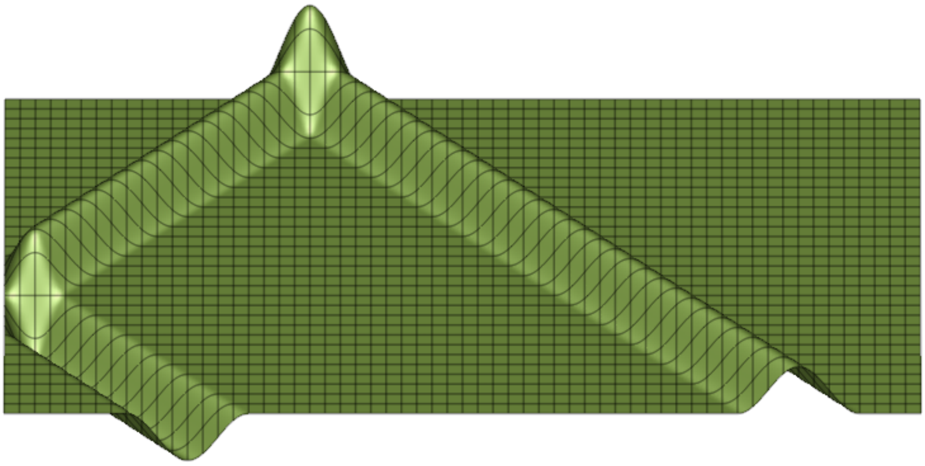
2024

apuntes de métodos matemáticos II (EDPs)



Pepe Aranda

Métodos Matemáticos
Físicas Complutense
pparanda@ucm.es
https://teorica.fis.ucm.es/pparanda/EDPs.html

Bibliografía

H Haberman. ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES con Series de Fourier y Problemas de Contorno. Prentice Hall

Ss Strauss. PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS. An Introduction. Wiley

W Weimberger. ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES. Reverté

Sp Stephenson. INTRODUCCION A LAS ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES. Reverté

MU Myint-U. PARTIAL DIFFRENTIAL EQUATIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS. Elsevier

T Tijonov-Samarski. ECUACIONES DE LA FISICA MATEMATICA. Mir

Ch Churchill. SERIES DE FOURIER Y PROBLEMAS DE CONTORNO. McGraw-Hill

BD Boyce-Di Prima. ECUACIONES DIFERENCIALES y problemas con valores en la frontera. Limusa

Si Simmons. ECUACIONES DIFERENCIALES (con aplicaciones y notas históricas). McGraw-Hill

Br Braun. ECUACIONES DIFERENCIALES Y SUS APLICACIONES. Interamericana

R Ross. ECUACIONES DIFERENCIALES. Reverté

E Elsgoltz. ECUACIONES DIFERENCIALES Y CALCULO VARIACIONAL. Mir

MCZ Marcellán-Casasús-Zarzo. ECUACIONES DIFERENCIALES. Problemas Lineales y Aplicaciones. McGraw-Hill

PA Puig Adam. CURSO TEORICO-PRACTICO DE ECUACIONES DIFERENCIALES APLICADO A LA FISICA Y TECNICA.

Los 7 primeros libros son propiamente de EDPs: H, Ss, W, MU y T incluyen casi todos los temas de los apuntes (y muchos otros que no se tratan en ellos). Sp y Ch tienen bastantes menos páginas (y sirven para parte del curso). Los 5 siguiente son básicamente de EDOs, con lo que casi todos tratan los temas 2 y 3 relativos a ecuaciones ordinarias, aunque tienen también introducciones a las EDPs. En concreto, BD, Si, Br y R estudian los problemas de contorno para EDOs y algo del método de separación de variables. R clasifica además las EDPs de segundo orden con coeficientes constantes. E trata con detalle las EDPs de primer orden (lineales y no lineales). Los 2 últimos, el MCZ y el clásico PA (de 1950), son mixtos de EDOs y EDPs y abarcan una mayor parte del curso.

Bastantes libros de EDPs, en vez de estar organizados (como lo están estos apuntes) en torno a los métodos de resolución, estudian por separado y con diferentes técnicas las ecuaciones hiperbólicas, elípticas y parabólicas.

Las EDPs de primer orden de 1.1 se tratan en H, E y PA, pero se centran en las cuasilineales (o incluso no lineales) más generales y complicadas. La reducción a forma canónica (con coeficientes no constantes como en mis apuntes de EDII) y las cuestiones de unicidad se ven en casi todos los libros de EDPs, como en MU, W o T. La deducción de las ecuaciones y el significado físico de los problemas se puede mirar, por ejemplo, en Bd, H, W, Ss o T. Para la cuerda vibrante de 1.4 se pueden consultar el H, SS o W. Para la sección 1.5 de la $\mathcal{F}$ ver Ch, Ss, Sp, MU y, sobre todo, H y W que utilizan también la transformada de Laplace para EDPs (W tiene incluso una introducción a la variable compleja).

El método de series para las EDOs del tema 2 está bien contado en el BD y el Si, tanto para puntos regulares como para singulares regulares.

Para el 3 es recomendable leer BD, Si y H. Hay más demostraciones que en los apuntes (y con matemáticas no muy complicadas) en Ss, W o Ch.

La separación de variables del tema 4 está en casi todos los libros. Buenas introducciones hay en Sp, BD, Si, Br o R. El libro más recomendable para todo este capítulo es el H. Para precisiones de convergencia y problemas de varias variables, más variados que los escasos resueltos en estos apuntes, ver Ss, W, MU o T. La introducción a las funciones de Green para Laplace de 4.5, sigue más o menos el MU. Ss, W, T y Sp también estudian las funciones de Green por otros caminos.

El MCZ, el H y el Ss dan métodos numéricos para problemas de contorno y EDPs (lo que no hacen los demás libros, salvo unas pocas ideas del W).

Sobre las versiones de los apuntes

Versión 2024. Cambio de portada, numeración de páginas e índice con enlaces a cada sección. Abundantes leves cambios en teoría y ejemplos (alguno nuevo en 1.1, 2.2, 4.2 y 4.3), manteniendo las 90 páginas del 2023. Se conservan las 6 páginas de problemas con los nuevos de ese curso (y ahora son 12 de adicionales).

Versión 2023. Sólo retoques y cambios de problemas por los controles y exámenes del 21-22.

Versión 2022. Retoques mínimos en teoría, pero se vuelven a actualizar los problemas a partir de los creados durante los cursos covid 19-20 y 20-21.

Versión 2021. No cambian estos apuntes (fechas y leves retoques), pero se crean y actualizan las versiones resumidas de las secciones en formato horizontal para ser utilizados como transparencias en las clases.

Versión 2020. Pocos cambios en teoría (algunos menores en 2.3 y 3.2). Inclusión de problemas del 16-17. Reducción ligera de los márgenes del texto (lo que implicó muchos cambios estéticos).

Versión 2017. Se añaden ejemplos en 1.1, 1.4, 3.2 y 3.3. Cada uno de esos capítulos crece en dos páginas. Alguna novedad en ejemplos de 4.1 y en la descripción de las ideas generales sobre separación de variables. Se incluyen nuevos problemas provinientes de curso 13-14.

Versión 2014. Bastantes retoques. En 1.1, Δ pasa a llamarse T. Se reordena 1.2 y 1.3. Nuevo ejemplo en 1.4. Detalles en 2.1 y cambio de ejemplo en 2.2. Retoques al final de 3.1 y (más) de 3.2. Más ejemplos en 4.1. Las reflexiones sobre separación de variables pasan al final de 4.3. Los cambios habituales en problemas.

Versión 2013. El mayor cambio es el traslado de la transformada de Fourier al final del capítulo 1, que adoptó nuevo nombre (y de las funciones de Green a una sección al final del 4). Bastantes pequeños retoques en teoría y ejemplos de separación de variables. Cambios menores en el resto de los apuntes y, como cada curso, se retocaron los problemas, incluyendo los del curso anterior y pasando otros a adicionales.

Versión 2012. Primeros **apuntes de métodos matemáticos II**, asignatura del grado en Física. Incluyen un nuevo tema 3 de soluciones por series (dejaron la asignatura de EDOs para hacer hueco a la variable compleja). Para hacer sitio a este tema se recortan varios de 'Ecuaciones II'. Se limaron sutilezas de tangencias en 1.1. En 1.2 se tratan sólo EDPs con coeficientes constantes. La cuerda vibrante vuelve simplificada (tras 12 años) al tema 1. Poco queda de ondas en más dimensiones. El tema 2 recogió el tema 3 de mis apuntes de EDOs, con notable reducción de ejemplos y problemas. Del anterior tema 2 (ahora 3) salen las funciones de Green (que se juntaron con las de Laplace en 5.2). En el 4 de separación de variables pasaron a tener sección propia las ondas (con más ejemplos, algunos de comparación con D'Alembert). De la transformada de Fourier desaparecieron las transformadas seno y coseno. El apéndice tuvo que modificar. Y la mayor reducción, como en el anterior cambio de plan, se hizo en los problemas (ya simplificados para el grupo residual del curso anterior).

Para separar los ejemplos se incluyeron (como en los apuntes de Matemáticas) recuadros de color.

Versión 2011. Adaptación al 'grupo residual' de licenciatura (2010/11, último año con clases). Pasaron a 'letra pequeña' temas que en otros grupos no se contaban (como las ondas en 3 y 2 dimensiones), bastantes problemas pasaron a adicionales y se incluyeron otros y nuevos ejemplos del piloto del 08/09.

Versión 2009. Bastantes novedades, empezando por la letra, que pasó a ser Bitstream-Vera (sin serif), lo que obligó a reescribir (y retocar) muchas partes del texto. 1.1 y 1.3 se modificaron algo y 1.2 se volvió a reordenar. 2 perdió una sección. Los ejemplos de la vieja 2.1 se incluyeron, además de otros nuevos, en la nueva 2.1. Aparecieron más ejemplos en series de Fourier y en problemas no homogéneos. 3.1 incluyó más ejemplos del calor y 3.2 dos más en cartesianas y uno en polares. 3.3 cambió poco y como 3.4 (antes 4.4) apareció la introducción a las funciones de Green para Laplace. En todo el 4 aparecieron ejemplos (y otros se detallaron). En 4.1, uno de cuerda semi-infinita y otro de cuerda acotada, dos de ondas en 3 dimensiones en 4.2, y tres de la $\mathcal{F}$ de 4.3. Se creó un apéndice con repaso de EDOs, de convergencia uniforme y cálculo en varias variables. Los problemas cambiaron bastante (los grupos piloto exigen inventar muchos problemas y eso se notó).

Versión 2008. Correcciones menores, se reordenó 1.2 y nuevos ejemplos en 3.1. Los problemas incluyeron los de examen del 07, algunos pasaron a adicionales y otros fueron problemas a entregar en el piloto.

Versión 2007. Primera de los **apuntes de Ecuaciones Diferenciales II (EDPs)** y heredera de los **apuntes de ecuaciones en derivadas parciales** de 1997-98 para los 'Métodos Matemáticos II' de 3°, de 5 horas semanales y cursados 'Métodos I' en 2° (variable compleja y espacios de Hilbert). Las 'Ecuaciones II' eran de 2°, con 4 horas y sólo se había visto Álgebra, Cálculo y EDOs. Hubo que reducir contenidos. Se reordenaron los temas y algunos pasaron a estar a título informativo. Se recortaron bastante los problemas más complicados.

Yendo al detalle, el tema 1 era el viejo 5, con más ejemplos, algún recorte en unicidad y ya apareció D'Alembert (el anterior capítulo 6 pasó, reduciendo su tamaño, al tema 4). El 2 de la versión era el antiguo 7 de problemas de contorno, centrándose en las condiciones separadas, eliminando la comparación de autovalores y con la δ de Dirac en letra pequeña. El 3 de separación de variables era el 8 reordenado. En vez de separar homogéneos y no homogéneos, se tratan seguidos, primero para calor y ondas, y en otra sección para Laplace. Aparecen los armónicos esféricos. El 4 incluyó las ondas en 1, 3 y 2 dimensiones espaciales (con menos intensidad que en Métodos II), la transformada de Fourier, y, a título informativo, el método de las imágenes.

Los problemas se dividieron en 'problemas' (los que se hacen en clase) y 'problemas adicionales'. Unos cuantos de los viejos problemas (y varios apartados de otros) desaparecieron del todo.

Los apuntes se hicieron en LaTeX, utilizando el programa TeXShop para Mac y eligiendo ese año 2007, para distinguirse de las letras habituales, el tipo 'palatino'.

Introducción

Estos apuntes estudian principalmente las **ecuaciones en derivadas parciales** (EDPs), aunque también tratan las soluciones por medio de series y los problemas de contorno de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs). Una EDP es una ecuación en la que aparecen derivadas parciales de una función incógnita de varias variables. Todas las EDPs que veremos serán **lineales**. Más en concreto, salvo un breve estudio de las lineales de primer orden, trataremos de EDPs **lineales de segundo orden** (con derivadas de orden 2 o menor), del tipo:

$$[\mathrm{E}] \quad L[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} B_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + Cu = F$$

con u, A_{ij}, B_j, C y F funciones de $(x_1,\dots,x_n)$. Principalmente veremos el caso $n=2$. Una **solución** de [E] será una función $u(x_1,\dots,x_n)$ de clase C^2 en una región D de $\mathbf{R}^n$ que sustituida en la ecuación la convierte en una identidad.

Entre las EDPs lineales de segundo orden se encuentran muchas ecuaciones de la física. Entre ellas las tres clásicas:

ecuación de ondas	$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$
ecuación del calor	$u_t - k\Delta u = 0$
y **ecuación de Laplace**	$\Delta u = 0$,

ejemplos respectivos de los tres tipos en que se clasifican: **hiperbólicas**, **parabólicas** y **elípticas**. La teoría avanzada de EDPs viene a ser la generalización del estudio de estas tres ecuaciones. Sus propiedades son tan diferentes que no existen teorías generales como la de las EDOs lineales.

En el **capítulo 1** se describirán las pocas veces que se puede hallar la solución de una EDP mediante integración (por eso, en el capítulo 4 utilizaremos series para resolverla). Veremos como dar la solución general de algunas EDPs de **primer orden** en dos variables (y aparecerá una función arbitraria de las **características**, soluciones de una EDO ligada a la EDP) y de pocas de **segundo** (con dos funciones arbitrarias). Precisaremos qué condiciones adicionales (iniciales o de contorno) se imponen a las EDPs para que tengan **solución única**. De las clásicas, sólo para la de **ondas** se podrá dar su solución general y tendremos una fórmula (de **D'Alembert**) para la solución con datos iniciales. Conseguiremos también con la **transformada de Fourier** resolver algunas EDPs en recintos no acotados (como la del calor en la recta infinita).

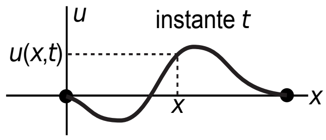
El **capítulo 2** describe cómo resolver EDOs lineales de segundo orden mediante **series de potencias** (único método posible en la mayoría de las ocasiones), en torno a los llamados puntos **regulares** y a los **singulares regulares**, incluido el llamado punto del infinito. Se aplica el método a tres ecuaciones particulares (Legendre, Hermite y Bessel) que aparecen al resolver EDPs de la física.

El **capítulo 4** se estudiará el método de **separación de variables** para resolver las ecuaciones clásicas (homogéneas y no homogéneas, en diferentes coordenadas y en 2 o más variables) en recintos sencillos (y acotados, al menos, en una de las variables). Se supone que la solución es producto de funciones de cada variable y esto lleva a resolver EDOs para cada una, alguna de ellas con condiciones de contorno. Las soluciones quedan expresadas en términos de **series de Fourier**. La teoría (muy diferente de la de los de valores iniciales) de **problemas de contorno para EDOs** (homogéneos y no homogéneos) y un estudio de dichas series se dará previamente en el **capítulo 3**. Y al final del 4 hablaremos brevemente de las **funciones de Green** para problemas de contorno de EDOs y para **Laplace**.

Los apuntes acaban con un **apéndice** en el que se repasan algunos conocimientos matemáticos previos (de EDOs, de cálculo en varias variables y de convergencia uniforme) que se utilizan en los capítulos anteriores.

Para acabar esta introducción, describamos el significado físico de las tres ecuaciones clásicas. Las interpretamos únicamente en sus versiones más sencillas (que son las más tratadas en los apuntes): cuando la u es función de dos variables.

La ecuación de **ondas** unidimensional o ecuación de la **cuerda vibrante** describe las oscilaciones de una cuerda totalmente elástica, tensa y fija en sus extremos. Se supone que sus oscilaciones son siempre transversales y de pequeña amplitud. Entonces se comprueba que si $u(x,t)$ representa el desplazamiento vertical del punto de abscisa x en el instante t, esa función $u(x,t)$ satisface la EDP:



$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t) \ ,$$

donde $c^2 = T_o/\rho$, T_o fuerza de tensión en los extremos, ρ masa por unidad de longitud (densidad lineal) y $F(x,t)$ fuerza externa por unidad de masa que actúa en dirección vertical sobre el punto x en el instante t. Para determinar la evolución de una cuerda concreta, se deberá fijar la posición de la cuerda y la distribución de velocidades verticales en el instante inicial, es decir, $u(x,0)$ y $u_t(x,0)$. También se deberá de tener en cuenta que permanece fija en los extremos $x=0$ y $x=L$, o sea, que debe cumplir las condiciones de contorno $u(0,t)=u(L,t)=0$. No olvidemos que el modelo matemático de esta cuerda ideal es una simplificación de la realidad; lo mismo ocurre con las siguientes.

La distribución de temperaturas a lo largo del tiempo en una varilla delgada (que podemos suponer unidimensional) viene regida por la **ecuación del calor**:

$$u_t - k u_{xx} = 0 \ ,$$

donde $u(x,t)$ representa la temperatura del punto x en el instante t y $k>0$ es una constante proporcional a la conductibilidad e inversamente proporcional a la densidad y al calor específico. Si existiesen fuentes de calor en el interior de la varilla deberíamos escribir una $F(x,t)$ en el segundo miembro de la ecuación. A diferencia de la de ondas, aquí bastará dar sólo la distribución inicial de temperaturas $u(x,0)$ (junto con las condiciones de contorno, que pueden ser de diferentes tipos) para determinar la solución.

Entre otras situaciones físicas, puede decribir la **ecuación de Laplace**:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

la distribución estacionaria de temperaturas en una placa bidimensional. La existencia de fuentes de calor en el interior de la superficie aportaría una F en el segundo miembro (ecuación de Poisson). Frente a las dos ecuaciones anteriores que describían la evolución de un sistema a lo largo del tiempo, ésta describe situaciones estacionarias y los problemas que se plantean para ella son siempre con condiciones de contorno.