_1^2 (x-d)(1-x) dx = \frac{d}{2} - \frac{5}{6} \Leftrightarrow d = \frac{5}{3}$.

Si en vez de la $x-d$ dada tuviésemos una $f(x)$ general, el teorema daría rápidamente:

única solución si $b \neq -1$, e infinitas / ninguna, según $\int_1^2 f(x)(1-x) dx \stackrel{=}{\neq} 0$, para $b = -1$.

[Costaría bastante más decirlo a partir de la solución: $c_1 + c_2 x + x \int_1^x f(s) ds - \int_1^x s f(s) ds$].

Ej 2. $\begin{cases} xy'' + 2y' = 3x-4 \\ 2y(1)+y'(1)=y(2)=0 \end{cases}$ Determinemos cuántas soluciones tiene el problema. Para ello empezamos analizando el homogéneo (P_h) :

$$xy'' + 2y' = 0 \xrightarrow{\text{Euler o } y'=v} y = c_1 + \frac{c_2}{x}, y' = -\frac{c_2}{x^2} \rightarrow \begin{cases} 2c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + \frac{c_2}{2} = 0 \end{cases} \cdot \text{El homogéneo tiene infinitas soluciones } \left\{1 - \frac{2}{x}\right\}.$$

En forma S-L: $[x^2 y']' = 3x^2 - 4x$. $\int_1^2 (3x^2 - 4x)(1 - \frac{2}{x}) dx = \int_1^2 (3x^2 - 10x + 8) dx = 0$.

\Rightarrow el problema no homogéneo tiene **infinitas soluciones**.

[O directamente, hallando la solución general de la no homogénea:

$$y = c_1 + \frac{c_2}{x} + \frac{x^2}{2} - 2x, y' = -\frac{c_2}{x^2} + x - 2 \rightarrow \begin{cases} 2y(1)+y'(1)=2c_1+c_2-4=0 \\ y(2)=c_1+\frac{c_2}{2}-2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_2=4-2c_1 \\ c_1 \text{ cualquiera} \end{cases}$$

Ej 3. $\begin{cases} y''+y'-2y=1-2x \\ y(0)-y'(0)=y(1)=0 \end{cases}$ Veamos también cuántas soluciones tiene este no homogéneo. Y volvemos a analizar primero el homogéneo (P_h):

$$y''+y'-2y=0 \rightarrow y=c_1e^x+c_2e^{-2x}, y'=c_1e^x-2c_2e^{-2x}, \begin{cases} 3c_2=0 \\ c_1+c_2e^{-2}=0 \end{cases} \rightarrow c_1=c_2=0.$$

Como el problema homogéneo tiene únicamente la solución $y \equiv 0$, nuestro problema no homogéneo **tiene una sola solución**.

[Imponiendo los datos en la solución de la no homogénea $y=c_1e^x+c_2e^{-2x}+x$, podemos obtener esa solución única: $y=\frac{1}{3}e^{-2x}-\frac{1+3e^2}{3e^3}e^x+x$].

Sea ahora el problema con **condiciones de contorno no homogéneas**:

$$(P_{AB}) \begin{cases} [p(x)y']' + g(x)y = f(x) \\ \alpha y(a) - \alpha' y'(a) = A, \beta y(b) + \beta' y'(b) = B \end{cases}, p \in C^1, g, f \in C, p > 0 \text{ en } [a, b],$$

ya sea (P_h) el homogéneo con $f(x) \equiv 0, A=B=0$ (el mismo de antes). Hallando una función v que satisfaga sus condiciones de contorno y haciendo $w=y-v$ el (P_{AB}) se reduce a otro del tipo (P_f) ya discutido en el teorema 1:

$$(P_w) \begin{cases} [p(x)w']' + g(x)w = f(x) - [p(x)v']' - g(x)v \\ \alpha w(a) - \alpha' w'(a) = 0, \beta w(b) + \beta' w'(b) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Teor 2. (P_{AB}) tiene solución única $\Leftrightarrow (P_h)$ tiene sólo la solución $y \equiv 0$

[y si (P_h) tiene infinitas soluciones, (P_{AB}) puede tener infinitas o ninguna].

La idea de hallar una v que cumpla las condiciones de contorno para hacerlas homogéneas se utiliza a menudo en las EDPs. Para encontrar la v normalmente se trabaja por tanteo. Si no es una constante, se prueba una recta; si no vale, funciones más complicadas... Aunque en (P_{AB}) sea $f(x) \equiv 0$, **si (al menos) una condición de contorno es no homogénea, las propiedades son las típicas de uno no homogéneo**. Como en el siguiente ejemplo.

Ej 4. Discutamos cuántas soluciones tiene: $(P_a) \begin{cases} xy'' - y' = 0 \\ y'(1) + ay(1) = 0, y(2) = 1 \end{cases}$

Comenzamos analizando cuántas soluciones tiene el homogéneo: $y = c_1 + c_2x^2 \rightarrow$

$$\begin{cases} y'(1) + ay(1) = 2c_2 + ac_1 + ac_2 = 0 \\ y(2) = c_1 + 4c_2 = 0 \end{cases} \begin{cases} [2-3a]c_2 = 0 \\ c_1 = -4c_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \equiv 0 \text{ si } a \neq \frac{2}{3} \\ y = x^2 - 4 \text{ si } a = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Si $a \neq \frac{2}{3}$, (P_a) tiene solución única. Para $a = \frac{2}{3}$ vemos lo que sucede directamente:

$$\begin{cases} y'(1) + \frac{2}{3}y(1) = \frac{2}{3}[c_1 + 4c_2] = 0 \\ y(2) = c_1 + 4c_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \text{no existe solución de } (P_{2/3}).$$

Aunque también podríamos (más largo) convertirlo en un (P_f) y aplicar el teorema 1. Para ello buscamos una v de la forma $v = Mx + N$ que satisfaga las condiciones:

$$\begin{cases} v'(1) + \frac{2}{3}v(1) = \frac{1}{3}[5M + 2N] = 0 \\ v(2) = 2M + N = 1 \end{cases} \rightarrow v = 5 - 2x, w = y - v \rightarrow (P_w) \begin{cases} xw'' - w' = -2 \\ w'(1) + \frac{2}{3}w(1) = w(2) = 0 \end{cases}$$

La f del teorema 1 es, desde luego, la de la ecuación escrita **en forma autoadjunta**, con lo que, para aplicarlo, tenemos que reescribir nuestra ecuación: $[\frac{w'}{x}]' = -\frac{2}{x^2}$:

$$\int_1^2 [-\frac{2}{x^2}][x^2 - 4] dx = 2 \neq 0 \Rightarrow (P_w) \text{ [y por tanto } (P_{2/3}) \text{] no tiene solución.}$$

Consideremos ahora una tercera situación, el **problema de S-L no homogéneo**:

$$(P_\lambda) \begin{cases} [py']' - qy + \lambda ry = f(x) \\ \alpha y(a) - \alpha' y'(a) = \beta y(b) + \beta' y'(b) = 0 \end{cases}$$

Sea (P_s) el problema separado de Sturm-Liouville homogéneo (el de $f \equiv 0$). Para cada λ aparece un problema de los ya vistos (con $g = -q + \lambda r$). Se tiene por tanto:

Teor 3. (P_λ) tiene solución única $\Leftrightarrow \lambda$ no es autovalor de (P_s). Si λ_n es autovalor con autofunción $\{y_n\}$, (P_{λ_n}) no tiene solución si $\int_a^b f y_n dx \neq 0$, tiene infinitas si $\int_a^b f y_n dx = 0$.

Ej 5. $(P_\lambda) \begin{cases} y'' + \lambda y = 1 \\ y'(0) = y'(1) - 2y(1) = 0 \end{cases}$ Determinemos, según λ , cuántas soluciones tiene. Para ello hallemos los λ_n del homogéneo.

Como $\beta\beta' < 0$ pueden aparecer autovalores negativos.

$$\lambda < 0: y = c_1 e^{\rho x} + c_2 e^{-\rho x} \rightarrow \begin{cases} c_2 = c_1 \\ c_1(\rho[e^{\rho} - e^{-\rho}] - 2[e^{\rho} + e^{-\rho}]) = 0 \end{cases}$$

Hay autovalor $\lambda_0 = -\rho_0^2$ con $\text{th } \rho_0 = \frac{2}{\rho_0}$, y es $y_0 = \{\text{ch}(\rho_0 x)\}$.

[Utilizando el método de Newton o uno similar: $\rho_0 \approx 2.07$, $\lambda_0 \approx -4.27$].

$$\lambda = 0: y = c_1 + c_2 x \rightarrow \begin{cases} c_2 = 0 \\ -2c_1 - c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda = 0 \text{ no es autovalor.}$$

$$\lambda > 0: y = c_1 \cos wx + c_2 \sin wx \rightarrow \begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1(w \sin w + 2 \cos w) = 0 \end{cases}$$

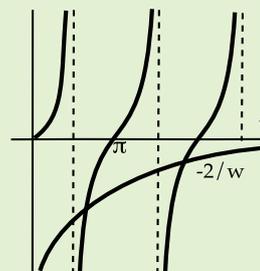
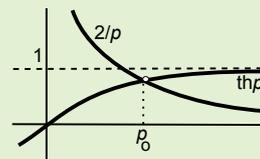
Hay infinitos $\lambda_n = w_n^2$ si $\tan w_n = -\frac{2}{w_n}$, con $y_n = \{\cos(w_n x)\}$.

Por tanto (la ecuación está ya en forma autoadjunta):

Si $\lambda \neq \lambda_n$ hay solución única de (P_λ) .

Si $\lambda = \lambda_0$, como $\int_0^1 \text{ch}(\rho_0 x) dx \neq 0$, (P_λ) no tiene solución.

Si $\lambda = \lambda_n$, $n = 1, 2, \dots$, $\int_0^1 \cos(w_n x) dx = \frac{\sin w_n}{w_n} \neq 0$, (P_λ) tampoco tiene solución.



Ej 6. $\begin{cases} x^2 y'' + xy' + \lambda y = x^2 - a \\ y(1) - y'(1) = y(2) - 2y'(2) = 0 \end{cases}$ Precisemos si $\lambda = -1$ y $\lambda = 0$ son o no autovalores del problema homogéneo y discutamos después cuántas soluciones tiene el no homogéneo.

$$\mu(\mu-1) + \mu + \lambda = 0, \mu = \pm\sqrt{-\lambda} \rightarrow \mu = \pm 1, \text{ si } \lambda = -1; \mu = 0, \text{ doble } \lambda = 0.$$

$$\lambda = -1: y = c_1 x + c_2 x^{-1} \rightarrow \begin{cases} 2c_2 = 0 \\ \frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{2}c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow c_2 = 0 \text{ y cualquier } c_1. \text{ Es autovalor con autofunción } \{x\}.$$

$$\lambda = 0: y = c_1 + c_2 \ln x \rightarrow \begin{cases} c_1 - c_2 = 0 \\ c_1 + c_2 \ln 2 - c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow c_1 = c_2 = 0. \text{ No es autovalor.}$$

Por tanto, para $\lambda = 0$ el homogéneo tiene sólo la solución trivial \Rightarrow el no homogéneo **tiene solución única** $\forall a$.

Para $\lambda = -1$ tendrá infinitas o ninguna. Ponemos la ecuación en forma autoadjunta:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \lambda \frac{1}{x^2}y = 1 - \frac{a}{x^2}, e^{\int 1/x} = x, [xy']' + \lambda \frac{1}{x}y = x - \frac{a}{x}.$$

Tendrá infinitas o ninguna solución dependiendo del valor de:

$$\int_1^2 (x - \frac{a}{x})x dx = \int_1^2 (x^2 - a) dx = \frac{7}{3} - a. \quad \text{Tiene infinitas soluciones si } a = \frac{7}{3}. \\ \text{Ninguna si } a \neq \frac{7}{3}.$$

[Bastante más largo sería hallar la solución particular de la no homogénea e imponer los datos].