

## 4. Separación de variables

Este amplio capítulo se dedica a uno de los más antiguos métodos de resolución de EDPs lineales (el de separación de variables) que nos permitirá dar la solución (en forma de **serie de Fourier**) de gran parte de los problemas clásicos citados en el capítulo 1, en concreto de los planteados en un **intervalo finito** en una de las variables. Resolveremos la ecuación del calor con varias condiciones de contorno, la de la cuerda acotada, la de Laplace en rectángulos, círculos y esferas... Ello será posible porque las ecuaciones serán 'separables' y los recintos que consideraremos son simples, pero hay muchos problemas no resolubles por este método.

En 4.1 resolveremos problemas para la ecuación del **calor** en 2 variables. Empezaremos con **problemas homogéneos** (aquellos en que son homogéneas ecuación y condiciones de contorno; si estas no lo son, primero haremos un cambio de variable). Básicamente esta será la técnica utilizada: buscaremos soluciones de la EDP que sean productos de funciones de cada variable  $[u(x, t) = X(x)T(t)]$  y que cumplan todas las condiciones homogéneas; obtendremos infinitas soluciones de ese tipo resolviendo un problema de Sturm-Liouville (casi siempre para  $X'' + \lambda X = 0$ ) y otra EDO; construiremos una serie a partir de ellas  $[u(x, t) = \sum c_n X_n(x) T_n(t)]$ , cuyos coeficientes  $c_n$  se fijarán imponiendo la condición inicial aún no utilizada (basta hacer un desarrollo de Fourier). La presencia de series exigirá justificar las cuestiones de convergencia, pero no entraremos en ello. Después trataremos los **problemas no homogéneos**, buscando también una serie solución. Probaremos en la ecuación una serie cuyos términos serán **productos de las autofunciones del problema homogéneo por funciones a determinar de la otra variable**. Resolviendo la familia infinita resultante de EDOs lineales no homogéneas con las condiciones que se deducen de las condiciones iniciales, se obtendrá la solución.

En la sección 4.2 haremos lo mismo para la ecuación de **ondas**, aprovechando para comparar resultados con los obtenidos en 1.4 a través de extensiones y de la fórmula de D'Alembert. Veremos también un ejemplo para ondas en el espacio.

En la 4.3 resolveremos por separación de variables diversos problemas en **cartesianas** o en **polares** para **Laplace** (homogénea y no homogénea): de Dirichlet, de Neumann o mixtos. En cartesianas el problema de contorno será en  $x$  o en  $y$  según convenga, pero en polares siempre será en  $\theta$  (mejor que la ecuación de Euler para  $r$ ). Las condiciones adicionales a imponer a la otra variable serán aquí de contorno (en polares bastantes veces no estarán escritas explícitamente como hasta ahora). De las soluciones en forma de serie deduciremos la fórmula integral de Poisson (se obtendrá de otra forma en 4.5) que da la solución del problema de Dirichlet en el círculo. Acabaremos la sección resolviendo Laplace en la esfera dependiente sólo de un ángulo (y nos aparecerán los **polinomios de Legendre**) y estudiando los problemas exteriores en el plano y el espacio.

En 4.4 extenderemos el método de separación de variables a algunos problemas con **tres variables**. La técnica será muy parecida una vez definidas las **series de Fourier dobles**. Simplemente habrá que resolver dos (en vez de uno) problemas de contorno. Se verán brevemente también ejemplos más complicados en que aparecen nuevas EDOs, como la asociada de Legendre (para Laplace en la esfera con dependencia de  $\theta$  y  $\phi$ ) que lleva a los **armónicos esféricos** y las funciones de **Bessel** que estudiamos en el capítulo 2 (tratando la vibración de un tambor).

En 4.5 se estudian brevemente y a título informativo las **funciones de Green**, primero para **problemas de contorno para EDOs**. Se escribirá la solución de un problema **no homogéneo** en términos de una integral con el término no homogéneo  $f$  y la función de Green  $G(x, s)$ , construida con las soluciones del homogéneo. Luego se generalizará  $G$  para dar las soluciones en términos de integrales de la ecuación de **Laplace** en recintos sencillos, introduciendo el concepto de **solución fundamental** (una función  $v$  tal que  $\Delta v = \delta$ ) y utilizando el llamado **método de las imágenes**,

## 4.1. Separación de variables para el calor

Resolvamos varios problemas para la **ecuación del calor**. En el primero, **con ecuación y datos homogéneos**, los extremos de la varilla se mantienen a 0 grados y los datos iniciales vienen dados por una  $f$  que suponemos  $C^1$  a trozos en  $[0, L]$ :

$$\text{Sea } \boxed{[P_1] \begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0, & x \in (0, L), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \end{cases}} \begin{matrix} [E] \\ [I] \\ [C] \end{matrix}$$

**Busquemos soluciones de la forma**  $u(x, t) = X(x)T(t)$ . Debe ser entonces:

$$XT' - kX''T = 0, \text{ es decir, } \frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT} \quad (\text{mejor que } \frac{kX''}{X} = \frac{T'}{T}).$$

Como el primer miembro es función sólo de  $x$  y el segundo lo es sólo de  $t$  ambos deben ser iguales a una constante:

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{k} \frac{T'}{T} = -\lambda \quad (\text{ponemos } -\lambda \text{ para que nos quede la ecuación habitual de 3.1}).$$

Así obtenemos una EDO para  $X(x)$  y otra para  $T(t)$ :  $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 & [1] \\ T' + \lambda k T = 0 & [2] \end{cases}$ .

Cualquiera que sea  $\lambda$ , el producto de una solución de [1] por otra de [2] será entonces una solución de [E]. Sin embargo, aquí nos interesan sólo aquellas que satisfacen además las condiciones de contorno:

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

(si fuese  $T(t) \equiv 0$  tendríamos  $u \equiv 0$  y no se cumpliría la condición inicial).

$$\text{Análogamente, debe ser } X(L) = 0.$$

Nos interesan, pues, las soluciones (no triviales) del problema de Sturm-Liouville:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad X_n = \left\{ \sin \frac{n\pi x}{L} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

[Si el intervalo para la  $x$  fuese no acotado, no saldría un problema de contorno de los de 3.1; se utiliza entonces la transformada de Fourier de 1.5].

Llevando estos valores de  $\lambda$  a la ecuación [2] obtenemos:

$$T' = -\frac{kn^2 \pi^2}{L^2} T \rightarrow T_n = \left\{ e^{-kn^2 \pi^2 t / L^2} \right\}.$$

Hemos deducido hasta ahora que para cada  $n$  las funciones

$$u_n(x, t) = \left\{ e^{-kn^2 \pi^2 t / L^2} \sin \frac{n\pi x}{L} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

son soluciones de la EDP [E] que satisfacen también las condiciones de contorno [C]. Por la linealidad de la ecuación y de las condiciones, sabemos que una combinación lineal finita de estas  $u_n$  también cumple [E] y [C]. Pero consideremos la serie infinita:

$$\boxed{u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-kn^2 \pi^2 t / L^2} \sin \frac{n\pi x}{L}} \quad [3]$$

y supongamos que converge y que satisface también [E] y [C]. Si queremos que además se cumpla la condición inicial [I] debe ser:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} = f(x) \Rightarrow \boxed{c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots} \quad [4]$$

pues la serie es precisamente la serie de Fourier en senos en  $[0, L]$  de  $f$ . Hemos hallado la solución única de [P<sub>1</sub>]: la serie [3] con coeficientes dados por [4].

Pero deberíamos comprobar que la convergencia es suficientemente buena para asegurar que realmente cumple el problema (una suma infinita de funciones derivables podría ser no derivable). Si  $f$  es  $C^1$  a trozos, se prueba que la serie **converge y define una función**  $C^\infty$  en  $[0, L] \times (0, \infty)$  y que  $u_t$  y  $u_{xx}$  se pueden calcular derivando término a término (y así se satisface la ecuación). En  $x=0$  y  $x=L$  es claro que  $u$  se anula. Y la condición inicial se cumple en el siguiente sentido: la  $u(x, t)$  definida por la serie para  $t > 0$  y por  $u(x, 0) = f(x)$  es una función continua salvo en los posibles puntos de  $t=0$  en que  $f$  fuese discontinua.

Aunque  $f$  sea discontinua, la solución es  $C^\infty$  para cualquier  $t > 0$  arbitrariamente pequeño. A diferencia de lo que pasa en las ondas, las **discontinuidades desaparecen instantáneamente** en la ecuación del calor, como ya dijimos al resolverla con la  $\mathcal{F}$  en la recta infinita.

Como cada  $u_n \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$  y es buena la convergencia, se tiene que:  $u(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \quad \forall x \in [0, L]$ .

**La varilla tiende a ponerse a 0 grados**, como era de esperar.

Suponemos ahora que los **datos de contorno son no homogéneos** y constantes:

$$[P_2] \begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0, & x \in (0, L), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u(0, t) = T_0, u(L, t) = T_L, & T_0, T_L \text{ constantes} \end{cases}$$

Comenzaremos siempre (como en métodos anteriores) **haciendo cero las condiciones de contorno** si no lo son, a partir de una  $v$  que las cumpla.

[Si separásemos variables directamente en  $[P_2]$  llegaríamos a  $X(0)T(t) = T_0$  (y otra análoga para  $x=L$ ), expresión de la que no deduciríamos nada].

Tanteando se ve que una  $v(x)$  que las satisface es la recta:  $v = [1 - \frac{x}{L}]T_0 + \frac{x}{L}T_L$ .

Haciendo  $w = u - v$ , nuestro problema se convierte en otro como el  $[P_1]$ :

$$\begin{cases} w_t - kw_{xx} = 0, & x \in (0, L), t > 0 \\ w(x, 0) = f(x) - v(x), & w(0, t) = w(L, t) = 0 \end{cases} \quad \text{Por tanto:}$$

$$u(x, t) = [1 - \frac{x}{L}]T_0 + \frac{x}{L}T_L + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-kn^2\pi^2 t/L^2} \text{sen} \frac{n\pi x}{L} = v + w,$$

$$\text{con} \quad c_n = \frac{2}{L} \int_0^L [f(x) - v(x)] \text{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Esta  $v(x)$  tiene un significado físico claro: como  $w \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ ,  $v(x)$  representa la **distribución estacionaria** de temperaturas hacia la que tienden las temperaturas en la varilla, independientemente de las condiciones iniciales.

[Si  $T_0$  y  $T_L$  **fuesen funciones de  $t$** , la  $v(x, t)$  definida arriba (que es la misma que dimos resolviendo la cuerda finita por D'Alembert) seguiría cumpliendo las condiciones de contorno. Pero la ecuación para la  $w$  obtenida con el cambio sería, en general, no homogénea, es decir, del tipo de las que vamos a resolver a continuación. Dicha  $v$ , función de  $t$ , pierde además su significado físico.

No perdamos de vista que con otros datos de contorno diferentes habrá que hallar  $v(x, t)$  distintas. Algunas veces no dependerán de  $x$ , otras serán rectas como aquí, quizás haya que probar parábolas o mejor otras funciones...].

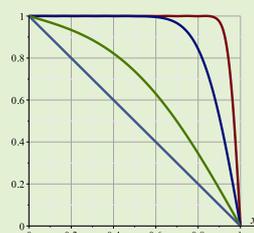
**Ej 1.**  $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = 1, & u(0, t) = 1, u(1, t) = 0 \end{cases}, \quad v = 1 - x. \quad w(x, 0) = x.$

$$c_n = 2 \int_0^1 x \text{sen} n\pi x dx = -\frac{2x}{n\pi} \cos n\pi x \Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \cos n\pi x dx \rightarrow$$

$$u = 1 - x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-n^2\pi^2 t} \text{sen}(n\pi x) \rightarrow 1 - x, \text{ estacionaria.}$$

[No nos importa que para  $t = 0$  sea incoherente el dato inicial con el de contorno en  $x = 1$ ; la solución será, como se ha dicho, continua para  $t > 0$  y en el cálculo de integrales el valor en un punto no influye].

[A la derecha, el dibujo (hecho con Maple) de la solución para  $t = 0.001, 0.01, 0.1, 1$  (utilizando 20 sumandos de la serie)].



Veamos cómo resolver un primer **problema no homogéneo** con datos homogéneos:

$$[P_3] \begin{cases} u_t - ku_{xx} = F(x, t), & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

(Tomamos  $L = \pi$  para abreviar las expresiones, pero no se pierde generalidad pues un sencillo cambio de variable lleva  $[0, L]$  a  $[0, \pi]$ ).

[Si las condiciones de contorno de  $[P_3]$  fuesen no homogéneas empezariamos como en  $[P_2]$  con un cambio  $w = u - v$  para conseguir que lo fuesen].

Las autofunciones del  $[P_1]$  eran  $\{\sin nx\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Probamos en  $[P_3]$  la siguiente serie (relacionada con la ecuación) que ya satisface las condiciones de contorno:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin nx \quad \text{con las } T_n(t) \text{ funciones a determinar.}$$

[Acabamos de hallar las autofunciones del homogéneo. Si no, se comenzaría calculándolas. A un problema no homogéneo siempre se lleva una **serie de autofunciones del homogéneo**].

[Tomando las  $T_n = c_n e^{-kn^2t}$  que aparecieron al resolver  $[P_1]$ ,  $u$  satisfaría la ecuación con  $F \equiv 0$ . Hay que darle más libertad a las  $T_n$  para conseguir, al meter la serie en la ecuación, una  $F \neq 0$ ].

Suponiendo que la serie se puede derivar término a término, **la llevamos a la EDP**, en la que desarrollaremos la  $F$  para que ambos miembros puedan ser comparados:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [T'_n(t) + kn^2T_n(t)] \sin nx = F(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \sin nx$$

$$\text{con } B_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(x, t) \sin nx \, dx \quad (\text{desarrollo de } F \text{ en senos para } t \text{ fijo}).$$

Entonces para cada  $n$  se debe cumplir la EDO de primer orden:  $T'_n + kn^2T_n = B_n(t)$ .

Y ahora, para obtener sus datos, también llevamos la serie **al dato inicial**, desarrollado en las mismas autofunciones:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin nx = f(x) \Rightarrow T_n(0) = c_n, \quad \text{con } c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

Hallando la solución única  $T_n$  de esta familia de problemas con la EDO no homogénea:

$$\begin{cases} T'_n + kn^2T_n = B_n(t) \\ T_n(0) = c_n \end{cases}$$

(con la fórmula de las lineales de primer orden o, a veces, mejor por tanteo, si es constante o de cualquiera de los tipos en que se pueden usar los coeficientes indeterminados), obtenemos la  $T_n(t)$  y, con ello, la solución de  $[P_3]$ .

[Como siempre faltaría comprobar (justificando la convergencia) que esta serie es solución de verdad, que es realmente lo que sucede si  $f$  y  $F$  son decentes].

Otra posibilidad de resolver  $[P_3]$  sería descomponerlo en dos subproblemas algo más sencillos  $[P_1]$  y  $[P_F]$ , el primero con  $F=0$  (ya resuelto) y el otro con  $f=0$ :

$$[P_1] \begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

$$[P_F] \begin{cases} u_t - ku_{xx} = F(x, t) \\ u(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

La solución  $u_F$  de  $[P_F]$  se hallaría como arriba, simplemente sustituyendo los datos iniciales  $T_n(0) = c_n$  por los homogéneos  $T_n(0) = 0$ .

La solución  $u$  de  $[P_3]$  (por la linealidad de la ecuación y de las condiciones iniciales y de contorno) sería la suma de esta  $u_F$  y de la serie solución de  $[P_1]$  que ya obtuvimos.

[Normalmente descomponer en subproblemas es una pérdida de tiempo. Quizás sólo pueda ser útil si alguno de ellos estuviese ya resuelto, como es nuestro caso].

Resolvemos ahora el problema homogéneo para la varilla con **extremos aislados**:

$$[P_4] \begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0, & x \in (0, L), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0 \end{cases}$$

Separando variables (es la misma ecuación) aparecen, claramente, las mismas EDOs del problema [P<sub>1</sub>]. Pero ahora cambian las condiciones de contorno de la  $X$ :

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(L) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad X_n = \left\{ \cos \frac{n\pi x}{L} \right\} [X_0 = \{1\}].$$

Para estos valores de  $\lambda$  se tienen las  $T_n = \{e^{-kn^2 \pi^2 t / L^2}\} [T_0 = \{1\}]$ .

Así pues, probamos la serie: 
$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-kn^2 \pi^2 t / L^2} \cos \frac{n\pi x}{L}.$$

Queremos que se satisfaga la condición inicial:  $u(x, 0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} = f(x)$ .

Los  $a_n$  desconocidos serán los coeficientes de la serie de Fourier en cosenos de  $f$ :

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Observemos que también aquí la solución se puede interpretar como la suma de una distribución de temperaturas estacionaria [ $a_0/2$ ] y una distribución transitoria que tiende a 0 cuando  $t \rightarrow \infty$ . Era esperable que toda la varilla (aislada) tendiese a la misma temperatura y que esta fuese el valor medio de las temperaturas iniciales:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx.$$

Si los datos de contorno hubiesen sido  $u_x(0, t) = F_0(t)$ ,  $u_x(L, t) = F_L(t)$  (flujo dado en los extremos), en general, no se puede encontrar una  $v(x, t)$  que sea una recta y, al hacer  $w = u - v$ , la ecuación en  $w$  que resulta es no homogénea.

Para resolver un problema no homogéneo con estas condiciones en la  $u_x$ , probaríamos la serie con las **autofunciones del homogéneo** que hemos hallado:

$$u(x, t) = T_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cos \frac{n\pi x}{L},$$

y calcularíamos las  $T_n$  resolviendo las EDOs (en general no homogéneas) que surgirían, con los datos iniciales que se deducen del dato inicial de la EDP.

**Ej 2.** 
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & u_x(0, t) = 0, u_x(1, t) = 2 \end{cases}$$

Tanteando con  $v = Ax^2 + Bx$  obtenemos que  $v = x^2$  cumple las condiciones de contorno. Y haciendo  $w = u - x^2$  se tiene el problema:

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} = 2 \\ w(x, 0) = -x^2 \\ w_x(0, t) = w_x(1, t) = 0 \end{cases} \rightarrow w = T_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cos n\pi x \rightarrow T_0' + \sum_{n=1}^{\infty} [T_n' + n^2 \pi^2 T_n] \cos n\pi x = 2$$

[constante que ya está desarrollada en cosenos].

Del dato inicial se infiere:  $T_0(0) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \cos n\pi x = -x^2 = -\frac{1}{3} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2 \pi^2} \cos n\pi x$ , ya que:

$$a_0 = -2 \int_0^1 x^2 dx = -\frac{2}{3} \quad \text{y} \quad a_n = -2 \int_0^1 x^2 \cos n\pi x dx = \frac{4}{n\pi} \int_0^1 x \sin n\pi x dx = \dots$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T_0' = 2 \\ T_0(0) = -\frac{1}{3} \end{cases}, \quad \begin{cases} T_n' + n^2 \pi^2 T_n = 0 \\ T_n(0) = a_n \end{cases}. \quad \text{Resolviendo y deshaciendo el cambio se llega a}$$

$$u(x, t) = 2t + x^2 - \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{-n^2 \pi^2 t} \cos n\pi x.$$

[ $u \rightarrow \infty$  pues por el extremo derecho estamos constantemente metiendo calor: su flujo va en sentido opuesto al gradiente de temperaturas].

Veamos más ejemplos de separación de variables para la ecuación del calor o EDPs similares. El primero es no homogéneo. Y sus condiciones de contorno no nos han aparecido aquí todavía:

**Ej 3.** 
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = t \operatorname{sen} x, & x \in (0, \frac{\pi}{2}), t > 0 \\ u(x, 0) = u(0, t) = u_x(\frac{\pi}{2}, t) = 0 \end{cases}$$
 Necesitamos las autofunciones del homogéneo para saber qué solución probar. Al separar variables en  $u_t - u_{xx} = 0$  vimos que aparecía:

$X'' + \lambda X = 0$  (además de  $T' + \lambda T = 0$  que ahora no nos importa). Esto, con las condiciones  $X(0) = X'(\frac{\pi}{2}) = 0$  que salen de los datos de contorno nos da (problema conocido en 3.2) dichas autofunciones:  $X_n = \{\operatorname{sen}(2n-1)x\}$ ,  $n=1, 2, \dots$ . Llevamos, pues, a la ecuación:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \operatorname{sen}(2n-1)x \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} [T'_n + (2n-1)^2 T_n] \operatorname{sen}(2n-1)x = t \operatorname{sen} x.$$

La  $F(x, t)$  de la derecha ya está desarrollada en esas autofunciones (no hay que integrar). Hemos obtenido las ecuaciones ordinarias:  $T'_1 + T_1 = t$  y  $T'_n + (2n-1)^2 T_n = 0$ ,  $n > 1$ .

Del dato inicial deducimos:  $u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \operatorname{sen}(2n-1)x = 0 \rightarrow T_n(0) = 0 \forall n$ .

La única  $T_n \neq 0$  saldrá de:  $\begin{cases} T'_1 + T_1 = t \\ T_1(0) = 0 \end{cases} \rightarrow T_1 = Ce^{-t} + e^{-t} \int e^t t dt = Ce^{-t} + t - 1$   
[O más corto:  $T_{np} = At + B \rightarrow A + At + B = t$ ].

Imponiendo  $T_1(0) = 0$ , hallamos  $T_1$  y la solución única:  $u(x, t) = (e^{-t} + t - 1) \operatorname{sen} x$ .

[La 'serie solución' sólo tiene un término y no hemos necesitado integrales para dar los  $c_n$  y  $B_n$ . Esto ocurrirá si las  $f$  o  $F$  son autofunciones o sumas finitas de ellas].

El siguiente nos sirve para reflexionar sobre las  $v$  que hacen cero las condiciones de contorno (siempre necesario).

**Ej 4.** 
$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = 1 \\ u_x(0, t) = 0, u(\pi, t) = e^{-4t} \end{cases}$$
 Tenemos también demostrada (desde 1.3) su unicidad. Una  $v$  que cumple las condiciones de contorno salta a la vista:  $v(t) = e^{-4t}$ . Haciendo  $w = u - v$ :

$$\begin{cases} w_t - 4w_{xx} = [u_t - 4u_{xx}] - [v_t - 4v_{xx}] = 4e^{-4t} \\ w(x, 0) = w_x(0, t) = w(\pi, t) = 0 \end{cases}$$
 [problema no homogéneo].

Aquí las autofunciones las da  $X'' + \lambda X = 0$  con  $X'(0) = X(\pi) = 0$ , lo que nos lleva a:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cos \frac{(2n-1)x}{2} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} [T'_n + (2n-1)^2 T_n] \cos \frac{(2n-1)x}{2} = 4e^{-4t} \rightarrow$$

$$\begin{cases} T'_n + (2n-1)^2 T_n = B_n e^{-4t} \\ T_n(0) = 0 \text{ (del dato inicial)} \end{cases}, \text{ con } B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 4 \cos \frac{(2n-1)x}{2} dx = \frac{16(-1)^{n+1}}{\pi(2n-1)}.$$

Resolvemos la EDO lineal utilizando coeficientes indeterminados:  $T_{np} = Ae^{-4t} \rightarrow$

$$T_n = Ce^{-(2n-1)^2 t} + \frac{B_n e^{-4t}}{(2n-1)^2 - 4} \xrightarrow{T_n(0)=0} T_n(t) = \frac{16(-1)^{n+1}}{\pi(2n-3)(2n-1)(2n+1)} [e^{-4t} - e^{-(2n-1)^2 t}].$$

¿Podríamos encontrar una  $v$  mejor que no estropee la homogeneidad de la ecuación? Buscamos  $v(x, t)$  que también la cumpla. Al separar variables vimos que es solución, para todo  $\lambda$ , el producto de soluciones de  $X'' + \lambda X = 0$  y de  $T' + 4\lambda T = 0$ . En particular,  $\forall A, B$  lo es:  $v = e^{-4t}(A \cos x + B \operatorname{sen} x)$ . Imponiendo a esta  $v$  los datos de contorno:

$$v = -e^{-4t} \cos x \xrightarrow{u=v+w} \begin{cases} w_t - 4w_{xx} = 0 \\ w(x, 0) = 1 + \cos x \\ w_x(0, t) = w(\pi, t) = 0 \end{cases}$$
 [problema homogéneo y, por tanto, más sencillo]  $\rightarrow$ 

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(2n-1)^2 t} \cos \frac{(2n-1)x}{2} \rightarrow w(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{(2n-1)x}{2} = 1 + \cos x \rightarrow$$

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1 + \cos x) \cos \frac{(2n-1)x}{2} dx = \frac{2(-1)^n}{\pi} \left[ \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n-3} - \frac{2}{2n-1} \right].$$

Evidentemente, deben coincidir las soluciones halladas por los dos caminos:

$$u = e^{-4t} + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cos \frac{(2n-1)x}{2} \text{ y } u = -e^{-4t} \cos x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(2n-1)^2 t} \cos \frac{(2n-1)x}{2}.$$

[Observemos que las soluciones tienden a 0 cuando  $t \rightarrow \infty$ . Esto era esperable, pues uno de los extremos está aislado y al otro le obligamos a tener una temperatura que tiende a 0].

En este, la condición de  $x=0$  representa la radiación libre hacia un medio a  $0^\circ$  (el flujo de calor es proporcional a la temperatura: si es positiva el calor sale y entra si es negativa). En  $x=1$  fijamos el flujo de calor que sale de la varilla (al ser  $u_x > 0$ , es hacia la izquierda).

**Ej 5.** 
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = x \\ u_x(0, t) - au(0, t) = 0, & a > 0 \\ u_x(1, t) = 1 \end{cases}$$

También probamos en 1.3 que tiene solución única. Lo primero, como siempre, es llevar a homogéneas las condiciones de contorno encontrando una  $v$ . Tanteando con rectas  $v = Mx + N$ , se ve que las cumple:

$$v = x + \frac{1}{a}, \quad w = u - v \rightarrow \begin{cases} w_t - w_{xx} = 0 \\ w(x, 0) = -\frac{1}{a}, \quad w_x(0, t) - aw(0, t) = w_x(1, t) = 0 \end{cases}$$

Separando variables se llega a  $T' + \lambda T = 0$  y al problema de contorno:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) - aX(0) = X'(1) = 0 \end{cases} \quad \text{que sabemos que no tiene autovalores } < 0.$$

Si  $\lambda = 0$ :  $X = c_1 + c_2x \rightarrow \begin{cases} c_2 - ac_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda = 0$  no autovalor.

Si  $\lambda > 0$ :  $X = c_1 \cos wx + c_2 \sin wx$ ,  $w = \sqrt{\lambda} \rightarrow$

$$\begin{cases} c_2 w - ac_1 = 0 \\ c_2 \cos w - c_1 \sin w = 0 \end{cases} \rightarrow c_2 = \frac{a}{w} c_1 \rightarrow c_1(a \cos w - w \sin w) = 0 \rightarrow \tan w = \frac{a}{w}.$$

Esta ecuación trascendente nos da los infinitos  $\lambda_n = w_n^2 > 0$  (aproximables numéricamente).

Las autofunciones son:  $\left\{ \cos w_n x + \frac{a}{w_n} \sin w_n x \right\}$ , aunque quedan más compactas escritas en la forma:  $X_n = \left\{ \cos w_n(x-1) \right\}$ .

Yendo a la ecuación en  $T$ :  $T_n = \{e^{-\lambda_n t}\} \rightarrow w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n t} X_n(x)$ .

Imponiendo el dato inicial se determinan los  $c_n$  [serían aproximados al serlo los  $\lambda_n$ ]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x) = -\frac{1}{a} \rightarrow c_n = -\frac{1}{\langle X_n, X_n \rangle} \int_0^1 \frac{1}{a} X_n(x) dx = -\frac{4 \sin w_n}{a(2w_n + \sin 2w_n)},$$

pues  $\int_0^1 [X_n(x)]^2 dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{4w_n} [\sin 2w_n(x-1)]_0^1$ .

Sí se calcula exactamente la distribución estacionaria hacia la que tienden las temperaturas en la varilla:

$$u(x, t) = w(x, t) + x + \frac{1}{a} \rightarrow x + \frac{1}{a} \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

[La temperatura final de la varilla, como era esperable, es menor cuanto mayor sea el  $a$ , es decir, cuanto más fuertemente irradie su extremo].

En los últimos ejemplos que tratamos vemos que se puede aplicar el método de separación de variables para otras ecuaciones parabólicas separables (y no sólo para la del calor).

**Ej 6.** 
$$\begin{cases} u_t - 4(1+2t)u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = 1, \quad u(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

Es problema homogéneo. Primero separamos variables  $u = XT$  en la nueva ecuación:

$$XT' = (4+8t)X''T, \quad \frac{X''}{X} = \frac{T'}{(4+8t)T} = -\lambda \rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases}, \quad \lambda_n = \frac{(2n-1)^2}{4}, \quad X_n = \left\{ \sin \frac{(2n-1)x}{2} \right\},$$

$n = 1, 2, \dots$

Y además:  $T' + 4\lambda_n(1+2t)T = T' + (2n-1)^2(1+2t)T = 0 \rightarrow T_n = \left\{ e^{-(2n-1)^2(t+t^2)} \right\}$ .

Probamos entonces la solución:  $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(2n-1)^2(t+t^2)} \sin \frac{(2n-1)x}{2}$ .

Para determinar los  $c_n$  imponemos el dato inicial:  $u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{(2n-1)x}{2} = 1 \rightarrow$

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin \frac{(2n-1)x}{2} dx = -\frac{4}{\pi(2n-1)} \cos \frac{(2n-1)x}{2} \Big|_0^\pi = \frac{4}{\pi(2n-1)}.$$

Por tanto, la solución del problema es:  $u(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} e^{-(2n-1)^2(t+t^2)} \sin \frac{(2n-1)x}{2}$ .

[Para ser serios habría que probar su unicidad siguiendo la demostración del calor].  
[Ya hemos dicho que la ecuación del calor (y similares) admiten datos discontinuos].

**Ej 7.** 
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + 3u = F(x), & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

[El término  $+3u$  representa una pérdida de calor al medio a lo largo de la varilla].

- a) Hallemos su solución si  $F(x) = 4 \sin x$ .  
 b) 2 términos de la serie solución si  $F(x) = \pi$ .

Busquemos las  $X_n$  del homogéneo:

Separando variables:  $u(x, t) = X(x)T(t) \rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} + 3 = -\lambda$  [ damos el 3 mejor a la  $T$  para tener la  $X$  habitual ]  $\rightarrow$

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, \dots, \quad X_n = \{\sin nx\}.$$

[Y además  $T' + (3 + \lambda)T = 0$ , que aquí no se utiliza por ser problema no homogéneo].

Llevamos  $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin nx$  a la EDP y al dato inicial para calcular los  $T_n$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} [T'_n + (n^2 + 3)T_n] \sin nx = F(x), \text{ a desarrollar en } \sin nx \text{ para igualar las expresiones.}$$

Además:  $u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin nx = 0 \rightarrow T_n(0) = 0 \forall n$ . Nos queda en cada caso:

a)  $\frac{T'_1 + 4T_1}{T_1(0)} = 4 \rightarrow T_1 = 1 - e^{-4t}$ , y los demás  $T_n = 0$ . La solución es  $u = (1 - e^{-4t}) \sin x$ .

b) El desarrollo es  $\pi = 4 \sin x + \frac{4}{3} \sin 3x + \dots$ , pues  $c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \pi \sin nx \, dx = 2 \frac{1 - (-1)^n}{n}$ .

A la vista de este desarrollo, es no nulo  $T_1$  [el de a)] y el siguiente no nulo lo da:

$$\frac{T'_3 + 12T_3}{T_3(0)} = \frac{4}{3} \rightarrow T_3 = \frac{1}{9}(1 - e^{-12t}) \rightarrow u = (1 - e^{-4t}) \sin x + \frac{1}{9}(1 - e^{-12t}) \sin 3x + \dots$$

[Se puede ver casi igual que para el calor que la solución es única; o bien, haciendo  $u = e^{-3t} w$  se obtiene un problema para el calor con esos datos, cuya unicidad ya demostramos].

Hasta ahora la EDO del problema de Sturm-Liouville siempre ha sido  $X'' + \lambda X = 0$ , y, por eso, las series de Fourier eran todas con peso  $r(x) = 1$ . Resolvamos un ejemplo para una EDP parabólica en el que aparece otra ecuación ordinaria más complicada para la que es necesario utilizar la teoría general del capítulo 3.

**Ej 8.** 
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - 4u_x - 4u = 0, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = e^{-2x}, & u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

$u = XT \rightarrow \frac{T'}{T} = \frac{X'' + 4X'}{X} + 4 = -\lambda$  más corto ahora aquí

$$\begin{cases} X'' + 4X' + (4 + \lambda)X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \text{ (en forma autoadjunta } [e^{4x} X']' + 4e^{4x} X + \lambda e^{4x} X = 0) \text{ y } T' + \lambda T = 0.$$

Hay que resolver el problema de contorno (y debemos tratar los  $\lambda < 0$ ).  $\mu = -2 \pm \sqrt{-\lambda}$ .

$\lambda < 0$ :  $X = c_1 e^{(-2+\rho)x} + c_2 e^{(-2-\rho)x} \xrightarrow{CC} X \equiv 0$ .  $\lambda = 0$ :  $X = (c_1 + c_2 x) e^{-2x} \xrightarrow{CC} X \equiv 0$ .

$\lambda > 0$ :  $X = (c_1 \cos wx + c_2 \sin wx) e^{-2x}$ ,  $c_1 = 0$ ,  $c_2 e^{-2\pi} \sin w\pi = 0$ ,  $\lambda_n = n^2$ ,  $X_n = \{e^{-2x} \sin nx\}$   
 $n = 1, 2, \dots$

Probamos pues la solución:  $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} e^{-2x} \sin nx$ . Falta el dato inicial:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-2x} \sin nx = e^{-2x}. \text{ Aunque hay atajos seguimos con la teoría general:}$$

Para calcular los  $c_n$  necesitamos hallar  $(X_n, X_n) = \int_0^{\pi} e^{4x} e^{-4x} \sin^2 nx \, dx = \frac{\pi}{2}$ , y además:

$$(e^{-2x}, X_n) = \int_0^{\pi} e^{4x} e^{-2x} e^{-2x} \sin nx \, dx = -\frac{1}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} = \frac{1 - (-1)^n}{n}.$$

Por tanto, la solución es:  $u(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-(2m-1)^2 t}}{2m-1} e^{-2x} \sin(2m-1)x$ .

Veamos ahora los atajos. El primero es observar que la igualdad de  $u(x, 0)$  equivale a:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx = 1 \text{ (desarrollo de 1 en senos)} \rightarrow c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx \text{ (calculado arriba).}$$

El segundo sale de recordar (1.2) que cambios del tipo  $u = e^{pt+qx} w$  simplifican la ecuación. Podríamos tantear, pero en este caso todo pide hacer:

$$u = e^{-2x} w \rightarrow u_t = e^{-2x} w_t, \quad u_x = e^{-2x} [w_x - 2w], \quad u_{xx} = e^{-2x} [w_{xx} - 4w_x + 4w] \rightarrow$$

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} = 0 \\ w(x, 0) = 1, \quad w(0, t) = w(\pi, t) = 0 \end{cases}, \text{ problema cuya solución ya calculamos (pág. 58).}$$

## 4.2. Separación de variables para ondas

Resolvamos el problema para la **cuerda vibrante** con **extremos fijos** (en 1.4 lo hicimos extendiendo los datos y aplicando la fórmula de D'Alembert):

$$[P_1] \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x \in [0, L], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x) \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \end{cases} \quad \text{[Para que no esté rota se supone } f(0) = f(L) = 0 \text{].}$$

Separando variables  $u = X(x)T(t)$  e imponiendo los datos de contorno obtenemos:

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} = -\lambda \rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & X(0) = X(L) = 0 \\ T'' + \lambda c^2 T = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, X_n = \left\{ \sin \frac{n\pi x}{L} \right\}_{n=1, 2, \dots}$$

Las  $T_n$  correspondientes son combinaciones lineales de  $\sin \frac{n\pi ct}{L}$  y  $\cos \frac{n\pi ct}{L}$ .

Así, funciones de la forma:  $u_n(x, t) = \left[ k_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + c_n \sin \frac{n\pi ct}{L} \right] \sin \frac{n\pi x}{L}$ ,  $n = 1, 2, \dots$

satisfacen la EDP y las condiciones de contorno. Probamos, pues:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ k_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + c_n \sin \frac{n\pi ct}{L} \right] \sin \frac{n\pi x}{L}$$

con  $k_n$  y  $c_n$  constantes. Para que se cumplan las condiciones iniciales:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \sin \frac{n\pi x}{L} = f(x) \rightarrow k_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, n = 1, 2, \dots$$

y suponiendo que la serie se puede derivar término a término:

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} = g(x) \rightarrow c_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, n = 1, 2, \dots$$

pues  $\frac{n\pi c}{L} c_n$  son los coeficientes del desarrollo de  $g$  en senos.

Tenemos una solución, al menos formal, aunque se prueba que la serie converge y satisface realmente el problema si  $f$  y  $g$  cumplen lo pedido en 1.4: si sus extensiones impares respecto a 0 y  $L$  son  $C^2$  y  $C^1$ , respectivamente (si  $f$  ó  $g$  no son tan regulares la serie solución será lo que llamamos solución débil; en las ondas se mantienen las discontinuidades).

Para algunas cuestiones (valores concretos, dibujos, ...) es mejor usar D'Alembert, pero se ven mejor otras propiedades en la serie. Por ejemplo, como todas las  $u_n$  tienen este periodo, también  $u$  es  $2L/c$ -periódica en  $t$ . Observemos además que la solución aparece como combinación infinita de 'modos naturales de vibración'  $[\sin(n\pi x/L)]$  cada uno de los cuales vibra con una frecuencia  $n\pi c/L$  (las 'frecuencias naturales' de la cuerda). En términos acústicos  $u_1$  da el tono fundamental (su frecuencia es  $\pi c/L$ ) y los demás son los 'armónicos' (de frecuencia múltiplo de la anterior).

Como siempre, para comenzar a resolver por separación de variables, han de ser las condiciones de contorno homogéneas. Y para los problemas no homogéneos se prueban series de autofunciones del homogéneo.

**Ej 1.** 
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in [0, 1], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1-x, & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \\ u_t(x, 0) = u(0, t) = u(1, t) = 0 \end{cases}$$

(Ej 7 de 1.4 que podía mirarse como la pulsación de la cuerda de una guitarra).

Basta copiar de arriba:  $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \cos n\pi t \sin n\pi x$  (2-periódica),

$$\text{con } k_n = 2 \int_0^{1/2} x \sin n\pi x dx + 2 \int_{1/2}^1 (1-x) \sin n\pi x dx = \frac{4}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \quad (= 0 \text{ si } n \text{ par}).$$

(Se ve que pulsando la cuerda en el centro desaparecen los armónicos pares).

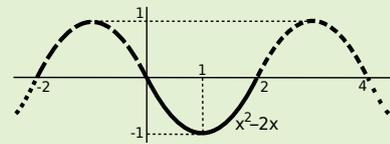
Ej 2.

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0, \quad x \in [0, 2], \quad t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) &= x^2, \quad u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) &= 0, \quad u(2, t) = 4 \end{aligned}$$

Hallemos  $u(1, 2)$  y  $u(x, 1)$ , utilizando D'Alembert y por separación de variables. En ambos casos, lo primero es hacer las condiciones de contorno homogéneas.

La  $v(x, t) = [1 - \frac{x}{L}]h_0(t) + \frac{x}{L}h_L(t)$  citada en 1.4 (y en la sección anterior) es la adecuada:

$$v = 2x, \quad w = u - 2x \rightarrow \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0, \quad x \in [0, 2] \\ w(x, 0) = x^2 - 2x, \quad w_t(x, 0) = 0 \\ w(0, t) = w(2, t) = 0 \end{cases}$$



Para D'Alembert debemos extender  $f$  de forma impar y 4-periódica a una  $f^*$  definida en  $\mathbf{R}$ :

$$\dots, \quad -x(x+2) \text{ en } [-2, 0], \quad x(x-2) \text{ en } [0, 2], \quad -(x-4)(x-2) \text{ en } [2, 4], \dots$$

La solución viene dada por  $w = \frac{1}{2}[f^*(x+t) + f^*(x-t)]$ . Por tanto:

$$w(1, 2) = \frac{1}{2}[f^*(3) + f^*(-1)] \underset{4\text{per}}{=} \frac{1}{2}[f^*(-1) + f^*(-1)] \underset{\text{impar}}{=} -f(1) = 1 \rightarrow u(1, 2) = 3.$$

Para hallar  $w(x, 1)$  aparecen dos casos (se podría ver con los dominios de dependencia):

$$w(x, 1) = \frac{1}{2}[f^*(x+1) + f^*(x-1)] = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \quad \frac{1}{2}[-(x-1)(x+1) + (x+1)(x-1)] = 0 \\ 1 \leq x \leq 2, \quad \frac{1}{2}[-(x-1)(x-3) + (x-3)(x-1)] = 0 \end{cases} \rightarrow u(x, 1) = 2x.$$

[Es claro que llevando  $f^*$  una unidad a izquierda y derecha y sumando todo se cancela].

Para resolver el problema en  $w$  separando variables copiamos de la página anterior:

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} k_n \cos \frac{n\pi t}{2} \sin \frac{n\pi x}{2} \quad \text{con} \quad k_n = \int_0^2 (x^2 - 2x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{16}{n^3 \pi^3} [\cos n\pi - 1] \\ &\rightarrow w(x, t) = -\frac{32}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^3} \cos \frac{(2m-1)\pi t}{2} \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2}. \end{aligned}$$

Para  $t=1$  todos los cosenos se anulan, con lo que es  $w(x, 1) = 0$  (como por D'Alembert).

$$\text{Además} \quad w(1, 2) = \frac{32}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)^3} \left[ = 1; \text{ deducimos de esto que } 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots = \frac{\pi^3}{32} \right].$$

Ej 3.

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= x, \quad x \in [0, \pi], \quad t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) &= u_t(x, 0) = u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{aligned}$$

No homogéneo  $\rightarrow u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin nx$ .

Esta serie ya se anula en  $x=0$  y  $x=\pi$ . Además, llevándola a la EDP y datos se tiene:

$$T_n'' + n^2 T_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = \frac{2[-1]^{n+1}}{n} \rightarrow T_n = c_1 \cos nt + c_2 \sin nt + \frac{2[-1]^{n+1}}{n^3}.$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \rightarrow T_n(0) = T_n'(0) = 0 \rightarrow u(x, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[-1]^{n+1}}{n^3} [1 - \cos nt] \sin nx.$$

De otra forma: podríamos conseguir un problema homogéneo hallando una solución de la ecuación  $v(x)$  que cumpla las condiciones de contorno:

$$-v'' = x \rightarrow v = c_1 + c_2 x - \frac{1}{6} x^3 \quad v(0) = v(\pi) = 0 \rightarrow v = \frac{1}{6} (\pi^2 x - x^3).$$

Con  $w = u - v$ , acabamos en  $[P_1]$ , con  $f(x) = -v(x)$  y  $g(x) = 0$ , con lo que:

$$u = \frac{1}{6} (\pi^2 x - x^3) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[-1]^n}{n^3} \cos nt \sin nx, \quad \text{pues} \quad \frac{1}{3\pi} \int_0^{\pi} (x^3 - \pi^2 x) \sin nx dx = \frac{2[-1]^n}{n^3}.$$

Aunque las series anteriores proporcionan la solución  $\forall(x, t)$ , el problema es obtener (sin ordenador) información sobre ellas. Por ejemplo, ¿qué aspecto tendrá:

$$u(x, \pi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{(2m-1)^3} \sin(2m-1)x = \frac{1}{6} (\pi^2 x - x^3) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3} \sin nx?$$

Esto es fácil decirlo con D'Alembert en este caso. El valor para el problema en  $w$  será:

$$w(x, \pi) = \frac{1}{2}[f^*(x+\pi) + f^*(x-\pi)],$$

siendo  $f^*$  la extensión impar y  $2\pi$ -periódica de  $-v$ .

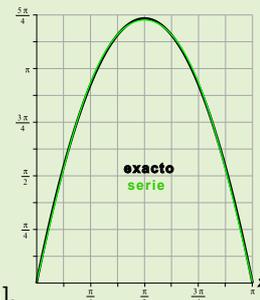
Por la periodicidad y ser  $f^*(x)$  en  $[-\pi, 0]$  la inicial (es  $v$  impar):

$$w(x, \pi) = f^*(x-\pi) = -v(x-\pi), \quad \text{si } x \in [0, \pi] \Rightarrow$$

$$u(x, \pi) = v(x) - v(x-\pi) = \frac{x(\pi+x)(\pi-x)}{6} - \frac{(x-\pi)x(2\pi-x)}{6} = \frac{\pi}{2} x(\pi-x),$$

parábola invertida con su máximo en  $x = \frac{\pi}{2}$  que es fácil de dibujar.

[A la derecha el dibujo de 2 términos de la primera serie junto a esa parábola].



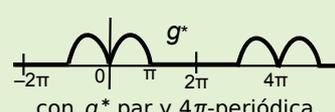
Otros tipos de condiciones de contorno también proporcionan problemas resolubles separando variables. La condición  $u_x=0$  significa que ese extremo **se mueve con libertad** verticalmente (se puede imaginar una anilla engrasada al final de la cuerda rodeando una varilla vertical) y las  $u_x-au=0$  ó  $u_x+bu=0$  indican que el extremo está unido por un muelle al punto de anclaje.

Ya dijimos en 1.4 que las condiciones  $u_x=0$  llevaban a extensiones **pares**.

[Separando variables salían las  $X_n=\sin\frac{n\pi x}{L}$  con condiciones  $u=0$  y saldrán  $\cos\frac{n\pi x}{L}$  con  $u_x=0$ . La periodicidad y paridades son las mismas resolviendo el problema por ambos métodos].

**Ej 4.**  $u_{tt}-u_{xx}=0, x\in[0, 2\pi], t\in\mathbf{R}$   
 $u(x,0)=0, u_t(x,0)=\begin{cases} \sin x, & x\in[0,\pi] \\ 0, & x\in[\pi,2\pi] \end{cases}$   
 $u_x(0,t)=u_x(2\pi,t)=0$

Hallemos  $u(x, 2\pi)$ , por D'Alembert y separando variables.

$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, & x, t\in\mathbf{R} \\ u(x,0)=0 \\ u_t(x,0)=g^*(x) \end{cases}$    
 con  $g^*$  par y  $4\pi$ -periódica.

Luego  $u(x, 2\pi) = \frac{1}{2} \int_{x-2\pi}^{x+2\pi} g^* = \frac{1}{2} \int_{-2\pi}^{2\pi} g^* = \int_0^\pi \sin s ds = 2$ .  
 [la integral en un periodo de una periódica no depende del intervalo].

Separando variables:  $X''+\lambda X=0, X'(0)=X'(2\pi)=0 \rightarrow \lambda_n = \frac{n^2}{4}, X_n = \{\cos\frac{n x}{2}\}, n=0, 1, \dots$

$\begin{cases} T''+\lambda_n T=0 \\ T(0)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T_0 = \{t\} \\ T_n = \{\sin\frac{n t}{2}\}, n \geq 1 \end{cases} \rightarrow u(x, t) = \frac{a_0}{2} t + \sum_{n=1}^\infty a_n \sin\frac{n t}{2} \cos\frac{n x}{2}, u(x, 2\pi) = a_0 \pi$ .

Basta  $a_0$ :  $u_t(x,0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty a_n \frac{n}{2} \cos\frac{n x}{2} = g(x) \rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x dx = \frac{2}{\pi}, u(x, 2\pi) = 2$ .

[La  $u \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty$ : sube inicialmente, los extremos están libres y la cuerda asciende indefinidamente].

En este ejemplo no homogéneo imponemos condiciones distintas en cada extremo:

**Ej 5.**  $u_{tt}-u_{xx}=\sin x, x\in[0, \frac{\pi}{2}], t\in\mathbf{R}$   
 $u(x,0)=\pi x, u_t(x,0)=u(0,t)=u_x(\frac{\pi}{2},t)=0$

Las autofunciones las da:  $\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X'(\frac{\pi}{2})=0 \end{cases} \rightarrow X_n = \{\sin(2n-1)x\}, n=1, 2, \dots$

Se lleva  $u = \sum_{n=1}^\infty T_n(t) \sin(2n-1)x$  a EDP y datos:  $\sum_{n=1}^\infty [T_n'' + (2n-1)^2 T_n] \sin(2n-1)x = \sin x$  (ya desarrollada).

$u(x,0) = \sum_{n=1}^\infty T_n(0) \sin(2n-1)x = \pi x = \sum_{n=1}^\infty b_n X_n, u_t(x,0) = \sum_{n=1}^\infty T_n'(0) \sin(2n-1)x = 0 \rightarrow$   
 $T_n(0) = b_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \pi x \sin(2n-1)x dx = \frac{4(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}$  y  $T_n'(0) = 0 \forall n$ .

Debemos resolver un problema no homogéneo e infinitos homogéneos (para  $n \geq 2$ ):

$\begin{cases} T_1'' + T_1 = 1, T_1 = c_1 \cos t + c_2 \sin t + 1 \\ T_1(0) = 4, T_1'(0) = 0 \end{cases}, T_1 = 1 + 3 \cos t. \begin{cases} T_n'' + (2n-1)^2 T_n = 0 \\ T_n(0) = b_n, T_n'(0) = 0 \end{cases}, T_n = b_n \cos(2n-1)t$ .

Luego  $u(x, t) = (1 + 3 \cos t) \sin x + \sum_{n=2}^\infty \frac{4(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)t \sin(2n-1)x$ .

En el siguiente aparece un término adicional (puede representar un rozamiento con el medio):

**Ej 6.**  $u_{tt}+4u_t-u_{xx}=0, x\in[0, \pi], t\in\mathbf{R}$   
 $u(x,0)=\sin 2x, u_t(x,0)=u(0,t)=u(\pi,t)=0$

Como la ecuación es nueva, debemos comenzar separando variables:

$u = XT \rightarrow X[T''+4T'] - X''T = 0 \rightarrow \frac{T''+4T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda \rightarrow \begin{cases} x'' + \lambda x = 0 \\ X(0)=X(\pi)=0 \end{cases} \rightarrow$   
 $\lambda_n = n^2, n=1, 2, \dots, X_n = \{\sin nx\} \rightarrow T''+4T'+n^2T=0, \mu = -2 \pm \sqrt{4-n^2} \rightarrow$   
 $T_1 = c_1 e^{(-2+\sqrt{3})t} + c_2 e^{(-2-\sqrt{3})t}, T_2 = (c_1 + c_2 t) e^{-2t},$   
 $T_{n \geq 3} = e^{-2t} (c_1 \cos \sqrt{n^2-4}t + c_2 \sin \sqrt{n^2-4}t).$

Probamos, pues,  $u(x, t) = \sum_{n=1}^\infty T_n(t) \sin nx$ , a la que sólo le faltan las condiciones iniciales:

$u(x,0) = \sum_{n=1}^\infty T_n(0) \sin nx = \sin 2x, u_t(x,0) = \sum_{n=1}^\infty T_n'(0) \sin nx = 0 \rightarrow T_n(t) \equiv 0, \text{ si } n \neq 2$ .

Puesto que esas  $T_n$  son soluciones de EDOs homogéneas con datos iniciales nulos.

Sólo sobrevive  $T_2$ , para la que  $\begin{cases} T_2(0) = c_1 = 1 \\ T_2'(0) = c_2 - 2c_1 = 0 \end{cases} \rightarrow u(x, t) = (1 + 2t) e^{-2t} \sin 2x$ .  
 [La cuerda con rozamiento tiende a pararse].

La ecuación de ondas en el plano o el espacio y coordenadas no cartesianas (y también la del calor) dan lugar a ecuaciones que no son  $X'' + \lambda X = 0$  y se debe (como en el ejemplo 8 de 4.1) manejar la teoría general del capítulo 3. Los problemas en más variables se verán en 4.4, pero podemos resolver ya alguno si se reduce a uno de 2 variables.

Por ejemplo, la ecuación de ondas  $u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$  en recintos esféricos lleva, en general, a una EDP en 4 variables (el tiempo  $t$  y las variables esféricas  $r, \theta, \phi$ ). Sus soluciones quedan determinadas (como en la recta) con unos datos de contorno y un par de condiciones iniciales. Pero si buscamos sólo sus soluciones independientes de los ángulos aparece la **ecuación de ondas en el espacio con simetría radial** (en 2 variables y ya resuelta en 1.4). En concreto, vamos a resolver el siguiente problema homogéneo (vibraciones entre dos superficies esféricas):

$$[P_2] \begin{cases} u_{tt} - u_{rr} - \frac{2}{r} u_r = 0, & 1 \leq r \leq 2, t \in \mathbf{R} \\ u(r, 0) = f(r), u_t(r, 0) = g(r) \\ u(1, t) = u(2, t) = 0 \end{cases}$$

Separando variables:  $u(r, t) = R(r)T(t) \rightarrow \frac{R'' + \frac{2R'}{r}}{R} = \frac{T''}{T} = -\lambda \rightarrow \begin{cases} rR'' + 2R' + \lambda rR = 0, & R(1) = R(2) = 0 \\ T'' + \lambda T = 0 \end{cases}$

Vimos la ecuación de  $R$  en la sección 3.1 (allí asociada a un problema singular, aquí es regular pues estamos en el intervalo  $[1, 2]$ ). Se resolvía haciendo el cambio de variable:

$$S = rR \rightarrow \begin{cases} S'' + \lambda S = 0 \\ S(1) = S(2) = 0 \end{cases} \xrightarrow{r=s+1} \begin{cases} S'' + \lambda S = 0 \\ S(0) = S(1) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = n^2 \pi^2, n=1, 2, \dots \rightarrow R_n = \left\{ \frac{\text{sen } n\pi r}{r} \right\}.$$

Y para esos valores de  $\lambda$  las soluciones para  $T$  son  $T_n = \{ \cos n\pi t, \text{sen } n\pi t \}$ .

Probamos, pues:  $u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [k_n \cos n\pi t + c_n \text{sen } n\pi t] \frac{\text{sen } n\pi r}{r}$ .

Las condiciones iniciales imponen:  $\sum_{n=1}^{\infty} k_n \frac{\text{sen } n\pi r}{r} = f(r)$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} n\pi c_n \frac{\text{sen } n\pi r}{r} = g(r)$ .

Para hallar los coeficientes del desarrollo de una función en las autofunciones  $R_n(r)$  se debería en principio utilizar el peso del problema de Sturm-Liouville:  $[r^2 R']' + \lambda r^2 R = 0$ .

Como  $\langle R_n, R_n \rangle = \int_1^2 r^2 \frac{\text{sen}^2 n\pi r}{r^2} dr = \frac{1}{2}$  y  $\langle f, R_n \rangle = \int_1^2 r^2 f(r) \frac{\text{sen } n\pi r}{r} dr$ , concluimos que:

$$k_n = 2 \int_1^2 r f(r) \text{sen } n\pi r dr \quad \text{y} \quad c_n = \frac{2}{n\pi} \int_1^2 r g(r) \text{sen } n\pi r dr.$$

Evidentemente se llega a lo mismo (aquí es mucho más corto, pero otras veces no hay estos atajos) observando que las condiciones deducidas de las iniciales se podrían haber reescrito así:

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_n \text{sen } n\pi r = r f(r) \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n\pi c_n \text{sen } n\pi r = r g(r).$$

De hecho, todo el problema se hubiera simplificado notablemente si hubiéramos hecho inicialmente el cambio de variable de 1.4:

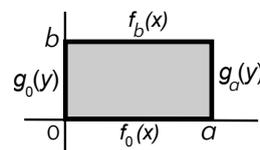
$$u = \frac{v}{r} \rightarrow \begin{cases} v_{tt} - v_{rr} = 0 \\ v(r, 0) = r f(r), v_t(r, 0) = r g(r) \\ v(1, t) = v(2, t) = 0 \end{cases}, \text{ problema casi igual al de la página 65.}$$

[Las ondas en **plano** con simetría radial satisfacen  $u_{tt} - u_{rr} - \frac{1}{r} u_r = 0$  y la ecuación en  $R$  es  $rR'' + R' + \lambda rR = 0$ , que (como vimos en 3.1) está asociada a las funciones de **Bessel**. Este tipo de problemas se verán al final de 4.4].

### 4.3. Separación de variables para Laplace

Resolvamos utilizando el método de separación de variables diversos problemas para la ecuación de Laplace en recintos especialmente simples. Comenzamos por el primero que presentamos en 1.3 y cuya unicidad demostramos allí: el **problema de Dirichlet en un rectángulo**, es decir:

$$[P_1] \begin{cases} \Delta u = F(x, y), \text{ en } (0, a) \times (0, b) \\ u(x, 0) = f_0(x), u(x, b) = f_b(x) \\ u(0, y) = g_0(y), u(a, y) = g_a(y) \end{cases}$$



Por ser lineales la EDP y las condiciones, bastaría resolver los 5 subproblemas que se obtienen anulando 4 de las 5 funciones que aparecen y sumar las 5 soluciones (de hecho, conviene descomponer en menos o hacer cambios que anulen alguno de los términos no homogéneos). Comencemos resolviendo, por ejemplo, uno de los 4 problemas para la **ecuación homogénea**:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \text{ en } (0, a) \times (0, b) \\ u(x, 0) = f_0(x) \\ u(x, b) = u(0, y) = u(a, y) = 0 \end{cases} \quad u(x, y) = X(x)Y(y) \rightarrow X''Y + XY'' = 0 \rightarrow -\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = \lambda \rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ Y'' - \lambda Y = 0 \end{cases}$$

De  $u(0, y) = u(a, y) = 0$  se deduce  $X(0) = X(a) = 0$ , con lo que el problema de contorno para la  $X$  tiene solución no trivial si

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{a^2}, \quad X_n = \left\{ \text{sen } \frac{n\pi x}{a} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Para esos  $\lambda_n$  las soluciones para la  $Y$  son  $Y_n = c_1 e^{n\pi y/a} + c_2 e^{-n\pi y/a}$ . Además la condición homogénea  $u(x, b) = 0$  impone que  $Y(b) = 0$ . Nos interesan las  $Y_n$  que la cumplen:

$$c_2 = -c_1 e^{2n\pi b/a} \rightarrow Y_n = c_1 e^{n\pi b/a} (e^{n\pi[y-b]/a} - e^{n\pi[b-y]/a}) \rightarrow Y_n = \left\{ \text{sh } \frac{n\pi[b-y]}{a} \right\}$$

Probamos entonces: 
$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sh } \frac{n\pi[b-y]}{a} \text{sen } \frac{n\pi x}{a}.$$

Para satisfacer la condición de contorno no homogénea que falta:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sh } \frac{n\pi b}{a} \text{sen } \frac{n\pi x}{a} = f_0(x) \rightarrow c_n \text{sh } \frac{n\pi b}{a} = \frac{2}{a} \int_0^a f_0(x) \text{sen } \frac{n\pi x}{a} dx$$

Análogamente se resolverían los otros 3 subproblemas con  $F \equiv 0$  de  $[P_1]$ . En uno de ellos se tienen las  $X_n$  de antes, y en los otros dos es  $Y$  (con datos de contorno homogéneos) la que proporcionaría las autofunciones  $Y_n = \left\{ \text{sen } \frac{n\pi y}{b} \right\}$ .

[Los papeles de  $X$  e  $Y$  son intercambiables. En calor y ondas el problema de contorno siempre era para la  $X$  (las condiciones de  $T$  eran iniciales). Para Laplace en polares, aunque tanto  $R$  como  $\Theta$  tendrán condiciones de contorno, la EDO de la  $\Theta$  será más sencilla y la elegiremos siempre para obtener las autofunciones].

Para resolver el último subproblema, el de la **ecuación no homogénea**:

$$\begin{cases} \Delta u = F(x, y), \text{ en } (0, a) \times (0, b) \\ u(x, 0) = u(x, b) = u(0, y) = u(a, y) = 0 \end{cases}$$

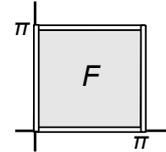
como siempre se prueba una serie de autofunciones. Aquí aparecen dos posibilidades [elegiremos la que dé un desarrollo más fácil para  $F$ ]:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \text{sen } \frac{n\pi x}{a} \quad \text{ó} \quad u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \text{sen } \frac{n\pi y}{b}$$

[No olvidemos que con un cambio  $w = u - v$ , o resolviendo menos subproblemas se puede llegar antes la solución; lo único necesario para empezar con separación de variables es que sea  $u=0$  en  $x=0, a$  ó en  $y=0, b$ ].

Siguiendo con Laplace en cartesianas, resolvemos ahora un **problema de Neumann**, que sabemos que puede no tener solución y que, si la tiene, contendrá una constante arbitraria. Suponemos la **ecuación no homogénea**, pero con condiciones de contorno homogéneas (si no lo fuesen, procederíamos de forma similar al problema anterior).

$$[P_2] \begin{cases} \Delta u = F(x, y), & \text{en } (0, \pi) \times (0, \pi) \\ u_y(x, 0) = u_y(x, \pi) = u_x(0, y) = u_x(\pi, y) = 0 \end{cases}$$



Separando variables en la EDP homogénea se obtienen, desde luego, las mismas EDOs que en  $[P_1]$ :  $X'' + \lambda X = 0$ ,  $Y'' - \lambda Y = 0$ .

Las condiciones de contorno obligan aquí a que sean  $X'(0) = X'(\pi) = 0$ ,  $Y'(0) = Y'(\pi) = 0$ . En el problema hay, pues, dos familias de autofunciones  $\{\cos nx\}$  ó  $\{\cos ny\}$ ,  $n=0, 1, \dots$  y podemos elegir cualquiera de ella para nuestra serie. Por ejemplo:

$$u(x, y) = X_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cos ny \rightarrow$$

$$X_0'' + \sum_{n=1}^{\infty} [X_n'' - n^2 X_n] \cos ny = \frac{B_0(x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(x) \cos ny, \quad B_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(x, y) \cos ny \, dy.$$

Debemos resolver los infinitos problemas de contorno para EDOs:

$$X_0'' = \frac{1}{2} B_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} F(x, y) \, dy, \quad X_n'' - n^2 X_n = B_n \quad (n \geq 1), \quad \text{con } X_n'(0) = X_n'(\pi) = 0 \text{ ambos.}$$

Las  $X_n$  con  $n \geq 1$  quedan determinadas de forma única (el problema homogéneo, como sabemos desde 3.1, tiene sólo la solución trivial).

Pero  $X_0'' = 0$ ,  $X_0'(0) = X_0'(\pi) = 0$  tiene soluciones no triviales ( $\{1\}$ ), con lo que, según 3.3, para que haya solución para  $X_0$  es necesario que sea  $\int_0^{\pi} 1 \cdot B_0(x) \, dx = 0$ .

$$\text{Es decir, } [P_2] \text{ tiene solución sólo si } \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} F(x, y) \, dx \, dy = 0.$$

Y en ese caso tiene infinitas que difieren en una constante. Todo esto es coherente con lo que sabíamos sobre Neumann desde 1.3. Aquí vemos que la no unicidad se detecta en el problema de contorno para  $R$ , habitualmente para  $n=0$ .

**Ej 1.** Calculemos la solución en el caso particular en que sea  $F(x, y) = x - a$ .

El problema sólo tiene solución si  $\int_{\square} F = \frac{1}{2} \pi^3 - a \pi^2 = 0$ , es decir, si  $a = \frac{\pi}{2}$ .

Entonces nos queda:  $X_0'' = x - \frac{\pi}{2}$  (por suerte, la  $F$  ya está desarrollada en  $\{\cos ny\}$ ).

Por la misma razón los  $B_n$ , y por tanto los  $X_n$ , son nulos si  $n \geq 1$ .

Integrando e imponiendo  $X_0'(0) = X_0'(\pi) = 0$  obtenemos  $u(x, y) = \frac{1}{6} x^3 - \frac{\pi}{4} x^2 + C$ .

[Si resolviésemos probando  $u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(y) \cos nx$  habría que desarrollar en serie.

Lo hacemos, aunque esto sea una pérdida de tiempo.

Los coeficientes del desarrollo de  $F = x - \frac{\pi}{2}$  en  $\cos nx$  son:

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cos nx \, dx = \begin{cases} 0, & \text{si } n=0, 2, 4, \dots \\ -\frac{4}{\pi n^2}, & \text{si } n=1, 3, \dots \end{cases}$$

$$Y_0'' + \sum_{n=1}^{\infty} [Y_n'' - n^2 Y_n] \cos nx = \sum_{m=1}^{\infty} B_{2m-1} \cos(2m-1)x \rightarrow$$

$$\begin{cases} Y_0'' = 0 \\ Y_0'(0) = Y_0'(\pi) = 0 \end{cases} \rightarrow Y_0 = C. \quad \begin{cases} Y_{2m}'' - 4m^2 Y_{2m} = 0 \\ Y_{2m}'(0) = Y_{2m}'(\pi) = 0 \end{cases} \rightarrow Y_{2m} = 0.$$

$$\begin{cases} Y_{2m-1}'' - (2m-1)^2 Y_{2m-1} = B_{2m-1} \\ Y_{2m-1}'(0) = Y_{2m-1}'(\pi) = 0 \end{cases} \rightarrow Y_{2m-1} = -\frac{B_{2m-1}}{(2m-1)^2}.$$

$$\rightarrow u = C + \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2m-1)x}{(2m-1)^4}, \text{ que (salvo constante) es el desarrollo de la } u \text{ de arriba}].$$

Dos ejemplos más en cartesianas. El primero para Laplace con **condiciones mixtas** (en parte Dirichlet, en parte Neumann). Ya dijimos en 1.3 que todos ellos tienen solución única.

**Ej 2.**  $\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, (x, y) \in (0, 1) \times (0, \pi) \\ u(x, 0) = u_y(x, \pi) = u(0, y) = 0, u(1, y) = 1 \end{cases}$   $u = X(x)Y(y) \rightarrow$

$$\begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0, Y(0) = Y'(\pi) = 0 \\ X'' - \lambda X = 0, X(0) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = \left(\frac{2n-1}{2}\right)^2, Y_n = \left\{ \sin \frac{(2n-1)y}{2} \right\}.$$

[Podemos poner el signo menos en cualquiera de las dos ecuaciones, y aquí hemos escogido la  $Y$ , que era la que tenía ambos datos de contorno nulos].

Para esos  $\lambda$  es  $X = c_1 e^{(2n-1)x/2} + c_2 e^{-(2n-1)x/2} \xrightarrow{X(0)=0} X_n = \left\{ \text{sh} \frac{(2n-1)x}{2} \right\}$ .

Probamos  $u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x) Y_n(y)$ . Imponiendo el dato  $u(1, y) = 1$  que falta:

$$c_n \text{sh} \frac{2n-1}{2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \frac{(2n-1)y}{2} dy = \frac{4}{\pi(2n-1)} \left[ 1 - \cos \frac{(2n-1)\pi}{2} \right] \rightarrow$$

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1) \text{sh} \frac{2n-1}{2}} \text{sh} \frac{(2n-1)x}{2} \sin \frac{(2n-1)y}{2}.$$

Si nos gustan más las condiciones de contorno para  $x$  podemos hacerlas homogéneas con un cambio de variable:

$$v = x, w = u - v \rightarrow \begin{cases} w_{xx} + w_{yy} = 0 \\ w(x, 0) = -x, w_y(x, \pi) = 0 \\ w(0, y) = w(1, y) = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, X(0) = X(1) = 0 \\ Y'' - \lambda Y = 0, Y'(\pi) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = n^2 \pi^2, X_n = \{ \sin n\pi x \}, Y_n = \{ \text{ch}[n\pi(\pi - y)] \}.$$

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} k_n X_n(x) Y_n(y) \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} k_n X_n(0) Y_n(y) = -x \rightarrow k_n = -\frac{2}{\text{ch}[n\pi^2]} \int_0^1 x \sin n\pi x dx$$

$$\rightarrow u(x, y) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\pi n \text{ch}[n\pi^2]} \text{ch}[n\pi(\pi - y)] \sin n\pi x$$

[que será otra expresión distinta de la misma solución única].

En todos los problemas que hemos resuelto en este capítulo (para el calor, para las ondas, el de Dirichlet, ... excepto el anterior de Neumann) la solución era única (todos eran problemas 'físicos'). Pero no olvidemos que probar la unicidad en EDPs es complicado, y que un problema nuevo del que no se ha demostrado la unicidad podría no tenerla. Eso pasa en el siguiente ejemplo (para una ecuación llamada de 'Helmholtz', muy asociada a los problemas de más de dos variables):

**Ej 3.**  $\begin{cases} \Delta u + u = 0, (x, y) \in (0, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \\ u_y(x, -\frac{\pi}{4}) = u_y(x, \frac{\pi}{4}) = 0 \\ u(0, y) = 0, u(\pi, y) = \sin 2y \end{cases}$  Como es ecuación nueva, separamos variables desde el principio:

$$u = XY \rightarrow \frac{X''}{X} + 1 = -\frac{Y''}{Y} = \lambda \rightarrow$$

$$\begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0 \\ Y'(-\frac{\pi}{4}) = Y'(\frac{\pi}{4}) = 0 \end{cases} \xrightarrow{s=y+\frac{\pi}{4}} \begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0 \\ Y'(0) = Y'(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = 4n^2, Y_n = \left\{ \cos 2n\left(y + \frac{\pi}{4}\right) \right\}, n = 0, 1, \dots$$

$$X'' + (1 - \lambda_n)X = 0, X(0) = 0 \rightarrow X_0 = \{ \sin x \} \text{ y } X_n = \{ \text{sh}(\sqrt{4n^2 - 1}x) \} \text{ si } n \geq 1.$$

$$u(x, y) = c_0 \sin x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sh}(\sqrt{4n^2 - 1}x) \cos\left(2ny + \frac{n\pi}{2}\right) \Big|_{x=\pi} = \sin 2y \rightarrow \begin{matrix} c_0 \text{ indeterminado} \\ c_1 \text{sh}(\sqrt{3}\pi) = 1 \\ c_n = 0, n > 1 \end{matrix}$$

Tiene, por tanto, **infinitas soluciones**:  $u(x, y) = C \sin x + \frac{\text{sh}(\sqrt{3}x)}{\text{sh}(\sqrt{3}\pi)} \sin 2y$ .

Evidentemente no se podrá demostrar la unicidad haciendo uso de la fórmula de Green. Operando como en 1.3, si  $u_1$  y  $u_2$  son soluciones del problema, su diferencia satisface:

$$u = u_1 - u_2 \rightarrow \begin{cases} \Delta u + u = 0 \\ \bullet = \bullet = 0 \\ \bullet = \bullet = 0 \end{cases} \rightarrow \iint_D (u \Delta u + u^2) = \iint_D u^2 - \iint_D \|\nabla u\|^2 = 0 \quad ??$$

Para resolver los problemas en círculos nos interesa expresar el **Laplaciano en polares** ( $x=r \cos \theta$ ,  $y=r \sin \theta$ ). Como,

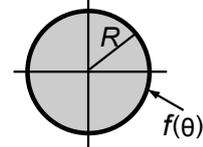
$$u_r = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta, \quad u_{rr} = u_{xx} \cos^2 \theta + 2u_{xy} \sin \theta \cos \theta + u_{yy} \sin^2 \theta$$

$$u_{\theta\theta} = u_{xx} r^2 \sin^2 \theta - 2u_{xy} r^2 \sin \theta \cos \theta + u_{yy} r^2 \cos^2 \theta - u_x r \cos \theta - u_y r \sin \theta \rightarrow$$

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}.$$

Resolvamos el **problema de Dirichlet homogéneo en un círculo**. Por primera vez nos van a aparecer condiciones que no están explícitamente escritas.

$$[P_3] \begin{cases} \Delta u = 0, \text{ en } r < R \\ u(R, \theta) = f(\theta), \theta \in [0, 2\pi) \end{cases} \quad [o \theta \in (-\pi, \pi], o \dots].$$



$$u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta) \rightarrow \frac{r^2 R'' + rR'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda \rightarrow \begin{cases} \Theta'' + \lambda\Theta = 0 \\ r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0 \end{cases}.$$

Parece que no hay condiciones para la  $\Theta$ , pero está claro que la solución  $u(r, \theta)$  **debe ser  $2\pi$ -periódica en  $\theta$** , es decir, debe ser  $\Theta(0) = \Theta(2\pi)$ ,  $\Theta'(0) = \Theta'(2\pi)$ . Este problema de Sturm-Liouville periódico, como sabemos, tiene por autovalores y autofunciones:

$$\lambda_n = n^2, \quad n=0, 1, 2, \dots, \quad \Theta_0(\theta) = \{1\}, \quad \Theta_n(\theta) = \{\cos n\theta, \sin n\theta\}.$$

Y las soluciones correspondientes de la ecuación en  $R$  son (ecuaciones de Euler):

$$R_0(r) = c_1 + c_2 \ln r \quad \text{y} \quad R_n(r) = c_1 r^n + c_2 r^{-n} \quad \text{si } n \geq 1.$$

Parece lógico imponer por argumentos físicos que la solución debe permanecer **acotada cuando  $r \rightarrow 0$**  (matemáticamente la solución también debe estarlo si ha de ser de  $C^2$ ), así que debe ser  $c_2 = 0$  en ambos casos. Por tanto, probamos soluciones de la forma:

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta].$$

Debe ser por último:  $u(R, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} R^n [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta] = f(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi) \rightarrow$

$$a_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta, \quad n=0, 1, \dots, \quad b_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta, \quad n=1, 2, \dots.$$

Sustituyendo estos coeficientes en la serie y operando formalmente se deduce:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{R^n} \cos n(\theta - \phi) \right] f(\phi) d\phi$$

Vamos a sumar la serie:

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n \cos n\alpha}{R^n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{re^{i\alpha}}{R} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{re^{-i\alpha}}{R} \right)^n = 1 + \frac{re^{i\alpha}}{R - re^{i\alpha}} + \frac{re^{-i\alpha}}{R - re^{-i\alpha}} = \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha}.$$

Por tanto, la solución de  $[P_3]$  se puede expresar:

$$u(r, \theta) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\phi) d\phi}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi) + r^2} \quad \text{fórmula integral de Poisson}$$

Haciendo aquí  $r=0$  (o mirando la serie) deducimos que  $u(0, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) d\phi$  :

si  $\Delta u = 0$ , el valor de  $u$  en el centro de un círculo es el valor medio de  $u$  sobre su borde.

Habría que probar que la  $u$  de la serie (o la integral) es realmente solución de  $[P_3]$ . Se prueba que si  $f$  es  $C^1$  a trozos, la  $u$  tiene **infinitas derivadas en  $r < R$**  (aunque  $f$  sea discontinua), que en ese abierto es  $\Delta u = 0$  y que alcanza el valor de contorno con continuidad en los  $\theta$  en que  $f$  es continua (y sigue habiendo unicidad, cosa que vimos en 1.3 sólo si  $f$  era continua). Laplace (como el calor, y no así las ondas) hace también desaparecer las discontinuidades,

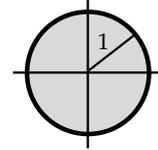
[La situación es totalmente análoga para  $[P_1]$ , Dirichlet en rectángulo u otros similares].

[El problema exterior en  $r > R$  lo veremos en 4.4, para compararlo con el del espacio].

Vamos con el problema de **Dirichlet no homogéneo en el círculo**.

En vez de tratarlo en general, resolvemos un problema concreto.

$$[P_4] \begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 4, \text{ en } r < 1 \\ u(1, \theta) = \cos 2\theta \end{cases} .$$



Podríamos descomponerlo en dos (el de  $\Delta u = 0$  lo acabamos de ver), pero siempre es más corto resolverlo directamente. Como en todo no homogéneo probamos una serie con las autofunciones del homogéneo (que ya satisfacen la necesaria periodicidad):

$$u(r, \theta) = a_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(r) \cos n\theta + b_n(r) \sin n\theta] \rightarrow$$

$$a_0'' + \frac{1}{r}a_0' + \sum_{n=1}^{\infty} ([a_n'' + \frac{1}{r}a_n' - \frac{n^2}{r^2}a_n] \cos n\theta + [b_n'' + \frac{1}{r}b_n' - \frac{n^2}{r^2}b_n] \sin n\theta) = 4 ,$$

que, por suerte, ya está desarrollada en esta familia de autofunciones.

[Si en vez de un 4 tuviésemos una  $F(r, \theta)$  cualquiera, la desarrollaríamos en senos y cosenos, mirando la  $r$  como constante e identificaríamos ambos miembros].

Habrás, pues, que resolver las ecuaciones de Euler:

$$ra_0'' + a_0' = 4r , \quad r^2a_n'' + ra_n' - n^2a_n = 0 , \quad r^2b_n'' + rb_n' - n^2b_n = 0 .$$

La condición  $u(1, \theta) = \cos 2\theta$  (también desarrollada ya no exige integrar) impone que:

$$b_n(1) = 0 \quad \forall n , \quad a_2(1) = 1 , \quad a_n(1) = 0 , \quad n \neq 2 .$$

La acotación cuando  $r \rightarrow 0$  será la otra condición necesaria para precisar la solución de cada EDO de segundo orden. Para la de  $a_0$  necesitamos una solución particular, que se puede hallar de varias formas. Con la fórmula de variación de las constantes:

$$\left| \begin{matrix} 1 & \ln r \\ 0 & 1/r \end{matrix} \right| = \frac{1}{r} , \quad a_{0p} = \ln r \int \frac{1 \cdot 4 dr}{1/r} - \int \frac{\ln r \cdot 4 dr}{1/r} = 2r^2 \ln r - 4 \int r \ln r dr = r^2 .$$

O, mejor, tanteando, pues (la de coeficientes constantes la tiene de la forma  $Ae^{2s}$ ) se sabe que hay una  $a_{0p} = Ar^2 \rightarrow 2A + 2A = 4, A = 1$ . Así:

$$a_0 = c_1 + c_2 \ln r + r^2 \xrightarrow{\text{acotada}} c_2 = 0 \xrightarrow{a_0(1)=0} c_1 = -1 .$$

↑  
también calculable con  $a_0' = v, v' = -\frac{v}{r} + 4, v = \frac{c}{r} + 2r$ .

Para  $a_2$  será:

$$a_2 = c_1 r^2 + c_2 r^{-2} \xrightarrow{\text{acotada}} c_2 = 0 \xrightarrow{a_2(1)=1} c_1 = 1 .$$

No necesitamos resolver más ecuaciones homogéneas para asegurar ya que el resto de  $a_n$  y las  $b_n$  son cero (0 es solución y no hay más por tener un problema de Dirichlet solución única). La solución de  $[P_4]$  es, por tanto:

$$u(r, \theta) = r^2 - 1 + r^2 \cos 2\theta \quad [\text{se podría escribir en cartesianas: } u = 2x^2 - 1] .$$

Como otras veces, un buen cambio simplifica el problema. Por ejemplo, podemos en este caso buscar una solución  $v(r)$  de la ecuación no homogénea resolviendo  $v'' + \frac{1}{r}v' = 4$ .

La solución más sencilla de esta ecuación de Euler es  $v = r^2$ .

$$w = u - v \rightarrow \begin{cases} \Delta w = 0, \text{ en } r < 1 \\ w(1, \theta) = \cos 2\theta - 1 \end{cases} .$$

De la serie de la página anterior obtenemos, identificando coeficientes, su solución:

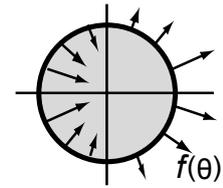
$$w(r, \theta) = r^2 \cos 2\theta - 1 .$$

Esto nos lleva de forma mucho más rápida a la solución de antes.

[Utilizando funciones de Green se obtendrá en 4.5 una fórmula integral para  $\begin{cases} \Delta u = F, r < R \\ u(R, \theta) = f(\theta) \end{cases}$  que generalizará la fórmula de Poisson de la página anterior].

Resolvamos ahora el **problema de Neumann homogéneo en un círculo**:

$$[P_5] \begin{cases} \Delta u = 0, \text{ en } r < R \\ u_r(R, \theta) = f(\theta), \theta \in [0, 2\pi) \end{cases} .$$



Como el problema de contorno y la ecuación de Euler son las mismas que en Dirichlet, la solución que probamos también es:

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta] .$$

Pero ahora es diferente la condición de contorno que falta:

$$u_r(R, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} nR^{n-1} [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta] = f(\theta), \theta \in [0, 2\pi) \rightarrow$$

$$a_n = \frac{1}{n\pi R^{n-1}} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta, \quad b_n = \frac{1}{n\pi R^{n-1}} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta, \quad n=1, 2, \dots$$

**siempre que no tenga término independiente el desarrollo en senos y cosenos de  $f(\theta)$** . Es decir, una **condición necesaria** para que el problema se pueda resolver por este método es que se cumpla:

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 0 \quad [\text{confirma lo visto en 1.3: debía ser } \oint_{\partial D} f ds = \iint_D F dx dy = 0].$$

Además,  $a_0$  **queda indeterminado** [Neumann siempre tiene unicidad salvo constante].

**Ej 4.**  $\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } r < 1 \\ u_r(1, \theta) = \sin^3 \theta \end{cases} \quad u_r(1, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta] = \sin^3 \theta = \frac{3}{4} \sin \theta - \frac{1}{4} \sin 3\theta .$

No hay que hacer integrales:  $b_1 = \frac{3}{4}$ ,  $b_3 = -\frac{1}{12}$  y los demás 0, excepto  $a_0$  sin condición.

Por tanto, son soluciones:  $u(r, \theta) = C + \frac{3}{4}r \sin \theta - \frac{1}{12}r^3 \sin 3\theta$ , con  $C$  cualquiera.

Y ahora resolvemos un problema de **Neumann no homogéneo en un semicírculo**:

$$[P_6] \begin{cases} \Delta u = F(r, \theta), \text{ en } r < 1, 0 < \theta < \pi \\ u_r(1, \theta) = u_\theta(r, 0) = u_\theta(r, \pi) = 0 \end{cases}$$



No hemos resuelto el homogéneo. Debemos empezar hallando sus autofunciones. Las dan la conocida ecuación en  $\Theta$  que sale al separar variables y los datos de contorno, que ahora aparecen explícitamente escritos:

$$\begin{cases} \Theta'' + \lambda \Theta = 0 \\ \Theta'(0) = \Theta'(\pi) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = n^2, \quad \Theta_n(\theta) = \{\cos n\theta\}, \quad n=0, 1, 2, \dots \rightarrow$$

$$u(r, \theta) = R_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r) \cos n\theta \quad [\text{La serie con cosenos y senos del [P4] no cumple los datos de contorno; aquí no hay periodicidad.}] \rightarrow$$

$$R_0'' + \frac{1}{r}R_0' + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ R_n'' + \frac{1}{r}R_n' - \frac{n^2}{r^2}R_n \right] \cos n\theta = F(r, \theta) = B_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(r) \cos n\theta,$$

$$\text{con } B_0(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi F(r, \theta) d\theta \text{ y } B_n(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi F(r, \theta) \cos n\theta d\theta .$$

Bastará resolver las ecuaciones:  $rR_0'' + R_0' = [rR_0']' = rB_0(r)$  y  $r^2R_n'' + rR_n' - n^2R_n = r^2B_n(r)$ , ambas con los datos de contorno (singulares):  $R_n$  acotada en  $r=0$  y  $R_n'(1)=0$ .

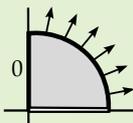
Si  $n \geq 1$  el problema homogéneo (y, por tanto, el no homogéneo) tiene solución  $R_n$  única (aunque el problema sea singular, vale lo que vimos en 3.3). Pero si  $n=0$ :

$$rR_0'' + R_0' = 0 \rightarrow R_0 = c_1 + c_2 \ln r \xrightarrow{R \text{ acotada}}_{R'(1)=0} R_{0h} = \{1\} \rightarrow$$

Existen infinitas soluciones  $R_0$  del no homogéneo según sea  $\int_0^1 rB_0(r) dr \neq 0$  o ninguna solución si  $\int_0^1 rB_0(r) dr = 0$ .

[Concuera una vez más con 1.3. Debía ser:  $\int_0^1 \int_0^\pi rF(r, \theta) d\theta dr = 0$ ].

Resolvemos más problemas para Laplace en polares en recintos acotados con condiciones mixtas (por tanto, de solución única). Los primeros (homogéneo y no homogéneo) son en un cuadrante.

**Ej 5.**  $\begin{cases} \Delta u = 0, r < 1, \theta \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ u_r(1, \theta) = 1, u_\theta(r, 0) = u_\theta(r, \frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \Theta'' + \lambda \Theta = 0, \Theta'(0) = \Theta(\frac{\pi}{2}) = 0 \\ r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0 \end{cases}$  

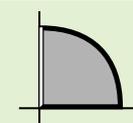
Problema de contorno conocido:  $\lambda_n = (2n-1)^2$ ,  $\Theta_n = \{\cos(2n-1)\theta\}$ ,  $n=1, 2, \dots$

Resolviendo para esos  $\lambda_n$  la ecuación en  $R$  y exigiendo que esté acotada en  $r=0$ :

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^{2n-1} \cos(2n-1)\theta \rightarrow u_r(1, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)c_n \cos(2n-1)\theta = 1$$

$$\rightarrow c_n = \frac{4}{(2n-1)\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(2n-1)\theta d\theta = \frac{4}{\pi(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2} \quad [1 \text{ no es autofunción y debemos integrar}]$$

Por tanto, la solución es: 
$$u(r, \theta) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} r^{2n-1} \cos(2n-1)\theta$$

**Ej 6.**  $\begin{cases} \Delta u = 3 \operatorname{sen} \theta, r < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ u(1, \theta) = 0, u(r, 0) = u_\theta(r, \frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} \begin{cases} \Theta'' + \lambda \Theta = 0 \\ \Theta(0) = \Theta'(\pi/2) = 0 \end{cases} \cdot \begin{matrix} \lambda_n = (2n-1)^2, \\ \Theta_n = \{\operatorname{sen}(2n-1)\theta\}, \\ n=1, 2, \dots \end{matrix}$  

Se lleva  $u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r) \operatorname{sen}(2n-1)\theta$  a la EDP y al otro dato de contorno:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [R_n'' + \frac{1}{r}R_n' - \frac{(2n-1)^2}{r^2}R_n] \operatorname{sen}(2n-1)\theta = 3 \operatorname{sen} \theta \quad (\text{ya desarrollada}),$$

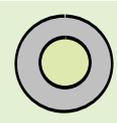
$$\sum_{n=1}^{\infty} R_n(1) \operatorname{sen}(2n-1)\theta = 0 \Rightarrow R_n'(1) = 0 \quad \forall n \quad (\text{y las } R_n \text{ deben estar acotadas})$$

$\Rightarrow$  Si  $n > 1$  es  $R_n \equiv 0$  (es solución y el problema tiene solución única).

Sólo sobrevive  $\begin{cases} r^2 R_1'' + rR_1' - R_1 = 3r^2 \\ R_1 \text{ acotada}, R_1(1) = 0 \end{cases} \xrightarrow{*} R_1 = c_1 r + c_2 r^{-1} + r^2 \xrightarrow{cc} u(r, \theta) = (r^2 - r) \operatorname{sen} \theta$

\*  $R_p = Ar^2 (Ae^{2s}) \rightarrow (2+2-1)A = 3$ . O peor:  $\begin{vmatrix} r & r^{-1} \\ 1 & -r^{-1} \end{vmatrix} = -\frac{2}{r}$ ,  $R_p = -r^{-1} \int \frac{r \cdot 3}{2r^{-1}} + r \int \frac{r^{-1} \cdot 3}{2r^{-1}} = r^2$ .

Los recintos siguientes no incluyen el origen. La condición implícita de acotación se sustituye en ambos por un dato explícito en  $r=1$ . En el segundo ya no hay datos ocultos y todo está a la vista:

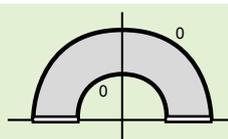
**Ej 7.**  $\begin{cases} \Delta u = 0, 1 < r < 2 \\ u(1, \theta) = 0, u_r(2, \theta) = 1 + \operatorname{sen} 2\theta \end{cases}$  Sabemos que:  $\begin{cases} \Theta'' + \lambda \Theta = 0 \\ \Theta \text{ } 2\pi\text{-per.} \end{cases} \rightarrow \lambda_n = n^2, \Theta_n = \{\cos n\theta, \operatorname{sen} n\theta\}, n=0, 1, 2, \dots$  

Para esos  $\lambda$ :  $r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0 \rightarrow \begin{matrix} R_0 = c_1 + c_2 \ln r \xrightarrow{R(1)=0} R_0 = \{\ln r\} \\ R_n = c_1 r^n + c_2 r^{-n} \xrightarrow{R(1)=0} R_n = \{r^n - r^{-n}\} \end{matrix}$

$$u(r, \theta) = a_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (r^n - r^{-n}) [a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta]$$

$$u_r(2, \theta) = a_0 2^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n(2^{n-1} + 2^{-n-1}) [a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta] = 1 + \operatorname{sen} 2\theta \rightarrow$$

$$a_0 = 2, \frac{17}{4} b_2 = 1 \text{ y los demás cero} \rightarrow u(r, \theta) = 2 \ln r + \frac{4}{17} (r^2 - r^{-2}) \operatorname{sen} \theta$$

**Ej 8.**  $\begin{cases} \Delta u = 3 \cos \theta, 1 < r < 2, 0 < \theta < \pi \\ u(1, \theta) = u(2, \theta) = u_\theta(r, 0) = u_\theta(r, \pi) = 0 \end{cases}$  Las  $\Theta_n$  del homogéneo son los cosenos del  $[P_6]$ . 

Probamos entonces la serie:  $u(r, \theta) = R_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r) \cos n\theta \rightarrow$

$$R_0 + \frac{1}{r}R_0' + \sum_{n=1}^{\infty} [R_n'' + \frac{1}{r}R_n' - \frac{n^2}{r^2}R_n] \cos n\theta = 3 \cos \theta \quad [\text{ya desarrollado}]$$

Las condiciones para las  $R_n$  salen de las otras condiciones de contorno:

$$\sum_{n=0}^{\infty} R_n(1) \Theta_n(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(2) \Theta_n(\theta) = 0 \Rightarrow R_n(1) = R_n(2) = 0 \quad \forall n$$

Por la unicidad de los problemas mixtos sólo es no nula la solución de  $r^2 R_1'' + rR_1' - R_1 = 3r^2$  con los datos nulos de arriba. Ecuación resuelta en el ejemplo 6. De los datos se obtiene:

$$c_1 = -\frac{7}{3}, c_2 = \frac{4}{3} \text{ . Luego la solución es: } u(r, \theta) = (r^2 - \frac{7}{3}r + \frac{4}{3}r^{-1}) \cos \theta$$

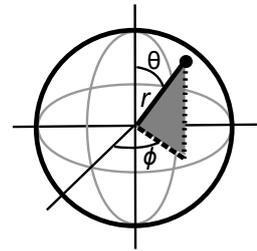
Resolvamos el problema de **Dirichlet en una esfera** con **datos independientes de  $\phi$**  que, de hecho, es un problema con **dos variables** como el resto de los de esta sección. El problema general en tres variables será tratado brevemente la siguiente sección 4.4.

En libros de cálculo en varias variables se tiene la expresión del laplaciano en esféricas:

$$\left. \begin{array}{l} x=r \operatorname{sen} \theta \cos \phi \\ y=r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \\ z=r \cos \theta \end{array} \right\} \rightarrow \Delta u=u_{rr}+\frac{2}{r} u_r+\frac{1}{r^2} u_{\theta \theta}+\frac{\cos \theta}{r^2 \operatorname{sen} \theta} u_{\theta}+\frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} u_{\phi \phi} .$$

Si los datos no dependen de  $\phi$  podemos encontrar soluciones que tampoco dependan de  $\phi$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{rr}+\frac{2}{r} u_r+\frac{1}{r^2}\left[u_{\theta \theta}+\frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} u_{\theta}\right]=0, \quad r < R \\ u(R, \theta)=f(\theta), \quad \theta \in[0, \pi] \end{array} \right.$$



Separando variables  $u(r, \theta)=R(r) \Theta(\theta)$  se obtiene sin dificultad  $\left\{ \begin{array}{l} r^2 R''+2 r R'-\lambda R=0 \\ \Theta''+\frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \Theta'+\lambda \Theta=0 \end{array} \right.$

El cambio  $s=\cos \theta\left[\Theta'=-\operatorname{sen} \theta \frac{d \Theta}{d s}, \Theta''=\operatorname{sen}^2 \theta \frac{d^2 \Theta}{d s^2}-\cos \theta \frac{d \Theta}{d s}\right]$  lleva la ecuación en  $\Theta$  a:

$$\left[1-s^2\right] \frac{d^2 \Theta}{d s^2}-2 s \frac{d \Theta}{d s}+\lambda \Theta=0, \quad \text{ecuación de Legendre.}$$

Imponemos que  $\Theta$  esté **acotada en  $s=\pm 1$**  [es decir, para  $\theta=0, \pi$  polos de la esfera]. Los autovalores de este **problema singular** (visto en 3.1) eran  $\lambda_n=n(n+1), n=0, 1, \dots$  y sus autofunciones son los **polinomios de Legendre**:

$$\left\{P_n(s)\right\}=\left\{P_n(\cos \theta)\right\} \quad\left[P_0=1, P_1=s, P_2=\frac{3}{2} s^2-\frac{1}{2}, P_3=\frac{5}{2} s^3-\frac{3}{2} s, \dots\right]$$

Para estos valores de  $\lambda$ :

$$r^2 R''+2 r R'-n(n+1) R=0 \rightarrow \mu^2+\mu-n(n+1)=0, \quad \mu=n, -(n+1) \rightarrow R=c_1 r^n+c_2 r^{-(n+1)} .$$

Como la solución ha de estar **acotada** en el origen sólo nos vale  $R_n=\left\{r^n\right\}, n=0, 1, \dots$

Probamos entonces:

$$u(r, \theta)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos \theta) \rightarrow u(R, \theta)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n P_n(\cos \theta)=f(\theta)$$

$$\rightarrow a_n=\frac{2 n+1}{2 R^n} \int_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos \theta) \operatorname{sen} \theta d \theta, \quad n=0, 1, \dots,$$

pues el **peso** del problema de Sturm-Liouville es  $r(\theta)=\operatorname{sen} \theta\left[(\operatorname{sen} \theta \Theta')'+\lambda \operatorname{sen} \theta \Theta=0\right]$  y los  $P_n$  ya dijimos que cumplen:

$$\int_0^{\pi}\left[P_n(\cos \theta)\right]^2 \operatorname{sen} \theta d \theta \stackrel{s=\cos \theta}{=} \int_{-1}^1\left[P_n(s)\right]^2 d s=\frac{2}{2 n+1} .$$

**Ej 9.** Si  $R=1$  y  $f(\theta)=\cos ^2 \theta$  de la fórmula de arriba se obtiene:  $a_n=\frac{2 n+1}{2} \int_{-1}^1 s^2 P_n(s) d s$ .

Así pues:  $a_0=\frac{1}{2} \int_{-1}^1 s^2 d s=\frac{1}{3}, a_2=\frac{5}{2} \int_{-1}^1\left[\frac{3}{2} s^4-\frac{1}{2} s^2\right] d s=\frac{2}{3}$ , y los demás  $a_n=0$ .

[Ya que  $P_1$  es impar ( $\Rightarrow a_1=0$ ), y para desarrollar  $s^2$  bastan sólo  $P_0, P_1$  y  $P_2$ ].

La solución es, por lo tanto,  $u(r, \theta)=\frac{1}{3}-\frac{1}{3} r^2+r^2 \cos ^2 \theta\left[=\frac{1}{3}\left(1-x^2-y^2+2 z^2\right)\right]$ .

Pero para un dato como este se podrían determinar los coeficientes tanteando:

$$\cos ^2 \theta=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2} \cos ^2 \theta-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3} \rightarrow a_2=\frac{2}{3}, a_0=\frac{1}{3}, \text { como antes.}$$

[Para resolver problemas con términos no homogéneos  $F(r, \theta)$  se probaría como siempre en la ecuación una serie de autofunciones:  $u(r, \theta)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r) P_n(\cos \theta)$ ].

Veamos ahora el **problema exterior** de Dirichlet para Laplace en el círculo y en la esfera con simetría (con datos independientes de  $\phi$ ). Para que haya unicidad, las condiciones en el infinito han de ser distintas:

**plano:**

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{si } r > R \\ u(R, \theta) = f(\theta), & 0 \leq \theta < 2\pi \\ u \text{ acotada cuando } r \rightarrow \infty \end{cases}$$

**espacio:**

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{si } r > R \\ u(R, \theta) = f(\theta), & 0 \leq \theta \leq \pi \\ u \rightarrow 0 \text{ cuando } r \rightarrow \infty \end{cases}$$

Separando variables se llega a las mismas  $\Theta_n$  que en los problemas interiores:

$$\{\Theta_n\} = \{\cos n\theta, \sin n\theta\}, \quad n=0, 1, \dots$$

$$\{\Theta_n\} = \{P_n(\cos \theta)\}, \quad n=0, 1, \dots$$

Pero hay que elegir diferentes  $R_n$ , para las nuevas condiciones en el infinito:

$$n=0, \quad c_1 + c_2 \ln r \rightarrow R_0 = \{1\}$$

$$n=0, \quad c_1 + c_2 r^{-1} \rightarrow R_0 = \{r^{-1}\}$$

$$n > 0, \quad c_1 r^n + c_2 r^{-n} \rightarrow R_n = \{r^{-n}\}$$

$$n > 0, \quad c_1 r^n + c_2 r^{-(n+1)} \rightarrow R_n = \{r^{-(n+1)}\}$$

[En el plano ningún  $R_0 \rightarrow 0$ , y en el espacio están acotadas tanto 1 como  $r^{-1}$ . Si se impusiese en el plano tender a 0 nos quedaríamos sin soluciones y pedir acotación nos daría infinitas en el espacio].

Probando las series correspondientes e imponiendo el dato  $u(R, \theta) = f(\theta)$ , se obtiene que las soluciones respectivas son estas series con los coeficientes indicados:

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta]$$

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^{-(n+1)} P_n(\cos \theta)$$

$$a_n = \frac{R^n}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta, \quad n=0, 1, \dots$$

$$a_n = \frac{(2n+1)R^{n+1}}{2} \int_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta$$

$$b_n = \frac{R^n}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta \, d\theta, \quad n=1, 2, \dots$$

$$n=0, 1, \dots$$

**Ej 10.** Hallemos la solución en ambos casos cuando  $f(\theta) = k$  constante.

Basta mirar las series para deducir las soluciones en ambos casos:

$$u = k \quad \text{en el plano.}$$

$$u = \frac{kR}{r} \quad \text{en el espacio.}$$

[Interpretemos estos resultados mirándolos como soluciones estacionarias de la ecuación del calor. Si mantenemos la superficie de una bola de radio  $R$  constantemente a  $k^\circ$ , la temperatura que tendrían a tener todos los puntos del espacio sería  $kR/r$ , disminuyendo con la distancia a la bola. Para el primer caso, en vez de imaginarnos en un mundo bidimensional, situémonos en el espacio con datos y soluciones independientes de la variable  $z$ : si toda la superficie de un cilindro infinito de radio  $R$  se conserva a  $k^\circ$ , todo el espacio tenderá a tener esa temperatura].

[Si nos planteásemos el problema en el interior  $r < R$ , es inmediato ver que la solución, tanto en el plano como en el espacio, sería  $u = k$ ].

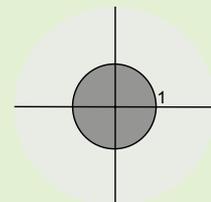
**Ej 11.** Sea  $R=1$  y  $f(\theta) = \cos^2 \theta$ . Resolvamos y comparemos con las soluciones en  $r < 1$ .

En el plano, la serie del interior y exterior llevan a la misma condición:

$$u(1, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \rightarrow$$

$$u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} r^2 \cos 2\theta \quad (\text{interior}), \quad u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2r^2} \cos 2\theta \quad (\text{exterior}).$$

$$[\text{En cartesianas } u = \frac{1+x^2-y^2}{2} \text{ y } u = \frac{1}{2} + \frac{x^2-y^2}{2(x^2+y^2)^2}, \text{ respectivamente}].$$



Para el espacio, el interior ya se ha resuelto en el ejemplo 9. Y en el exterior la condición que aparece al hacer  $r=1$  vuelve a coincidir con la del interior.

Las soluciones respectivas son, pues:

$$u = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} r^2 + r^2 \cos^2 \theta \quad (\text{interior}), \quad u = \frac{1}{3r} - \frac{1}{3r^3} + \frac{1}{r^3} \cos^2 \theta \quad (\text{exterior}).$$

Hagamos varias reflexiones sobre el método de separación de variables que generalicen las ideas que hemos venido utilizando en este capítulo.

Todos los problemas que hemos visto estaban formados por una **EDP lineal**  $L[u]=F$ , con  $L$  lineal (es decir,  $L[au_1+bu_2]=aL[u_1]+bL[u_2]$ ) y unas **condiciones adicionales lineales**.

Para los resueltos por separación de variables las EDPs eran '**separables**' (no todas lo son) y los recintos que aparecieron eran '**simples**' (limitados por '*variable=cte*').

Todos estos problemas tenían siempre **dos condiciones de contorno**  $C_k[u]=h_k$  y además una o dos condiciones iniciales o de contorno. Para Laplace en polares vimos que a veces las condiciones de contorno estaban implícitas (por ejemplo, en un círculo se exigía periodicidad y, cuando el recinto incluía el origen, aparecía la acotación).

Nos hemos ocupado primero de conseguir que fuesen **ceros** las condiciones de contorno.

En todos los **problemas homogéneos** hemos buscado soluciones de la EDP que eran productos, por ejemplo  $u=XT$ , y ello nos condujo a unas  $X_n$  **autofunciones** de un problema de contorno y unas  $T_n$  soluciones de otra EDO **homogénea** (igual si era  $u=XY$ ,  $u=R\Theta$ ...). Gracias a la linealidad pudimos construir la serie  $u(x,t)=\sum c_n X_n(x)T_n(t)$  y para hallar la solución sólo faltó **calcular los**  $c_n$  imponiendo la condición inicial (o condiciones, o las otras de contorno) y haciendo **desarrollos de Fourier**.

Para los **problemas no homogéneos**, buscando también una serie solución, llevamos a la EDP (con la  $F$  desarrollada) una serie cuyos términos eran **productos de las autofunciones del problema homogéneo por funciones a determinar de la otra variable**. Si el homogéneo no se había visto previamente, primero se debían precisar esas autofunciones (los pasos iniciales en ambos tipos de problemas son los mismos). Resolviendo la familia resultante de EDOs lineales **no homogéneas** con las condiciones que se deducen del desarrollo de las condiciones iniciales (o de las otras de contorno), obtuvimos la solución.

Pensemos también en general sobre la descomposición en subproblemas y los cambios de variable (aquí y en otros capítulos). Supongamos, por ejemplo, que son 3 las condiciones adicionales (como para el calor en la varilla finita) y que nuestro problema es de la forma:

$$[P] \begin{cases} L[u]=F \\ M[u]=f \\ C_1[u]=h_1, C_2[u]=h_2 \end{cases}$$

El problema de resolver [P] puede ser reducido a resolver otros subproblemas más sencillos. Por ejemplo, si  $u_1, u_2, u_3$  y  $u_4$  son soluciones de

$$[P_1] \begin{cases} L[u]=F \\ M[u]=0 \\ C_1[u]=0 \\ C_2[u]=0 \end{cases} \quad [P_2] \begin{cases} L[u]=0 \\ M[u]=f \\ C_1[u]=0 \\ C_2[u]=0 \end{cases} \quad [P_3] \begin{cases} L[u]=0 \\ M[u]=0 \\ C_1[u]=h_1 \\ C_2[u]=0 \end{cases} \quad [P_4] \begin{cases} L[u]=0 \\ M[u]=0 \\ C_1[u]=0 \\ C_2[u]=h_2 \end{cases}$$

está claro, por la linealidad, que  $u=u_1+u_2+u_3+u_4$  es solución de [P], pero, como ya hemos observado, bastantes veces nos convendrá descomponer [P] en menos subproblemas.

Bastantes veces necesitamos hacer homogéneas las condiciones de contorno (la separación de variables y otros métodos lo exigen). Si somos capaces de hallar una  $v$  que cumpla  $C_1[v]=h_1$  y  $C_2[v]=h_2$ , el cambio  $w=u-v$  lleva [P] a:

$$\begin{cases} L[w]=F-L[v] \\ M[w]=f-M[v] \\ C_1[w]=C_2[w]=0 \end{cases}$$

Otras veces interesa hacer la ecuación homogénea (por ejemplo, cuando no hay datos de contorno, como en algunos problemas del capítulo 1). Así, si lo que tenemos es una solución particular  $v$  de la ecuación ( $L[v]=F$ ), haciendo como siempre,  $w=u-v$  acabaríamos en:

$$\begin{cases} L[w]=L[u]-L[v]=0 \\ M[w]=f-M[v] \\ C_1[w]=h_1-C_1[v], C_2[w]=h_2-C_2[v] \end{cases}$$

Lo que ya es un lujo (pero se puede intentar buscar por el premio que nos da) es tener una  $v$  que cumpla la ecuación y además las dos condiciones de contorno (en algunos ejemplos lo hicimos). Los problemas homogéneos suelen exigir menos cálculos que los no homogéneos (separando variables, por ejemplo, los primeros exigen resolver sólo EDOs homogéneas, más corto que resolver las EDOs no homogéneas de los segundos).

Como vemos, hay mucha variedad en los posibles cambios. En cada caso habrá que ver cuáles nos llevan a problemas más asequibles. Si inicialmente hay condiciones homogéneas intentaremos que los cambios no las estropeen, aunque a veces no habrá más remedio.

## 4.4. Algunos problemas en tres variables

Comenzamos estudiando las **series de Fourier dobles**, de teoría inmediata a partir de las de una variable, ya que son consecuencia de dos desarrollos sucesivos (las triples, que aparecerían en problemas con 4 variables, son también similares).

Sean  $X_m(x)$ ,  $x \in [a, b]$  e  $Y_n(y)$ ,  $y \in [c, d]$  las autofunciones de dos problemas de Sturm-Liouville de pesos respectivos  $r(x)$  y  $s(y)$ , y sea  $f(x, y) \in C^1([a, b] \times [c, d])$ . Entonces, para cada  $(x, y) \in (a, b) \times (c, d)$  se puede escribir  $f$  como la serie:

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{nm} X_n Y_m \quad \text{con} \quad c_{nm} = \frac{1}{\langle X_n, X_n \rangle} \frac{1}{\langle Y_m, Y_m \rangle} \int_a^b \int_c^d f(x, y) X_n Y_m r s \, dy \, dx.$$

[  $(u, v)$  designa, desde luego,  $\int_a^b r u v \, dx$  ó  $\int_c^d s u v \, dy$  ].

pues para cada  $x$  fijo se puede escribir  $f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m(x) Y_m$ ,  $C_m(x) = \frac{\langle f(x, y), Y_m \rangle}{\langle Y_m, Y_m \rangle}$ ,

y con  $C_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{nm} X_n$ ,  $c_{nm} = \frac{\langle C_m(x), X_n \rangle}{\langle X_n, X_n \rangle}$  se obtiene la expresión de arriba.

[Se llega a lo mismo, desde luego, desarrollando primero en  $X_n$  y luego en  $Y_m$ ].

Un caso particular de las series anteriores son los desarrollos de funciones en **series trigonométricas dobles** de una función  $f \in C^1([0, L] \times [0, M])$ . Como estas dos:

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{M}, \quad \text{con} \quad b_{nm} = \frac{4}{LM} \int_0^L \int_0^M f(x, y) \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{M} \, dy \, dx.$$

$$f(x, y) = \frac{1}{4} a_{00} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n0} \cos \frac{n\pi x}{L} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} a_{0m} \cos \frac{m\pi y}{M} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{nm} \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi y}{M},$$

$$\text{con} \quad a_{nm} = \frac{4}{LM} \int_0^L \int_0^M f(x, y) \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi y}{M} \, dy \, dx.$$

[O los desarrollos parecidos en  $\sum \sin \cos$  ó  $\sum \cos \sin$ , o con series en senos y cosenos, o desarrollos que incluyan senos impares o cosenos impares].

[Los factores  $\frac{1}{4}$  y  $\frac{1}{2}$  son, como siempre, para que la fórmula valga también si  $n=0$  ó  $m=0$ ].

[Se podría pedir que  $f$  fuese sólo  $C^1$  a trozos, pero aquí suponemos que es más suave].

**Ej 1.** Desarrollemos  $f(x, y) = x \cos y$ , en  $[0, \pi] \times [0, \pi]$  de las dos formas de arriba:

$$x \cos y = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm} \sin nx \sin my \quad \text{con} \quad b_{nm} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} x \cos y \sin nx \sin my \, dy \, dx$$

$$\rightarrow x \cos y = \frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[-1]^{n+1} m}{n[4m^2-1]} \sin nx \sin 2my$$

$$a_{nm} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} x \cos y \cos nx \cos my \, dy \, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq 1 \\ \pi & \text{si } m=1, n=0 \\ 2[(-1)^n - 1]/(\pi n^2) & \text{si } m=1, n > 0 \end{cases} \rightarrow$$

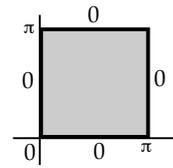
$$x \cos y = \frac{\pi}{2} \cos y - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos[2n-1]x \cos y \quad [\text{ya estaba desarrollada en } y].$$

[La igualdad entre  $f$  y su serie se dará en los puntos de continuidad de la  $f$  extendida, de forma impar en el primer caso y par en el segundo, en cada variable hasta  $[-\pi, \pi]$  y luego de forma  $2\pi$ -periódica; así, la serie en senos converge hacia  $x \cos y$  en el lado  $x=0$  del cuadrado  $[0, \pi] \times [0, \pi]$ , pero no lo hace en los otros lados; la serie en cosenos, en cambio, converge (uniformemente) en todo el cuadrado, incluido el borde].

[Como decíamos ya en 3.2, aunque una  $f(x, y)$  se puede desarrollar en cualquier par de familias de autofunciones, será el problema el que nos diga en cuáles hay que hacerlo].

Resolvamos separando variables varios problemas (homogéneos) en 3 variables. En el primero, para el **calor en un cuadrado**, estudiamos la evolución de las temperaturas de una placa (dadas las iniciales) si el borde se mantiene a  $0^\circ$ :

$$\begin{cases} u_t - k[u_{xx} + u_{yy}] = 0, & (x, y) \in (0, \pi) \times (0, \pi), t > 0 \\ u(x, y, 0) = f(x, y) \\ u(x, 0, t) = u(x, \pi, t) = u(0, y, t) = u(\pi, y, t) = 0 \end{cases}$$



Buscamos soluciones del tipo  $u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t) \rightarrow XYT' - k[X''Y + XY'']T = 0$ .  
 Separamos variables dos veces consecutivas y aparecen dos constantes distintas:

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{k} \frac{T'}{T} - \frac{Y''}{Y} = -\lambda \rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ \frac{Y''}{Y} = \lambda + \frac{1}{k} \frac{T'}{T} = -\mu \rightarrow \begin{cases} Y'' + \mu Y = 0 \\ T' = -k[\lambda + \mu]T \end{cases} \end{cases}$$

[Como en 2 variables, dejamos para la  $T$  la expresión más complicada].

[En algunos problemas en 3 variables se actúa de forma diferente. Se podría empezar aquí haciendo  $u = T(t)v(x, y) \rightarrow T'v = kT\Delta v \rightarrow T' = -\lambda kT, \Delta v + \lambda v = 0$  (ecuación de Helmholtz)].

Las condiciones de contorno exigen:  $X(0) = X(\pi) = Y(0) = Y(\pi) = 0$ . Así pues:

$$\begin{cases} \lambda = n^2, X_n = \{\sin nx\}, n = 1, 2, \dots \\ \mu = m^2, Y_m = \{\sin my\}, m = 1, 2, \dots \end{cases} \rightarrow T_{nm} = \{e^{-(n^2+m^2)kt}\}.$$

Cualquier función de la forma  $u_{nm}(x, y, t) = \{e^{-(n^2+m^2)kt} \sin nx \sin my\}$  satisface la EDP y todas las condiciones de contorno, lo mismo que cualquier combinación lineal de ellas.

Esto nos lleva a probar la serie:  $u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm} e^{-(n^2+m^2)kt} \sin nx \sin my$ ,

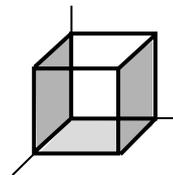
que debe satisfacer además:  $u(x, y, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm} \sin nx \sin my = f(x, y) \rightarrow$

$$b_{nm} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi f(x, y) \sin nx \sin my \, dx \, dy, \quad n, m \geq 1.$$

[Como en la varilla, aquí también  $u \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ ].

Ahora, **Laplace en un cubo** con condiciones de contorno mixtas (tiene solución única como los similares del plano):

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } (0, \pi) \times (0, \pi) \times (0, \pi) \\ u(x, y, 0) = f(x, y), u = 0 \text{ en } x=0, x=\pi, z=\pi \\ u_y = 0 \text{ en } y=0, y=\pi \end{cases}$$



$$u = XYZ \rightarrow \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = -\frac{X''}{X} = \lambda \rightarrow \frac{Z''}{Z} - \lambda = -\frac{Y''}{Y} = \mu \rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0, X(0) = X(\pi) = 0 \\ Y'' + \mu Y = 0, Y'(0) = Y'(\pi) = 0 \\ Z'' - [\lambda + \mu]Z = 0, Z(\pi) = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \lambda = n^2, X_n = \{\sin nx\}, n = 1, 2, \dots \\ \mu = m^2, Y_m = \{\cos my\}, m = 0, 1, \dots \end{cases} \rightarrow Z_{mn} = \{\text{sh}(\sqrt{n^2+m^2}[\pi-z])\} \rightarrow$$

$$u(x, y, z) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_{n0} \text{sh}(n[\pi-z]) \sin nx + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{nm} \text{sh}(\sqrt{n^2+m^2}[\pi-z]) \sin nx \cos my.$$

Como  $u(x, y, 0) = f(x, y)$ , los  $c_{nm}$  serán:

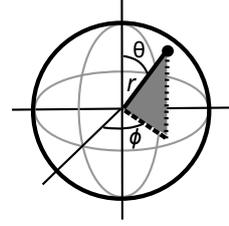
$$c_{nm} = \frac{4}{\pi^2 \text{sh}(\pi\sqrt{n^2+m^2})} \int_0^\pi \int_0^\pi f(x, y) \sin nx \cos my \, dy \, dx \quad \begin{matrix} n=1, 2, \dots \\ m=0, 1, \dots \end{matrix}$$

[En caso de ser  $f(x, y) = \sin 3x \cos 4y$  la solución se reduciría a un único término.

Identificando se tendría  $u(x, y) = \frac{\text{sh}(5[\pi-z])}{\text{sh}(5\pi)} \sin 3x \cos 4y$  sin hacer integrales].

Resolvamos ahora, con pocos detalles y sin dar demostraciones, el problema general de **Dirichlet en la esfera para Laplace en 3 variables**:

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2}\left[u_{\theta\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}u_{\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}u_{\phi\phi}\right] = 0, & r < R \\ u(R, \theta, \phi) = f(\theta, \phi), & \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi) \end{cases}$$



Aquí separamos primero la parte radial y la que depende de los dos ángulos:

$$u = R(r)Y(\theta, \phi) \rightarrow \begin{cases} r^2 R'' + 2rR' - \lambda R = 0 \\ Y_{\phi\phi} + \sin\theta(\sin\theta Y_{\theta})_{\theta} + \lambda \sin^2\theta Y = 0 \end{cases}$$

Separando ahora la parte angular:  $Y(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi) \rightarrow \begin{cases} \Phi'' + \mu\Phi = 0 \\ (\sin\theta\Theta')' + (\lambda\sin\theta - \frac{\mu}{\sin\theta})\Theta = 0 \end{cases}$

La solución ha de ser  $2\pi$ -periódica en  $\phi$ :  $\mu_m = m^2$ ,  $\Phi_m(\phi) = \{\cos m\phi, \sin m\phi\}$ ,  $m = 0, 1, \dots$

Llevando estos  $\mu_m$  a la otra ecuación y haciendo como antes  $s = \cos\theta$  se tiene:

$$\frac{d}{ds}\left[(1-s^2)\frac{d\Theta}{ds}\right] + \left[\lambda - \frac{m^2}{1-s^2}\right]\Theta = 0, \quad \Theta \text{ acotada en } s = \pm 1.$$

La EDO, nueva para nosotros, se llama **ecuación asociada de Legendre**. Si  $m=0$  se recupera la de Legendre y las autofunciones eran los  $P_n$  hallados en 4.3. Se prueba que los autovalores del problema singular son también  $\lambda_n = n(n+1)$ , y sus autofunciones están relacionadas con ellos:

$$P_n^m(s) = (1-s^2)^{m/2} \frac{d^m}{ds^m} P_n(s), \quad \text{con } m \leq n$$

$$[P_n^0 = P_n, P_1^1 = \sin\theta, P_2^1 = 3\sin\theta\cos\theta, P_2^2 = 3\sin^2\theta, \dots]$$

$$\rightarrow Y_n^m(\theta, \phi) = \{\cos m\phi P_n^m(\cos\theta), \sin m\phi P_n^m(\cos\theta)\}, \quad n = 0, 1, \dots, m = 0 \dots n.$$

$$[Y_0^0 = \{1\}, Y_1^0 = \{\cos\theta\}, Y_1^1 = \{\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi\}, Y_2^0 = \{\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\}, Y_2^1 = \{3\sin\theta\cos\theta\cos\phi, 3\sin\theta\cos\theta\sin\phi\}, Y_2^2 = \{3\sin^2\theta\cos 2\phi, 3\sin^2\theta\sin 2\phi\}, \dots]$$

Las soluciones acotadas en  $r=0$  para esos  $\lambda_n$  son como antes  $R_n = \{r^n\}$ .

Los **armónicos esféricos** son estas soluciones de la ecuación de Laplace  $u_n^m = r^n Y_n^m(\theta, \phi)$ .

[Hay libros que llaman armónicos esféricos a los  $Y_n^m$ , otros a unos múltiplos concretos de los  $Y_n^m \dots$ ].

Con ellos formamos una serie a la que imponemos los datos. Se obtiene:

$$u(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \left[ a_{n0} P_n(\cos\theta) + \sum_{m=1}^n (a_{nm} \cos m\phi + b_{nm} \sin m\phi) P_n^m(\cos\theta) \right]$$

$$\rightarrow a_{n0} = \frac{2n+1}{4\pi R^n} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \phi) P_n(\cos\theta) \sin\theta d\theta d\phi,$$

$$a_{nm} = \frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi(n+m)!R^n} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \phi) \cos m\phi P_n^m(\cos\theta) \sin\theta d\theta d\phi,$$

$$b_{nm} = \frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi(n+m)!R^n} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \phi) \sin m\phi P_n^m(\cos\theta) \sin\theta d\theta d\phi, \quad m \geq 1$$

$$\text{puesto que se cumple } \int_{-1}^1 [P_n^m(t)]^2 dt = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}.$$

**Ej 2.** Hallamos la solución en caso de que sean  $R=1$  y  $f(\theta, \phi) = \sin^2\theta \sin^2\phi$ .

Buscamos identificar como hacíamos en 2 variables, mirando los armónicos ya hallados.

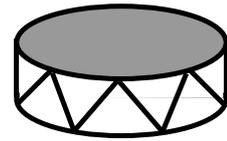
$$\begin{aligned} \text{Debe ser: } f(\theta, \phi) &= \frac{1}{2}\sin^2\theta - \frac{1}{2}\sin^2\theta\cos 2\phi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\sin^2\theta\cos 2\phi \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left[\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right] - \frac{1}{2}\sin^2\theta\cos 2\phi = \frac{1}{3}Y_0^0 - \frac{1}{3}Y_2^0 - \frac{1}{2}Y_2^2. \end{aligned}$$

Por tanto,  $a_{00} = \frac{1}{3}$ ,  $a_{20} = -\frac{1}{3}$ ,  $a_{22} = -\frac{1}{2}$  y los otros serán cero. La solución es, pues:

$$u(r, \theta, \phi) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}r^2\left[\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right] - \frac{1}{2}r^2\sin^2\theta\cos 2\phi.$$

Escrita en cartesianas es:  $u(x, y, z) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}[x^2 + y^2 + z^2] - \frac{1}{2}[x^2 - y^2] = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}y^2 - \frac{1}{3}z^2$ , función que cumple  $\Delta u = 0$  y que cuando  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  pasa a valer  $y^2 = f(\theta, \phi)$  si  $r=1$ .

Si los problemas 'esféricos' llevan a Legendre, los 'cilíndricos' (polares más otra coordenada,  $t$  en calor y ondas,  $z$  en Laplace) llevan a Bessel, como sucede en los problemas de **vibración de una membrana circular** (de un tambor).



Como hicimos con Laplace en la esfera, para empezar tratamos el caso más sencillo con 2 variables en el que la vibración no depende de  $\theta$ . Y para simplificar aún más suponemos que inicialmente es  $u_t=0$ :

$$\begin{cases} u_{tt} - [u_{rr} + \frac{1}{r}u_r] = 0, & r \leq 1, t \in \mathbf{R} \\ u(r, 0) = f(r), & u_t(r, 0) = 0 \\ u(1, t) = 0 \end{cases}$$

[Las vibraciones con simetría radial en el espacio, como se vio en 4.2, son más sencillas].

$$u = RT \rightarrow \frac{T''}{T} = \frac{R'' + \frac{R'}{r}}{R} = -\lambda \rightarrow \begin{cases} [rR']' + \lambda rR = 0, & R \text{ acotada en } 0, R(1) = 0 \\ T'' + \lambda T = 0, & T'(0) = 0 \rightarrow \{ \cos(\sqrt{\lambda} t) \} \end{cases}$$

El problema de contorno singular para la  $R$  fue visto al final de 3.1. Recordemos que con  $s=r\sqrt{\lambda}$  desaparecía  $\lambda$  y la ecuación pasaba a ser una de Bessel:

$sR''(s) + R'(s) + sR(s) = 0 \rightarrow R = c_1 J_0(s) + c_2 K_0(s) = c_1 J_0(wr) + c_2 K_0(wr)$ ,  $w = \sqrt{\lambda}$   
Imponiendo los datos se obtenían los autovalores  $\lambda_n = w_n^2$  tales que  $J_0(w_n) = 0$ , y las autofunciones asociadas eran  $R_n = \{J_0(w_n r)\}$ .

Nos falta imponer la condición inicial aún no utilizada a la serie:

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(w_n t) J_0(w_n r) \rightarrow u(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(w_n r) = f(r)$$

Este desarrollo ya lo discutimos en el último ejemplo de 3.2. Allí vimos que era:

$$c_n = \frac{2}{J_1^2(w_n)} \int_0^1 r f(r) J_0(w_n r) dr$$

**Ej 3.** Hallemos si  $f(r) = 1 - r^2$  la integral  $\int_0^1 (r - r^3) J_0(w_n r) dr$ ,  $w_n = \sqrt{\lambda_n}$ , que define  $c_n$ .

$$\text{Haciendo } s = w_n r: \int_0^1 = \frac{1}{w_n^2} \int_0^{w_n} s J_0(s) ds - \frac{1}{w_n^4} \int_0^{w_n} s^3 J_0(s) ds$$

La primera primitiva es inmediata, pues  $[sJ_1]' = sJ_0$ . La segunda, por partes:

$$\int s^2 s J_0 ds = s^3 J_1 - 2 \int s^2 J_1 ds = s^3 J_1 - 2s^2 J_2 = (s^3 - 4s) J_1 + 2s^2 J_0$$

ya que  $[s^2 J_2]' = s^2 J_1$  y  $J_{n+1} = \frac{2n}{s} J_n - J_{n-1}$ . Y como  $J_0(w_n) = 0$  concluimos:

$$\int_0^1 = \frac{4}{w_n^3} J_1(w_n) \Rightarrow u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{w_n^3 J_1(w_n)} \cos(w_n t) J_0(w_n r)$$

Pese a su aspecto complicado, esta solución no lo es mucho más que la  $\sum k_n \cos(n\pi t) \sin(n\pi x)$  que se obtendría para la cuerda vibrante con datos similares (que resolvimos en 4.2).

En muchos libros (o en programas tipo Maple o Sage) se pueden encontrar los ceros  $w_n$  de  $J_0$ :

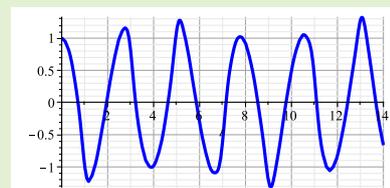
$$\{w_n\} \approx 2.4048256, 5.5200781, 8.6537279, 11.791534, 14.930918, \dots$$

$$\text{y los valores de } J_1(w_n): 0.519147, -0.340265, 0.271452, -0.232461, 0.206547, \dots$$

Necesitamos sólo un programa que reconozca la  $J_0$  para dar valores o hacer dibujos aproximados de la solución. Por ejemplo, utilizando los 5 primeros términos de la serie, podemos (con Maple en este caso) aproximar y dibujar  $u(0, t)$ :

$$\begin{aligned} u(0, t) \approx & 1.108 \cos(2.405 t) - 0.1398 \cos(5.520 t) \\ & + 0.04548 \cos(8.654 t) - 0.02099 \cos(11.79 t) \\ & + 0.01164 \cos(14.93 t) \end{aligned}$$

Las vibraciones de un tambor, a diferencia de lo que pasa con las de una cuerda, no son periódicas (puesto que los  $w_n$  no son múltiplos exactos unos de otros).



Para acabar esta sección, tratemos el problema más general y complicado en 3 variables:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2[u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}] = 0, & r \leq 1, t \in \mathbf{R} \\ u(r, \theta, 0) = f(r, \theta), & u_t(r, \theta, 0) = 0 \\ u(1, \theta, t) = 0 \end{cases}$$

$$u = R\Theta T \rightarrow \frac{T''}{c^2 T} = \frac{R'' + \frac{R'}{r}}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''}{\Theta} = -\lambda \rightarrow \frac{r^2 R'' + rR'}{R} + \lambda r^2 = \frac{\Theta''}{\Theta} = -\mu \rightarrow$$

$$\begin{cases} \Theta'' + \mu\Theta = 0, & \Theta \text{ } 2\pi\text{-periódica} \rightarrow \mu_m = m^2, m=0,1,\dots, \Theta_m = \{\cos m\theta, \sin m\theta\}, \Theta_0 = \{1\} \\ T'' + \lambda c^2 T = 0, & T'(0) = 0 \rightarrow \{\cos[\sqrt{\lambda} ct]\} \\ r^2 R'' + rR' + [\lambda r^2 - \mu]R = 0, & R \text{ acotada en } 0 \end{cases}$$

Para  $\mu = m^2$  consideramos el problema de contorno singular para  $R$ :

$$\begin{cases} r^2 R'' + rR' + [\lambda r^2 - m^2]R = 0 \\ R \text{ acotada en } 0, R(1) = 0 \end{cases}$$

Haciendo  $s = r\sqrt{\lambda}$  desaparece como siempre  $\lambda$  y la ecuación se convierte en Bessel:

$$s^2 R''(s) + sR'(s) + [s^2 - m^2]R(s) = 0 \rightarrow$$

$$R = c_1 J_m(s) + c_2 K_m(s) = c_1 J_m(wr) + c_2 K_m(wr), w = \sqrt{\lambda}$$

$R$  acotada  $\Rightarrow c_2 = 0$ . Los autovalores serán los  $\lambda = w^2$  que hagan  $J_m(wr) = 0$ , que son una sucesión infinita para cada  $m$ :  $w_{m_1}, \dots, w_{m_k}, \dots$

Y las autofunciones son  $R_{mk} = \{J_m(w_{m_k}r)\}$ . Así que probamos:

$$u(r, \theta, t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} c_{0k} \cos(cw_{0k}t) J_0(w_{0k}r) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} [c_{mk} \cos n\theta + d_{mk} \sin n\theta] \cos(cw_{mk}t) J_m(w_{mk}r)$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} c_{0k} J_0(w_{0k}r) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} [c_{mk} \cos n\theta + d_{mk} \sin n\theta] J_m(w_{mk}r) = f(r, \theta)$$

Para  $r$  fijo,  $f(r, \theta) = \frac{1}{2} A_0(r) + \sum_{m=1}^{\infty} [A_m(r) \cos m\theta + B_m(r) \sin m\theta]$ , con

$$A_m(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \theta) \cos m\theta d\theta, m=0,1,\dots, B_m(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \theta) \sin m\theta d\theta, m=1,2,\dots$$

Desarrollando:

$$A_m(r) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{mk} J_m(w_{mk}r), B_m(r) = \sum_{k=1}^{\infty} d_{mk} J_m(w_{mk}r)$$

Teniendo en cuenta (se puede probar) que:  $\int_0^1 r J_m^2(w_{mk}r) dr = \frac{1}{2} J_{m+1}^2(w_{mk})$ ,

se llega a la expresión para los coeficientes de la serie doble de arriba:

$$\begin{cases} c_{mk} = \frac{2}{\pi J_{m+1}^2(w_{mk})} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r f(r, \theta) \cos n\theta J_m(w_{mk}r) dr d\theta \\ d_{mk} = \frac{2}{\pi J_{m+1}^2(w_{mk})} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r f(r, \theta) \sin n\theta J_m(w_{mk}r) dr d\theta \end{cases}$$

## 4.5. Funciones de Green.

Comencemos tratando las funciones de Green para **problemas de contorno no homogéneos para EDOs**. Veamos una fórmula que para cualquier  $f(x)$  nos da en términos de integrales la solución (en el caso de que sea única) de:

$$(P_f) \begin{cases} [p(x)y']' + g(x)y = f(x) \\ \alpha y(a) - \alpha' y'(a) = \beta y(b) + \beta' y'(b) = 0 \end{cases}, \quad p \in C^1, g, f \in C, p > 0 \text{ en } [a, b].$$

conocidas las soluciones de la ecuación homogénea (algo parecido a la fórmula de variación de las constantes para problemas de valores iniciales):

**Teor 1** Supongamos que  $(P_h)$  tiene sólo la solución  $y \equiv 0$  y sean  $y_1$  e  $y_2$  soluciones no triviales de la homogénea  $[py']' + gy = 0$  que cumplen, respectivamente,  $\alpha y_1(a) - \alpha' y_1'(a) = 0$  y  $\beta y_2(b) + \beta' y_2'(b) = 0$ . Entonces la solución única de  $(P_f)$  es:

$$y(x) = \int_a^b G(x, s) f(s) ds, \quad \text{con } G(x, s) = \begin{cases} \frac{y_1(s)y_2(x)}{\rho |W|(y_1, y_2)}, & a \leq s \leq x \\ \frac{y_1(x)y_2(s)}{\rho |W|(y_1, y_2)}, & x \leq s \leq b \end{cases}$$

A la  $G(x, s)$  se le llama **función de Green** del problema.

[Observemos que el denominador que aparece en la  $G$  es constante:

$$[p(y_1 y_2' - y_2 y_1')] = y_1 [p(y_2')] - y_2 [p(y_1')] = -gy_1 y_2 + gy_2 y_1 = 0].$$

Comprobemos que la  $y(x)$  de arriba cumple  $(P_f)$ . Desarrollando la integral:

$$y(x) = y_1(x) \int_a^b \frac{y_2(s)}{|W|(s)} \frac{f(s)}{\rho} ds + y_2(x) \int_a^x \frac{y_1(s)}{|W|(s)} \frac{f(s)}{\rho} ds - y_1(x) \int_a^x \frac{y_2(s)}{|W|(s)} \frac{f(s)}{\rho} ds = cy_1 + y_p.$$

Por tanto,  $y(x)$  es solución de la no homogénea  $y'' + \frac{p'}{p}y' + \frac{q}{p}y = \frac{f}{p}$ .

Además como  $y'(x) = y_1' \int_a^b \frac{y_2}{|W|} \frac{f}{p} + y_2' \int_a^x \frac{y_1}{|W|} \frac{f}{p} - y_1' \int_a^x \frac{y_2}{|W|} \frac{f}{p}$  se tiene que:

$$y(a) = cy_1(a), y'(a) = cy_1'(a), y(b) = ky_2(b), y'(b) = ky_2'(b), c = \int_a^b \frac{y_2 f}{|W| p}, k = \int_a^b \frac{y_1 f}{|W| p}.$$

Como  $y_1, y_2$  cumplen cada condición de contorno, también lo hace la  $y$ .

Una vez **calculada la  $G$ , dada cualquier  $f$ , basta hacer un par de integraciones para encontrar la solución del problema no homogéneo  $(P_f)$ .**

[Que quede claro que cada  $y_k$  satisface solamente una condición (o en  $a$  o en  $b$ ; ambas condiciones sólo las cumple la trivial). La  $f$  y la  $p$  del teorema son, como siempre, las de la ecuación escrita en la forma  $[py']' + gy = f$ ; en muchos casos será  $p \equiv 1$  (como en el ejemplo siguiente), pero en otros deberemos reescribir la ecuación].

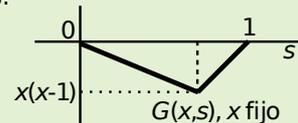
**Ej 1.**  $(P_1) \begin{cases} y'' = f(x) \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y'' = 0 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$  sólo lo cumple  $y \equiv 0 \Rightarrow (P_1)$  tiene solución única.

Hallemos su función de Green. La solución general de la homogénea es  $y = c_1 + c_2 x$ .

De la primera condición de contorno deducimos  $y(0) = c_1 = 0$ . Podemos tomar  $y_1 = x$ .

De la segunda,  $y(1) = c_1 + c_2 = 0$ . Elegimos  $y_2 = x - 1$ . Entonces:

$$|W|(x) = \begin{vmatrix} x & x-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad p(x) = 1, \quad G(x, s) = \begin{cases} s(x-1), & 0 \leq s \leq x \\ x(s-1), & x \leq s \leq 1 \end{cases}$$



Si, por ejemplo,  $f(x) = 1$ , la solución de  $(P_1)$  viene dada por:

$$y(x) = \int_0^1 G(x, s) 1 ds = (x-1) \int_0^x s ds + x \int_x^1 (s-1) ds = \frac{1}{2} [x^2 - x].$$

Para resolver un problema con una  $f$  dada, calcular la  $G$  puede ser un rodeo inútil.

Por ejemplo, la última solución se podría obtener:

$$y'' = 1 \rightarrow y = c_1 + c_2 x + \frac{1}{2} x^2 \rightarrow \begin{cases} y(0) = c_1 = 0 \\ y(1) = c_1 + c_2 + \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \rightarrow y = \frac{1}{2} [x^2 - x] \text{ como antes.}$$

Pero para cada nueva  $f$  habría que volver a hallar la  $y_p$  e imponer  $y(0) = y(1) = 0$ .

Las funciones de Green están muy ligadas a la 'función'  $\delta$ . Observemos que la  $G(x, s)$  del ejemplo 1 para  $x$  fijo (o para  $s$  fijo, pues  $G$  es simétrica) es continua pero no derivable en  $s = x$  y su 'derivada' segunda es  $\delta(s-x)$ . De hecho, esto es lo que sucede en general:

**Teor 2**  $G(x, s)$  es la solución para  $x \in (a, b)$  fijo de  $\begin{cases} [p(s)G']' + g(s)G = \delta(s-x) \\ \alpha G(a) - \alpha' G'(a) = \beta G(b) + \beta' G'(b) = 0 \end{cases}$ .

[La prueba es trivial:  $\int_a^b G(s, u) \delta(u-x) du = G(s, x) = G(x, s)$ ].

Hallamos la  $G$  del  $(P_1)$  por este camino más largo, pero que es el que se generaliza a las EDPs.

$$\begin{cases} G''(s) = \delta(s-x) & G''=0, s \neq x \\ G(0) = G(1) = 0 \end{cases} \xrightarrow{G''=0, s \neq x} G(s) = \begin{cases} c_1 + c_2 s, & y(0) = 0 \rightarrow G = c_2 s, s \leq x \\ k_1 + k_2 s, & y(1) = 0 \rightarrow G = k_2 [s-1], s \geq x \end{cases}$$

Y como  $G'' = \delta$ , ha de ser continua  $G$  y su derivada tener un salto en  $x$  de magnitud unidad:

$$\rightarrow \begin{cases} G(x^-) = c_2 x = k_2 [x-1] = G(x^+) \\ G'(x^+) - G'(x^-) = k_2 - c_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_2 = x-1 \\ k_2 = x \end{cases}$$

La idea de la función de Green se utiliza en diversos problemas de EDOs y EDPs. En estos apuntes nos limitaremos a hablar de las **funciones de Green para la ecuación de Laplace**.

[En lo que sigue operaremos formalmente con la  $\delta$  en dos variables, utilizando sólo:

$$i. \delta(\xi-x, \eta-y) = 0 \text{ para } (\xi, \eta) \neq (x, y)$$

$$ii. \iint_D F(\xi, \eta) \delta(\xi-x, \eta-y) d\xi d\eta = F(x, y) \text{ si } F \text{ continua en } D \subset \mathbf{R}^2 \text{ y } (x, y) \in D \text{.}$$

Consideremos el problema de **Dirichlet no homogéneo**:

$$(P_D) \begin{cases} \Delta u = F(x, y) \text{ en } D \\ u = f \text{ en } \partial D \end{cases}$$

Nuestro objetivo es (como en lo anterior) expresar su solución única en función de integrales en las que sólo aparezcan una función de Green  $G$  y los datos  $F$  y  $f$ :

**Teor 3** A la solución  $G(x, y; \xi, \eta)$  de  $(P_G) \begin{cases} \Delta G = \delta(\xi-x, \eta-y) \text{ en } D \\ G = 0 \text{ en } \partial D \end{cases}$ , para cada  $(x, y) \in D$ , vista como función de  $(\xi, \eta)$ , se le llama **función de Green de  $(P_D)$** . Entonces:  $u(x, y) = \iint_D G(x, y; \xi, \eta) F(\xi, \eta) d\xi d\eta + \oint_{\partial D} G_{\mathbf{n}}(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta) ds$ , es solución de  $(P_D)$ .

[ $G_{\mathbf{n}}$  es, como siempre, la derivada de  $G$  en la dirección de  $\mathbf{n}$ , vector unitario exterior a  $D$ ].

Del teorema de la divergencia es fácil deducir la llamada segunda identidad de Green:

$$\text{Si } u \text{ y } G \text{ son } C^2(\bar{D}) \text{ se tiene } \iint_D [G \Delta u - u \Delta G] d\xi d\eta = \oint_{\partial D} [G u_{\mathbf{n}} - u G_{\mathbf{n}}] ds$$

Si  $u$  es la solución de  $(P_D)$  y  $G$  la de  $(P_G)$ , y admitimos que la identidad anterior es válida para nuestra  $G$  (que claramente no es  $C^2$ , pero se justifica con 'distribuciones') tenemos:

$$\iint_D [GF - u\delta] d\xi d\eta = \oint_{\partial D} [-f G_{\mathbf{n}}] ds \rightarrow u = \iint_D GF d\xi d\eta + \oint_{\partial D} G_{\mathbf{n}} f ds$$

¿Cómo resolver  $(P_G)$ ? Comencemos buscando una  $v(x, y; \xi, \eta)$  que, como función de  $(\xi, \eta)$ , satisfaga  $\Delta v = \delta$ , aunque no cumpla la condición de contorno. ¿Para qué funciones es  $\Delta v = 0$  y pueden originar una  $\delta$ ? Las soluciones de Laplace en polares dependiendo de  $r$  son:

$$v_{rr} + \frac{1}{r} v_r = 0 \rightarrow v = c_1 + c_2 \ln r$$

Así que algún múltiplo del discontinuo logaritmo de la distancia  $r = \overline{PQ}$  del punto  $P = (\xi, \eta)$  al  $Q = (x, y)$  es buen candidato a  $v$ :

**Teor 4**  $v = \frac{1}{4\pi} \ln[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2] = \frac{1}{2\pi} \ln \overline{PQ}$  satisface  $\Delta v = \delta(\xi-x, \eta-y)$  para  $(x, y)$  fijo. A  $v$  se le llama **solución fundamental** para el punto  $(x, y)$ .

Volvemos a hacer 'trampa' con la  $\delta$ . Ya vimos que  $\Delta v = 0$  si  $r \neq 0$ , o sea, si  $(\xi, \eta) \neq (x, y)$ . Además, el 'teorema' de la divergencia en un círculo de centro  $Q$  y radio  $R$  nos da:

$$\iint_{r \leq R} \Delta v d\xi d\eta = \oint_{r=R} v_{\mathbf{n}} ds = \oint_{r=R} v_r ds = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi R} R d\theta = 1 \rightarrow \Delta v = \delta.$$

Si  $w$  satisface  $\Delta w = 0$  en  $D$ , la función  $v+w$  seguirá cumpliendo  $\Delta[v+w] = \delta$  para cada  $(x, y) \in D$  fijo. Por tanto, **para encontrar  $G$  [y tener resuelto  $(P_D)$ ] basta encontrar la  $w$  armónica en  $D$  tal que  $v+w = G$  se anule en la frontera  $\partial D$ .**

La forma práctica de hallar la  $w$  (en recintos  $D$  limitados por rectas y circunferencias) es el **método de las imágenes**. Viendo la geometría de  $D$  se tratará de escribir  $G$  como suma de la solución fundamental  $v$  y de funciones armónicas  $w$  del mismo tipo, logaritmos de distancias a puntos  $Q'$  **exteriores** a  $D$  ('imágenes' de  $Q$  respecto de la  $\partial D$ ), elegidos de forma que sea  $G=0$  en la frontera de  $D$ . En un primer ejemplo,  $D$  está limitado por rectas:

**Ej 2.**  $(P_2) \begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } D = (0, \infty) \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = f(x), u(0, y) = 0, u \text{ acotada} \end{cases}$  Sean  $Q=(x, y) \in D$  fijo,  $P=(\xi, \eta)$ ,  
 $v = \frac{1}{2\pi} \ln \overline{PQ}$ .

Si  $Q' = (-x, y)$ , es claro que  $w' = -\frac{1}{2\pi} \ln \overline{PQ'}$  es función de  $P$  que es armónica en  $D$  (lo es en  $\mathbf{R}^2 - \{Q'\}$ ) y que  $v+w'=0$  si  $P$  pertenece al eje  $y$ , pues entonces  $\overline{PQ} = \overline{PQ'}$ . Análogamente  $w_* = -\frac{1}{2\pi} \ln \overline{PQ_*}$ , con  $Q_* = (x, -y)$ , es armónica en  $D$  y  $v+w_*=0$  si  $P$  se mueve en el eje  $x$ . Para que  $G$  sea 0 en ambos ejes a la vez hay que sumar una nueva armónica:  $w'_* = -\frac{1}{2\pi} \ln \overline{PQ'_*}$ , con  $Q'_* = (-x, -y)$ .

Entonces  $G(P, Q) = v + w' + w_* + w'_*$  es la función de Green buscada, ya que  $\Delta G = \delta$  [pues  $\Delta v = \delta$  y  $\Delta(w' + w_* + w'_*) = 0$ ] y  $G=0$  si  $P \in \partial D$  [si  $P$  está en  $x=0$  es  $\overline{PQ} = \overline{PQ'}$  y  $\overline{PQ_*} = \overline{PQ'_*}$ ; y similar en el eje  $x$ ].

Escribiendo las distancias analíticamente tenemos:

$$G(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{4\pi} \ln [(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2] - \frac{1}{4\pi} \ln [(\xi+x)^2 + (\eta-y)^2] - \frac{1}{4\pi} \ln [(\xi-x)^2 + (\eta+y)^2] + \frac{1}{4\pi} \ln [(\xi+x)^2 + (\eta+y)^2].$$

Y como  $\mathbf{n} = -\mathbf{j}$  en el eje  $x$ , la solución de nuestro problema  $(P_2)$  será:

$$u(x, y) = \oint_{\partial D} G \mathbf{n} f ds = \int_0^\infty -G_\eta|_{\eta=0} f(\xi) d\xi = \dots = \frac{y}{\pi} \int_0^\infty \left[ \frac{1}{(\xi-x)^2 + y^2} - \frac{1}{(\xi+x)^2 + y^2} \right] f(\xi) d\xi.$$

Veamos ahora el **problema no homogéneo de Dirichlet en el círculo**:

$(P_3) \begin{cases} \Delta u = F(r, \theta) \text{ en } r < R \\ u(R, \theta) = f(\theta), \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$   $Q=(r, \theta) \in D$  fijo,  $P=(\sigma, \phi)$  variable.

La solución fundamental  $v$  en estas coordenadas queda:

$$v = \frac{1}{2\pi} \ln \overline{PQ} = \frac{1}{4\pi} \ln [\sigma^2 + r^2 - 2\sigma r \cos(\theta - \phi)].$$

¿Dónde situar el punto imagen  $Q'$ ? Las cosas no son tan claras como en el ejemplo anterior. Es claro que su  $\theta$  ha de ser igual, pero ¿a qué distancia del origen  $O$  colocarlo? Se podría llegar al resultado tanteando, pero sólo comprobaremos que la  $G$  es:

$$G(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \left[ \ln \overline{PQ} - \ln \overline{PQ'} + \ln \frac{R}{r} \right], \quad Q' = \left( \frac{R^2}{r}, \theta \right), \text{ es decir,}$$

$$G(r, \theta; \sigma, \phi) = \frac{1}{4\pi} \ln [\sigma^2 + r^2 - 2\sigma r \cos(\theta - \phi)] - \frac{1}{4\pi} \ln \left[ R^2 + \frac{r^2 \sigma^2}{R^2} - 2\sigma r \cos(\theta - \phi) \right]$$

En efecto:  $G = v + v' + cte \Rightarrow \Delta G = 0$  [ $v'$  armónica en  $\mathbf{R}^2 - \{Q'\}$  y  $Q' \notin D$ ] y además  $G=0$  si  $P \in \partial D$ , o sea, si  $\sigma=R$ .

Además,  $G_{\mathbf{n}} = G_\sigma|_{\sigma=R}$  y  $ds = R d\phi$ , por lo que la solución de  $(P_3)$  es:

$$u(r, \theta) = \int_0^R \int_0^{2\pi} \sigma G(r, \theta; \sigma, \phi) F(\sigma, \phi) d\phi d\sigma + \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\phi) d\phi}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi) + r^2}$$

[Expresión más compacta que las series de Fourier, aunque estas integrales, en general, no son calculables (y hay que aproximarlas, pero son aproximaciones también las sumas parciales)].

Las cuentas en **tres dimensiones** son similares a los de dos. Si  $G$  es solución de  $(P_G)$ :

$$u(x, y, z) = \iiint_D G F d\xi d\eta d\gamma + \oint_{\partial D} G \mathbf{n} f dS \quad (\partial D \text{ es ahora una superficie}).$$

La solución fundamental en el espacio es  $v = -\frac{1}{4\pi PQ}$  [ $v_{rr} + \frac{2}{r} v_r = 0 \rightarrow v = c_1 + \frac{c_2}{r}$ ]

Los puntos imágenes respecto a planos son igual de sencillos y para la esfera de radio  $R$  vuelve a situarse el punto  $Q'$  a una distancia  $R^2/r$  del origen.