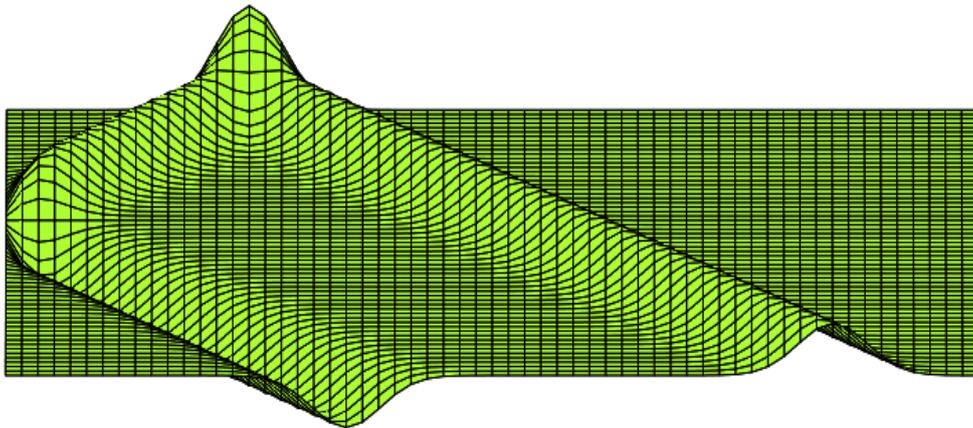


2017

apuntes de métodos matemáticos II (EDPs)



Pepe Aranda

**Métodos Matemáticos
Físicas Complutense**

pparanda@fis.ucm.es

<http://jacobi.fis.ucm.es/pparanda/EDPs.html>

Índice

Bibliografía

Sobre las versiones de los apuntes

Introducción	1
1. Introducción a las EDPs	3
1.1 EDPs lineales de primer orden	5
1.2 EDPs lineales de segundo orden; clasificación	9
1.3 Unicidad; los problemas clásicos	11
1.4 Ecuación de la cuerda vibrante	15
1.5 Transformadas de Fourier	21
2. Soluciones de EDOs en forma de serie	25
2.1 Funciones analíticas y puntos regulares	26
2.2 Ecuación de Euler y puntos singulares regulares	30
2.3 Ecuaciones de Legendre, Hermite y Bessel	35
2.4 El punto del infinito	37
3. Problemas de contorno para EDOs	39
3.1 Problemas de Sturm-Liouville homogéneos	40
3.2 Series de Fourier	45
3.3 Problemas no homogéneos	50
4. Separación de variables	53
4.1 Separación de variables para el calor	54
4.2 Separación de variables para ondas	61
4.3 Separación de variables para Laplace	65
4.4 Algunos problemas en tres variables	73
4.5 Funciones de Green	80
Apéndice	83
Problemas 1	i
Problemas 2	iii
Problemas 3	iv
Problemas 4	v
Problemas adicionales 1	I
Problemas adicionales 2	IV
Problemas adicionales 3	VI
Problemas adicionales 4	VII

[Estos apuntes pueden ser utilizados y citados por cualquiera sin ningún problema, siempre que no haga negocio con ellos].

Bibliografía

- H Haberman. ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES con Series de Fourier y Problemas de Contorno. Prentice Hall
- Ss Strauss. PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS. An Introduction. Wiley
- W Weimberger. ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES. Reverté
- Sp Stephenson. INTRODUCCION A LAS ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES. Reverté
- MU Myint-U. PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS. Elsevier
- T Tijonov-Samarski. ECUACIONES DE LA FISICA MATEMATICA. Mir
- Ch Churchill. SERIES DE FOURIER Y PROBLEMAS DE CONTORNO. McGraw-Hill
- BD Boyce-Di Prima. ECUACIONES DIFERENCIALES y problemas con valores en la frontera. Limusa
- Si Simmons. ECUACIONES DIFERENCIALES (con aplicaciones y notas históricas). McGraw-Hill
- Br Braun. ECUACIONES DIFERENCIALES Y SUS APLICACIONES. Interamericana
- R Ross. ECUACIONES DIFERENCIALES. Reverté
- E Elsgoltz. ECUACIONES DIFERENCIALES Y CALCULO VARIACIONAL. Mir
- MCZ Marcellán-Casasús-Zarzo. ECUACIONES DIFERENCIALES. PROBLEMAS LINEALES Y APLICACIONES. McGraw-Hill
- PA Puig Adam. CURSO TEORICO-PRACTICO DE ECUACIONES DIFERENCIALES APLICADO A LA FISICA Y TECNICA.

Los 7 primeros libros son propiamente de EDPs: H, Ss, W, MU y T incluyen casi todos los temas de los apuntes (y muchos otros que no se tratan en ellos). Sp y Ch tienen bastantes menos páginas (y sirven para parte del curso). Los 5 siguientes son básicamente de EDOs, con lo que casi todos tratan los temas 2 y 3 relativos a ecuaciones ordinarias, aunque tienen también introducciones a las EDPs. En concreto, BD, Si, Br y R estudian los problemas de contorno para EDOs y algo del método de separación de variables. R clasifica además las EDPs de segundo orden con coeficientes constantes. E trata con detalle las EDPs de primer orden (lineales y no lineales). Los 2 últimos, el MCZ y el clásico PA (de 1950), son mixtos de EDOs y EDPs y abarcan una mayor parte del curso.

Bastantes libros de EDPs, en vez de estar organizados (como estos apuntes) en torno a los métodos de resolución, estudian por separado y con diferentes técnicas las ecuaciones hiperbólicas, elípticas y parabólicas.

Las EDPs de primer orden de 1.1 se tratan en H, E y PA, pero se centran en las cuasilineales (o incluso no lineales) más generales y complicadas. La reducción a forma canónica (con coeficientes no constantes como en mis apuntes de EDII) y las cuestiones de unicidad se ven en casi todos los libros de EDPs, como en MU, W o T. La deducción de las ecuaciones y el significado físico de los problemas se puede mirar, por ejemplo, en Bd, H, W, Ss o T. Para la cuerda vibrante de 1.4 se pueden consultar el H, SS o W. Para la sección 1.5 de la \mathcal{F} ver Ch, Ss, Sp, MU y, sobre todo, H y W que utilizan también la transformada de Laplace para EDPs (W tiene una introducción a la variable compleja).

El método de series para las EDOs del tema 2 está bien contado en el BD y el Si, tanto para puntos regulares como para singulares regulares.

Para el 3 es recomendable leer BD, Si y H. Hay más demostraciones que en los apuntes (y con matemáticas no muy complicadas) en Ss, W o Ch.

La separación de variables del tema 4 está en casi todos los libros. Buenas introducciones hay en Sp, BD, Si, Br o R. El libro más recomendable para todo este capítulo es el H. Para precisiones de convergencia y problemas de varias variables, más variados que los escasos resueltos en estos apuntes, ver Ss, W, MU o T. La introducción a las funciones de Green para Laplace de 4.5, sigue más o menos el MU. Ss, W, T y Sp también estudian las funciones de Green por otros caminos.

El MCZ, el H y el Ss dan métodos numéricos para problemas de contorno y EDPs (lo que no hacen los demás libros, salvo unas pocas ideas del W).

Sobre las versiones de los apuntes

Versión 2017. Se añaden ejemplos en 1.1, 1.4, 3.2 y 3.3. Cada uno de esos capítulos crece en dos páginas. Alguna novedad en ejemplos de 4.1 y en la descripción de las ideas generales sobre separación de variables. Se incluyen nuevos problemas provenientes de curso 13-14.

Versión 2014. Bastantes retoques. En 1.1, Δ pasa a llamarse T . Se reordena 1.2 y 1.3. Nuevo ejemplo en 1.4. Detalles en 2.1 y cambio de ejemplo en 2.2. Retoques al final de 3.1 y (más) de 3.2. Dos ejemplos nuevos en 4.1. Las reflexiones sobre separación de variables pasan al final de 4.3. Como cada año, bastantes cambios en los problemas, incluyendo exámenes del anterior.

Versión 2013. El mayor cambio es el traslado de la transformada de Fourier al final del capítulo 1, que tiene nuevo nombre (y de las funciones de Green al final del 4). Hay bastantes pequeños retoques en teoría y ejemplos de separación de variables. Hay cambios menores en el resto de los apuntes y, como cada curso, se retocan los problemas, incluyendo los del curso pasado y pasando otros a adicionales.

Versión 2012. Primeros **apuntes de métodos matemáticos II**, para la asignatura del grado. Incluyen un nuevo tema 3 de soluciones por series (que abandona la asignatura de EDOs para hacer hueco a la variable compleja). Para hacer sitio a este tema se recortan otros varios de las 'Ecuaciones II'.

Se limaron sutilezas sobre tangencias en 1.1. En 1.2 se tratan sólo EDPs con coeficientes constantes. La cuerda vibrante vuelve simplificada (tras 12 años) al tema 1. Poco queda de ondas en más dimensiones.

El tema 2 recoge el tema 3 de mis apuntes de EDOs, con notable reducción de ejemplos y problemas.

Del anterior tema 2 (ahora 3) salen las funciones de Green (que se juntan con las de Laplace en 5.2).

En el 4 de separación de variables pasó a tener sección propia la ecuación de ondas (con ejemplos nuevos, algunos de comparación con D'Alembert). El resto sigue casi igual.

De la transformada de Fourier desaparecen las transformadas seno y coseno.

El apéndice tuvo que modificar. Y la mayor reducción, como en el anterior cambio de plan, se hizo en los problemas (ya simplificados para el grupo residual del curso anterior).

Para separar los ejemplos se incluyeron (como en los apuntes de Matemáticas) **recuadros de color**.

Versión 2011. Adaptación al 'grupo residual' de licenciatura (2010/11, último año con clases). Pasaron a 'letra pequeña' temas que en otros grupos no se contaban (como las ondas en 3 y 2 dimensiones), bastantes problemas pasaron a adicionales y se incluyeron otros y nuevos ejemplos del piloto del 08/09.

Versión 2009. Bastantes novedades, empezando por la letra, que pasó a ser Bitstream-Vera (sin serif), lo que obligó a reescribir (y de paso a retocar) muchas partes del texto.

1.1 y 1.3 se modificaron levemente y 1.2 se volvió a reordenar.

2 perdió una sección. Los ejemplos de la vieja 2.1 se incluyeron, además de otros nuevos, en la nueva 2.1. También aparecieron más ejemplos en series de Fourier y en problemas no homogéneos.

3.1 incluyó ejemplos nuevos del calor y 3.2 dos ejemplos más en cartesianas y uno en polares. 3.3 cambió poco y como 3.4 (antes 4.4) apareció la introducción a las funciones de Green para Laplace.

En todo el 4 aparecieron ejemplos nuevos (y otros se detallaron). En 4.1, uno de cuerda semi-infinita y otro de cuerda acotada, dos de ondas en 3 dimensiones en 4.2, y tres de la \mathcal{F} de 4.3.

Se creó un apéndice con repaso de EDOs, de convergencia uniforme y cálculo en varias variables.

Los problemas cambiaron bastante (los grupos piloto exigen inventar muchos problemas y eso se notó).

Versión 2008. Pocas novedades en teoría. Además de correcciones de ejemplos, erratas, estéticas... se reordenó 1.2 y se añadieron ejemplos en 3.1. Los problemas incluyeron los de examen del curso anterior, algunos pasaron a adicionales y otros se convirtieron en problemas a entregar en el piloto.

Versión 2007. Primera de los **apuntes de Ecuaciones Diferenciales II (EDPs)** y heredera de los **apuntes de ecuaciones en derivadas parciales** para los 'Métodos Matemáticos II', impartidos por última vez en el 1997-98. La asignatura era de 3º, los estudiantes habían cursado 'Métodos I' en 2º (variable compleja y espacios de Hilbert) y había 5 horas semanales de clase. Las 'Ecuaciones II', en cambio, se cursaban en 2º, con 4 horas semanales y sólo se había visto Álgebra y Cálculo en 1º, y las EDOs del primer cuatrimestre de 2º. Por tanto, hubo que reducir contenidos. Aunque los temas se mantuvieron (reordenados), algunos pasaron a estar 'en letra pequeña' (a título informativo). Más funcionó la tijera apartando de las hojas de problemas fundamentales los más complicados del pasado.

Yendo al detalle, el tema 1 era el antiguo 5, con algún ejemplo más, algún recorte en unicidad y se deduce ya la fórmula de D'Alembert (el viejo capítulo 6 se trasladó, reduciendo su tamaño, al tema 4).

El 2 de esa versión era el viejo 7 de problemas de contorno, centrándose en las condiciones separadas, eliminando ideas sobre comparación de autovalores y poniendo la δ de Dirac en letra pequeña.

El 3 de separación de variables era el 8 anterior, bastante reordenado. En vez de separar problemas homogéneos y no homogéneos, se tratan ambos sucesivamente, primero para calor y ondas, y en otra sección para Laplace. Aparecen, como novedad, algunas líneas dedicadas a los armónicos esféricos.

El 4 incluyó las ondas en 1, 3 y 2 dimensiones espaciales (con menos intensidad que en Métodos II, sobre todo en problemas), la transformada de Fourier, y, a título informativo, el método de las imágenes.

Los problemas se dividieron en 'problemas' (los que se hacen en clase) y 'problemas adicionales'. Unos cuantos de los viejos problemas (y varios apartados de otros) desaparecieron del todo.

Los apuntes se hicieron en \LaTeX , utilizando el programa TeXShop para Mac y eligiendo ese año 2007, para distinguirse de las letras habituales, el tipo 'palatino'.

Introducción

Estos apuntes estudian principalmente las **ecuaciones en derivadas parciales** (EDPs), aunque también tratan las soluciones por medio de series y los problemas de contorno de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs). Una EDP es una ecuación en la que aparecen derivadas parciales de una función incógnita de varias variables. Todas las EDPs que veremos serán **lineales**. Más en concreto, salvo un breve estudio de las lineales de primer orden, trataremos de EDPs **lineales de segundo orden** (con derivadas de orden 2 o menor), del tipo:

$$[E] \quad L[u] \equiv \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n B_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + Cu = F$$

con u , A_{ij} , B_j , C y F funciones de (x_1, \dots, x_n) . Sobre todo veremos el caso $n=2$. Una **solución** de [E] será una función $u(x_1, \dots, x_n)$ de clase C^2 en una región D de \mathbf{R}^n que sustituida en la ecuación la convierte en una identidad.

Entre las EDPs lineales de segundo orden se encuentran muchas ecuaciones de la física. Entre ellas las tres clásicas:

ecuación de ondas	$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$
ecuación del calor	$u_t - k \Delta u = 0$
y ecuación de Laplace	$\Delta u = 0$

que son ejemplos, respectivamente, de los tres grandes tipos en que se clasifican: **hiperbólicas**, **parabólicas** y **elípticas**. La teoría avanzada de EDPs viene a ser la generalización del estudio de estas tres ecuaciones. Sus propiedades son tan diferentes que no existen teorías generales como la de las EDOs lineales.

En el **capítulo 1** se verá que pocas veces se puede hallar la solución de una EDP mediante integración (por eso, en el capítulo 4 utilizaremos series para resolverla). Veremos como dar la solución general de algunas EDPs de **primer orden** en dos variables (y aparecerá una función arbitraria de las **características**, soluciones de una EDO ligada a la EDP) y de pocas de **segundo** (con dos funciones arbitrarias). Precisaremos qué condiciones adicionales (iniciales o de contorno) se imponen a las EDPs para conseguir **solución única**. De las clásicas, sólo para la de **ondas** se podrá dar su solución general y una fórmula (de **D'Alembert**) para la solución con datos iniciales. Utilizaremos también la **transformada de Fourier** para resolver algunas EDPs en recintos no acotados (como la del calor en la recta infinita).

El **capítulo 2** describe cómo resolver EDOs lineales de segundo orden mediante **series de potencias** (único método posible en la mayoría de las ocasiones), en torno a los llamados puntos **regulares** y a los **singulares regulares**, incluido el llamado punto del infinito. Se aplica el método a tres ecuaciones particulares (Legendre, Hermite y Bessel) que aparecen al resolver EDPs de la física.

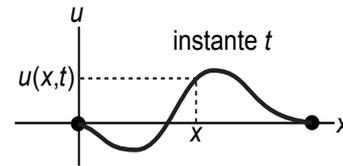
El **capítulo 4** describe el método de **separación de variables** para resolver las ecuaciones clásicas (homogéneas y no homogéneas, en diferentes coordenadas y en 2 o más variables) en recintos sencillos (y acotados, al menos, en una de las variables). Se supone la solución como producto de funciones de cada variable y esto lleva a resolver EDOs para cada una, alguna con condiciones de contorno. Las soluciones quedan expresadas en términos de **series de Fourier**. La teoría (muy diferente de la de los de valores iniciales) de **problemas de contorno para EDOs** (homogéneas y no homogéneas) y un estudio de dichas series se dará previamente en el **capítulo 3**. Y al final del 4 hablaremos brevemente de las **funciones de Green** para problemas de contorno de EDOs y para **Laplace**.

Los apuntes acaban con un **apéndice** en el que se repasan algunos conocimientos matemáticos previos (de EDOs, de cálculo en varias variables y de convergencia uniforme) que se utilizan en los capítulos anteriores.

Para acabar esta introducción, describamos el significado físico de las ecuaciones clásicas. Las interpretamos únicamente en sus versiones más sencillas (que son las más tratadas en los apuntes): cuando la u es función de dos variables.

Empecemos con la ecuación de ondas unidimensional o ecuación de la **cuerda vibrante**. Consideremos las oscilaciones de una cuerda totalmente elástica, tensa y fija en sus extremos. Se supone que sus oscilaciones son siempre transversales y de pequeña amplitud. En esas condiciones se puede ver que si $u(x, t)$ representa el desplazamiento vertical del punto de abscisa x en el instante t , la función $u(x, t)$ satisface la EDP:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t)$$



donde $c^2 = T_0/\rho$, con T_0 fuerza de tensión en los extremos, ρ masa por unidad de longitud (densidad lineal) y $F(x, t)$ fuerza externa por unidad de masa que actúa en dirección vertical sobre el punto x en el instante t . Para determinar la evolución de una cuerda concreta, se verá que debemos fijar la posición de la cuerda y la distribución de velocidades verticales en el instante inicial, es decir, $u(x, 0)$ y $u_t(x, 0)$. También se deberá de tener en cuenta que permanece fija en los extremos $x = 0$ y $x = L$, o sea, que $u(0, t) = u(L, t) = 0$. No olvidemos que el modelo matemático de esta cuerda ideal es sólo una simplificación de la realidad; lo mismo ocurre con las siguientes.

La distribución de temperaturas a lo largo del tiempo en una varilla delgada (que podemos suponer unidimensional) viene regida por la **ecuación del calor**:

$$u_t - k u_{xx} = 0$$

donde $u(x, t)$ representa la temperatura del punto x en el instante t y $k > 0$ es una constante proporcional a la conductibilidad e inversamente proporcional a la densidad y al calor específico. Si existiesen fuentes de calor en el interior de la varilla deberíamos escribir una $F(x, t)$ en el segundo miembro de la ecuación. A diferencia de la de ondas, aquí bastará dar sólo la distribución inicial de temperaturas $u(x, 0)$ (junto con las condiciones de contorno, que pueden ser de diferentes tipos) para determinar la solución.

La **ecuación de Laplace**:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

puede describir, entre otras situaciones físicas, la distribución estacionaria de temperaturas en una placa bidimensional. La existencia de fuentes de calor en el interior de la superficie aportaría una F en el segundo miembro (ecuación de Poisson). Frente a las dos ecuaciones anteriores que describían la evolución de un sistema a lo largo del tiempo, ésta describe situaciones estacionarias y los problemas que se plantean para ella son siempre con condiciones de contorno.

1. Introducción a las EDPs

Para las EDOs se suelen plantear problemas de valores iniciales, casi siempre de solución única. Para resolverlos (cuando se puede) se suele hallar primero la solución general e imponer después uno o varios (dependiendo del orden) datos iniciales.

En este capítulo describiremos los problemas análogos para las EDPs y veremos los métodos que permiten hallar sus soluciones a través de integraciones. La variedad y complicación será mucho mayor que en las ordinarias. Por ejemplo, casi nunca se podrá hallar la solución general de una EDP.

Comenzamos en la sección 1.1 tratando las EDPs **lineales de primer orden en dos variables**, es decir, ecuaciones del tipo:

$$[1] \quad A(x, y) u_y + B(x, y) u_x = H(x, y) u + F(x, y),$$

con pocas aplicaciones físicas, pero que plantean de forma sencilla los problemas de las de segundo orden. Serán resolubles si es posible hallar las soluciones de una EDO de primer orden, llamadas curvas **características** de [1]. En la solución general de [1] aparece una función p arbitraria (como en el ejemplo $u_x = 0$, de solución $u(x, y) = p(y)$, para cualquier p). Para precisar esta p fijaremos el valor de la solución a lo largo de una curva G del plano xy (**problema de Cauchy**). Un caso particular será el **problema de valores iniciales**, si fijamos $u(x, 0) = f(x)$. La solución quedará determinada si G no es tangente a las características.

En 1.2 abordamos las EDPs **lineales de segundo orden en dos variables**:

$$[2] \quad L[u] \equiv Au_{yy} + Bu_{xy} + Cu_{xx} + Du_y + Eu_x + Hu = F(x, y)$$

Aunque no es mucho más complicada la teoría para coeficientes variables, nos limitaremos a considerar que A, \dots, H son constantes. Para intentar resolver [2], se escribirá, mediante **cambios de variables**, en la forma más sencilla posible (**forma canónica**) en las nuevas variables ξ, η , lo que llevará a su clasificación en ecuaciones **hiperbólicas, parabólicas y elípticas**.

En pocos casos, a partir de la forma canónica, se podrá hallar la solución general, que dependerá de dos funciones p y q arbitrarias, que se pueden fijar con datos de Cauchy o iniciales análogos a los de [1]. La única de las clásicas resolubles por este camino es la **ecuación de ondas** $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, para la que serán:

$$u_{\xi\eta} = 0 \quad [\text{forma canónica}]$$
$$u(x, t) = p(x+ct) + q(x-ct) \quad [\text{solución general}]$$

Partiendo de esta solución general se deducirá la **fórmula de D'Alembert** que expresa su solución en términos de la posición y velocidad iniciales:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x) \end{cases} \rightarrow u = \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds$$

Los datos iniciales puros sólo se plantean para las ondas, pues carecen de sentido físico y plantean problemas matemáticos en las otras dos ecuaciones clásicas. Las condiciones iniciales y de contorno ligadas a un problema real son diferentes para cada ecuación. No hay una teoría general de EDPs que abarque todas las posibilidades. En cada caso hay que comprobar que el problema está **'bien planteado'**, es decir, que tiene **solución única que depende continuamente de los datos** (lo que era trivial en las EDOs). La sección 1.3 se dedica a describir los diferentes problemas asociados a las ecuaciones clásicas, a interpretar físicamente el significado de las diferentes condiciones adicionales y a precisar su unicidad. Todos ellos tendrán solución única, excepto el llamado 'problema de Neumann' para Laplace.

En la sección 1.4 nos dedicaremos a sacarle jugo a la citada fórmula de D'Alembert que da la solución del problema puro de valores iniciales para la cuerda infinita. Veremos que la solución $u(x, t)$ resulta ser la suma de dos ondas que se mueven en sentido opuesto a velocidad c . Daremos también una fórmula para las soluciones de la **ecuación no homogénea** [con fuerzas externas $F(x, t)$]. Comprobaremos como, **extendiendo de forma adecuada los datos iniciales** a todo \mathbf{R} , podemos abordar problemas con **condiciones de contorno**. Primero para la cuerda **semi-infinita** (a la que se pueden reducir las ondas en el espacio con simetría radial) y luego para la **acotada**. Al estar manejando funciones con expresiones distintas en diferentes intervalos, escribir la solución explícitamente lleva, en general, a largas discusiones. Por eso nos conformaremos muchas veces con hallar su expresión para valores de t o x fijos o con los dibujos de la solución.

En 1.5 definiremos la **transformada de Fourier** \mathcal{F} de una función f :

$$\mathcal{F}[f](k) = \hat{f}(k) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx$$

y veremos algunas de sus propiedades que permiten resolver algunas EDPs en **intervalos no acotados** (en ellos no se podrá utilizar la separación de variables del capítulo 4 por no aparecer problemas de Sturm-Liouville).

Las transformadas de Fourier de derivadas harán desaparecer las derivadas:

$$\mathcal{F}[f'] = -ik\mathcal{F}[f], \quad \mathcal{F}[f''] = -k^2\mathcal{F}[f].$$

Por eso, aplicando \mathcal{F} a un problema de EDPs en dos variables obtendremos otro para una EDO. Resuelto este segundo problema, para hallar la solución habrá que encontrar una transformada inversa. En particular (además de otros problemas que sabíamos resolver por otros caminos), la \mathcal{F} nos permitirá dar la solución del problema para la **ecuación del calor en varillas no acotadas** (no resoluble con las técnicas de 1.2):

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in \mathbf{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & u \text{ acotada} \end{cases} \rightarrow u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-(x-s)^2/4t} ds$$

De ella se deducirá que, según nuestra ecuación matemática, el calor (a diferencia de las ondas) se transmite a velocidad infinita y que las discontinuidades desaparecen aquí instantáneamente. También se verán problemas en que aparece la '**delta de Dirac**' $\delta(x-a)$, que será introducida informalmente.

1.1. EDPs lineales de primer orden

Sea [E] $A(x, y) u_y + B(x, y) u_x = H(x, y) u + F(x, y)$, $u = u(x, y)$.

Para resolverla usaremos la EDO de primer orden [e] $\frac{dy}{dx} = \frac{A(x, y)}{B(x, y)}$ **ecuación característica**

Suponemos que A y B son de C^1 (con parciales continuas) y que no se anulan a la vez en una región del plano. Entonces [e] tendrá en ella unas curvas integrales:

$$\xi(x, y) = K \quad \text{curvas características de [E]}$$

(que se podrán hallar explícitamente si [e] es separable, lineal, exacta...).

Haciendo el cambio de variable $\begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = y \end{cases}$ (o bien $\eta = x$), [E] se convierte en:

$$\begin{cases} u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \\ u_x = u_\xi \xi_x \end{cases} \rightarrow Au_\eta + [A\xi_y + B\xi_x]u_\xi = Hu + F$$

Y como sobre las soluciones $y(x)$ definidas por $\xi(x, y) = K$ se tiene:

$$\xi(x, y(x)) = K \rightarrow \xi_x + \xi_y \frac{dy}{dx} = \frac{1}{B}[A\xi_y + B\xi_x] = 0,$$

[E] pasa a ser una ecuación en las variables (ξ, η) en la que no aparece u_ξ :

$$[E^*] \quad A(\xi, \eta) u_\eta = H(\xi, \eta) u + F(\xi, \eta), \quad u = u(\xi, \eta).$$

Si hubiésemos escogido $\eta = x$ habríamos llegado a $[E_*] \quad Bu_\eta = Hu + F$.

(Como vemos, tras el cambio **queda el término con la variable elegida**).

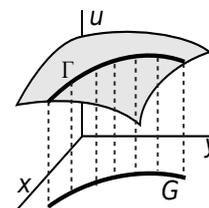
[E*] (o [E_*]) es una **EDO lineal de primer orden** en la variable η si consideramos la ξ constante (y, por tanto, es resoluble). En su solución aparecerá una constante arbitraria para cada ξ , es decir, una función arbitraria de ξ :

$$[\bullet] \quad u(\xi, \eta) = p(\xi) e^{\int \frac{H}{A} d\eta} + e^{\int \frac{H}{A} d\eta} \int \frac{F}{A} e^{-\int \frac{H}{A} d\eta} d\eta, \quad \text{con } p \text{ arbitraria de } C^1.$$

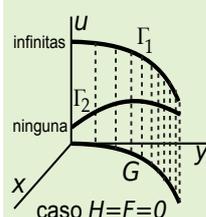
Deshaciendo el cambio queda resuelta [E] en función de x e y . En la solución, como se observa, **aparece una función arbitraria de las características**.

¿Cómo determinar una **única solución** de [E]?, es decir, ¿cómo precisar p ? Cada solución describe una superficie en el espacio. Generalizando el problema de valores iniciales para EDOs definimos:

El **problema de Cauchy** para [E] consiste en hallar la solución $u(x, y)$ que tome unos valores dados sobre una curva G del plano xy , o lo que es lo mismo, que contenga una curva dada Γ del espacio.



En particular, si G es una recta x ó $y = cte$ [por ejemplo, si se pide $u(x, 0) = f(x)$], se tiene lo que se llama un **problema de valores iniciales**.



Pero un **problema de Cauchy puede no tener solución única**. Por ejemplo, la **solución general de** $Au_y + Bu_x = 0$ es $u(x, y) = p(\xi(x, y))$ y cada solución toma valor constante sobre cada $\xi(x, y) = K$. Si la curva G donde imponemos los datos es una de esas características se debe exigir que Γ esté en un plano horizontal $z = C$. Entonces hay infinitas soluciones [una para cada función $p \in C^1$ con $p(K) = C$]. Pero si Γ no tiene z constante, no hay solución que contenga a Γ .

Ej 1. $y^2 u_y + u_x = 2xu$ $\frac{dy}{dx} = y^2$, $\frac{1}{y} = K - x \rightarrow x + \frac{1}{y} = K$
 características

$\begin{cases} \xi = x + \frac{1}{y} \\ \eta = x \end{cases}$ [mejor] $\rightarrow u_\eta = 2xu = 2\eta u \rightarrow u = p(\xi) e^{\eta^2} = p(x + \frac{1}{y}) e^{x^2}$, $p \in C^1$.
 ↑ lineal homogénea

$\begin{cases} \xi = x + \frac{1}{y} \\ \eta = y \end{cases}$ [peor] $\rightarrow y^2 u_\eta = 2xu \xrightarrow{x = \xi - \frac{1}{\eta}} u_\eta = (\frac{2\xi}{\eta^2} - \frac{2}{\eta^3})u \rightarrow u = p^*(\xi) e^{\frac{1}{\eta^2} - \frac{2\xi}{\eta}} = p^*(x + \frac{1}{y}) e^{-\frac{1}{y^2} - \frac{2x}{y}}$.

[Aunque no lo parezca, las expresiones con p y p^* definen la misma solución general, pues $e^{-\frac{1}{y^2} - \frac{2x}{y}} = e^{-(x + \frac{1}{y})^2} e^{x^2}$, y $p^*(x + \frac{1}{y}) e^{-(x + \frac{1}{y})^2}$ es otra función arbitraria de $x + \frac{1}{y}$].

Impongamos ahora diferentes datos de Cauchy a la ecuación y veamos lo que resulta:

$u(x, 1) = 1 \rightarrow p(x+1) e^{x^2} = 1$. Para precisar la p hacemos $x+1 = v \rightarrow x = v-1$.
 Por tanto: $p(v) = e^{-(v-1)^2} \rightarrow u = e^{x^2 - (x + \frac{1}{y} - 1)^2} = e^{2x - \frac{2x}{y} + \frac{2}{y} - \frac{1}{y^2} - 1}$.
 O bien, $p^*(x+1) e^{-1-2x} = 1 \xrightarrow{x+1=v} p^*(v) = e^{2v-1}$

Estos cálculos han determinado la única solución del problema de valores iniciales.

$u(0, y) = y \rightarrow p(\frac{1}{y}) = y \xrightarrow{1/y=v} p(v) = \frac{1}{v} \rightarrow u = \frac{y}{1+xy} e^{x^2}$, que también parece ser única.

$u(x, -\frac{1}{x}) = 0$ y $u(x, -\frac{1}{x}) = 1$ darán problemas por estar dados sobre característica.

Para el primero: $p(0) e^{x^2} = 0$. Lo cumple toda $p \in C^1$ con $p(0) = 0$. Infinitas soluciones.
 Para el segundo: $p(0) e^{x^2} = 1$, $p(0) = e^{-x^2}$. Imposible. No tiene solución.

Datos sobre características dan siempre 0 o ∞ soluciones
 [pues se acaba en $p(\text{cte}) = \text{algo}$, que puede ser constante o no].

Tratemos el problema de la unicidad en general. Supongamos que buscamos la solución con

$$u(g(s), h(s)) = f(s), \quad g \text{ y } h \text{ derivables [la curva } G = (g, h) \text{ es suave].}$$

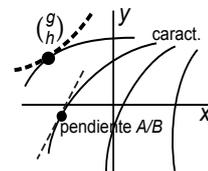
Sustituyendo en [•] y despejando p : $p(\xi(g(s), h(s))) = R(s)$, con R conocida. Como arriba, llamemos $v = \xi(g(s), h(s))$. Si podemos despejar s en función de v de forma única $s = s(v)$, la $p(v) = R(s(v))$ queda fijada y, por tanto, hay una única solución de [E] con esos datos. Sabemos que esta función inversa existe seguro en un entorno de cada s_0 para el que sea:

$$\left. \frac{dv}{ds} \right|_{s=s_0} = \left. \frac{d}{ds} [\xi(g(s), h(s))] \right|_{s=s_0} = \nabla \xi(g(s_0), h(s_0)) \cdot (g'(s_0), h'(s_0)) \neq 0.$$

Como $\nabla \xi$ es perpendicular a las características y (g', h') es tangente a G , deducimos:

Si G no es tangente en ningún punto a las características hay solución única del problema de Cauchy en un entorno de G .

La tangencia se puede ver sin resolver la EDO [e], a partir de su campo de direcciones: el vector (B, A) es tangente a sus soluciones y $(A, -B)$ es perpendicular. Por tanto:



G es tangente a alguna característica en un punto $(g(s_0), h(s_0))$ si y sólo si

$$T(s_0) \equiv g'A(g, h) - h'B(g, h) \Big|_{s=s_0} = 0.$$

Si $T(s) \neq 0 \forall s$ el problema de Cauchy tiene solución única.

[Si $T(s) \equiv 0 \forall s$, G es tangente en cada punto, es decir, es una característica].

Estudiemos de nuevo la unicidad del ejemplo 1, ahora que tenemos teoría general:

El primer dato $y=1$, como muestra el dibujo, no era tangente a las características.

Exactamente lo mismo lo asegura $T(x) = 1 \cdot 1^2 - 0 \cdot 1 = 1 \neq 0$.

En el segundo, a $x=0$ le ocurre lo mismo, y es $T(y) = 0 \cdot y^2 - 1 \cdot 1 = -1 \neq 0$.

Para los otros: $T(x) = 1 \cdot (-\frac{1}{x})^2 - \frac{1}{x^2} \cdot 1 \equiv 0$, lo que confirma que G es característica.

Veamos más ejemplos. En los dos primeros no hay problemas de unicidad, y además la ecuación [E*] o [E*] que aparece se limita a un simple integración.

Ej 2.
$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{c} \rightarrow x - ct = K \text{ características} \rightarrow u = p(x - ct) \text{ solución general.}$$

$u(x, 0) = p(x) = f(x) \rightarrow u(x, t) = f(x - ct)$, solución única del problema de valores iniciales.

Para dibujar la gráfica de u en función de x para cada $t = T$ fijo basta trasladar la de $f(x)$ una distancia cT (hacia la derecha si $c > 0$). Se puede interpretar la solución como una onda que viaja a lo largo del tiempo.

[Situación similar se dará en la ecuación de ondas].

Ej 3.
$$\begin{cases} (y-2x)u_y + u_x = y \\ u(0, y) = y-2 \end{cases} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y-2x}{1}, y = Ce^x + 2x + 2 \rightarrow (y-2x-2)e^{-x} = C$$

$$\begin{cases} \xi = (y-2x-2)e^{-x} \\ \eta = x \text{ (parece mejor)} \end{cases} \rightarrow u_\eta = y = \xi e^\eta + 2\eta + 2 \rightarrow u = p(\xi) + \xi e^\eta + \eta^2 + 2\eta,$$

$$u = p[(y-2x-2)e^{-x}] + y + x^2 - 2.$$

[Escogiendo $\eta = y$ no se podría despejar la x de $\xi = (\eta - 2x - 2)e^{-x}$].

$p(y-2) + y - 2 = y - 2, p(y-2) = 0 \rightarrow p(v) = 0 \forall v, u = y + x^2 - 2.$

Solución única porque $x=0$ nunca es tangente a las características, o, lo que es lo mismo, porque $T(y) = 0 \cdot y - 1 \cdot 1 = -1 \neq 0 \forall y$.

En los siguientes sí tenemos que resolver lineales en η y además imponemos unos datos con solución única y otros sin ella:

Ej 4.
$$\begin{cases} 3yu_y + xu_x = 3u - 3 \\ u(-1, y) = y \end{cases} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3y}{x} \text{ lineal} \rightarrow y = Cx^3, \frac{y}{x^3} = C.$$

Haciendo $\begin{cases} \xi = yx^{-3} \\ \eta = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_\eta = x^{-3}u_\xi + u_\eta \\ u_x = -3yx^{-4}u_\xi \end{cases} \rightarrow yu_\eta = 3u - 3,$

$u_\eta = \frac{u-1}{\eta}$ lineal (y separable), $u = p(\xi)\eta + 1 = p\left(\frac{y}{x^3}\right)y + 1.$
(más largo es hacer $-\eta \int \eta^{-2} d\eta = 1$)

Imponemos un primer dato 'bueno':

$$u(-1, y) = y \rightarrow -p(-y)y + 1 = y, p(v) = 1 + \frac{1}{v} \rightarrow u(x, y) = y + x^3 + 1.$$

Con $\begin{cases} \xi = yx^{-3} \\ \eta = x \end{cases} \rightarrow u_\eta = \frac{3u-3}{\eta}, u = p^*(\xi)\eta^3 + 1 = p^*\left(\frac{y}{x^3}\right)x^3 + 1, p^*(v) \stackrel{!}{=} 1 + v$

Solución única porque la recta $x = -1$ no es tangente a las características como se ve en el dibujo. O porque en el proceso de cálculo ha quedado $p(v)$ determinada de forma única $\forall v$. O porque $T = 0 \cdot 3y - 1 \cdot (-1) = 1 \neq 0$.

Ahora un 'mal' dato: $u(x, x^3) = x \rightarrow p(1)x^3 + 1 = x$ [o $p^*(1)x^3 + 1 = x$].

Imposible. No existe ninguna solución de la EDP que cumpla ese dato de Cauchy.

Ej 5.
$$\begin{cases} yu_y + xu_x = 2u \\ u(x, 1) = x^3 \end{cases} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \rightarrow y = Cx. \begin{cases} \xi = y/x \\ \eta = y \end{cases} \rightarrow \eta u_\eta = 2u \rightarrow u = p(\xi)\eta^2.$$

Imponemos tres datos distintos a la solución general $u(x, y) = p\left(\frac{y}{x}\right)y^2$:

$$u(x, 1) = x^3 \rightarrow p\left(\frac{1}{x}\right) = x^3, p(v) = \frac{1}{v^3}, u = \frac{x^3}{y^3}y^2 = \frac{x^3}{y}.$$
 Solución única.

[Pero definida sólo si $y > 0$, la solución de un problema de Cauchy, en principio, sólo es local].

$$u(x, 1-x) = 2x-1 \rightarrow p\left(\frac{1-x}{x}\right) = \frac{2x-1}{(1-x)^2}, v = \frac{1}{x}-1, x = \frac{1}{v+1}, p(v) = \frac{1}{v^2}-1, u = x^2 - y^2.$$

[De nuevo la solución es única por estar dados los datos sobre una recta no característica o porque $T(x) = 1 \cdot (1-x) - (-1) \cdot x \equiv 1 \neq 0$. Y en este caso la solución es válida en todo \mathbf{R}^2].

$$u(x, x) = 0.$$
 Dato sobre característica que dará lugar a infinitas o ninguna solución.

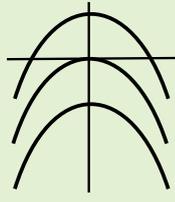
[Nos confirma que es característica el hecho de que $T(x) = 1 \cdot x - 1 \cdot x \equiv 0$].

Imponiendo el dato: $p(1)x^2 = 0 \rightarrow p(1) = 0$. Infinitas soluciones. Una para cada $p \in C^1$ que se anule en 1. [Por ejemplo son soluciones: $u \equiv 0$, la $u = x^2 - y^2$ de antes...].

Las dificultades de la unicidad, en los problemas vistos hasta ahora, se han limitado a ver lo que sucedía al imponer datos sobre características. En los dos siguientes aparecen problemas de tangencia, que dan dificultades de análisis más sutiles y complicadas.

Ej 6. $2xu_y - u_x = 4xy \quad \frac{dy}{dx} = -2x \rightarrow y+x^2 = K$ características.

$$\begin{cases} \xi = y+x^2 \\ \eta = y \end{cases} \rightarrow 2xu_\eta = 4xy; u_\eta = 2\eta \rightarrow u = p(\xi) + \eta^2 = p(y+x^2) + y^2$$

$$\begin{cases} \xi = y+x^2 \\ \eta = x \end{cases} \rightarrow -u_\eta = 4xy = 4\xi\eta - 4\eta^3 \rightarrow u = p^*(\xi) + \eta^4 - 2\xi\eta^2 = p^*(y+x^2) - 2yx^2 - x^4$$


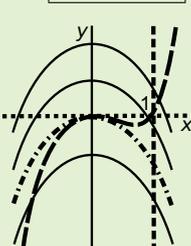
Imponemos diferentes datos de Cauchy a la ecuación y analizamos la unicidad:

$u(1, y) = 0 \rightarrow p(y+1) + y^2 = 0, p(v) = -(v-1)^2 \rightarrow u = 2y - 2yx^2 - x^4 + 2x^2 - 1.$
 $p^*(y+1) - 2y - 1 = 0, p^*(v) = 2v - 1 \rightarrow [p \text{ ó } p^* \text{ fijadas } \forall v; x=1 \text{ no es tangente a las características}].$

$u(x, -x^2) = 0 \rightarrow p(0) + x^4 = 0. \text{ Imposible, no hay solución.}$

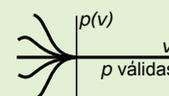
$u(x, -x^2) = x^4 \rightarrow p(0) = 0. \text{ Cada } p \in C^1 \text{ con } p(0) = 0 \text{ nos da una solución diferente: hay infinitas.}$

$u(x, 0) = 0 \rightarrow p(x^2) = 0. \text{ Sólo queda fijada } p(v) = 0 \text{ para } v \geq 0, \text{ pero no hay ninguna condición sobre } p \text{ si } v < 0.$



Podemos elegir cualquier $p \in C^1$ que valga 0 para $v \geq 0$, con lo que existen infinitas soluciones en un entorno de $(0, 0)$:

$u(x, y) = y^2$ si $y \geq -x^2$, pero está indeterminada si $y < -x^2$.



[En $(0, 0)$ es $y=0$ tangente a las características. Lo confirma $T = 1 \cdot 2x - 0 \cdot (-1)$].

$u(x, x^3 - x^2) = x^4 - 2x^5 \rightarrow p(x^3) = -x^6, p(v) = -v^2 \forall v \rightarrow u = -2x^2y - x^4 \forall (x, y).$

Hay solución única pese a ser la curva de datos tangente a una característica en el punto $(0, 0)$ [es $T = 1 \cdot 2x - (3x^2 - 2x) \cdot (-1) = -3x^2$]. A veces hay tangencia y existe solución única. La no tangencia es suficiente pero no necesaria.

Ej 7. $(y+1)u_y + xu_x = 0 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y+1}{x} \rightarrow y=Cx-1 \rightarrow u = p\left(\frac{y+1}{x}\right).$

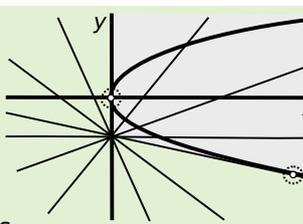
Dará solución única este dato inicial:

$u(x, 0) = f(x) = p\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow u = f\left(\frac{x}{y+1}\right)$ [$y=0$ no es tangente a las características].

$u(0, y) = 1 \quad x=0$ característica ($T \equiv 0$, cumple $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y+1}$).

Sabemos que debe tener infinitas soluciones. Para precisarlas reescribimos $u = p^*\left(\frac{x}{y+1}\right), p^*(0) = 1.$ [$u=1, u = \cos \frac{x}{y+1}, \dots$ son soluciones con ese dato].

$u(y^2, y) = 0, T = 2y(y+1) - y^2 = y(y+2),$ cerca de $(0, 0)$ y $(4, -2)$ posible no unicidad:
 $p\left(\frac{y+1}{y^2}\right) = 0$ sólo precisa $p(v) \equiv 0$ si $v \geq -\frac{1}{4}, \frac{4y+x+4}{x} \geq 0 \rightarrow u \equiv 0$ en la zona sombreada.



1.2. EDPs lineales de segundo orden; clasificación

Consideremos [E] $L[u] \equiv \boxed{A u_{yy} + B u_{xy} + C u_{xx} + D u_y + E u_x + H u = F(x, y)}$.

Nos limitamos en estos apuntes al caso de que A, B, \dots, H sean constantes (A, B y C no todas nulas). Como en las EDPs de primer orden, quizás un **cambio de variable** bien elegido haga desaparecer términos de [E], de forma que resulte una ecuación resoluble elementalmente. Hagamos un cambio genérico y analicemos la expresión de [E] en función de las nuevas variables:

$\begin{cases} \xi = px + qy \\ \eta = rx + sy \end{cases}$, con p, q, r, s constantes y jacobiano $J = ps - qr \neq 0$. Entonces:

$$\begin{aligned} u_{yy} &= q^2 u_{\xi\xi} + 2qs u_{\xi\eta} + s^2 u_{\eta\eta} \\ u_y &= q u_{\xi} + s u_{\eta} \\ u_{xy} &= p q u_{\xi\xi} + (ps + qr) u_{\xi\eta} + r s u_{\eta\eta} \\ u_x &= p u_{\xi} + r u_{\eta} \\ u_{xx} &= p^2 u_{\xi\xi} + 2pr u_{\xi\eta} + r^2 u_{\eta\eta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [q^2 A + pqB + p^2 C] u_{\xi\xi} + [2qsA + (ps + qr)B + 2prC] u_{\xi\eta} + [s^2 A + rsB + r^2 C] u_{\eta\eta} + \dots \\ & = A^* u_{\xi\xi} + B^* u_{\xi\eta} + C^* u_{\eta\eta} + \dots = F(\xi, \eta) \end{aligned}$$

[los puntos representan los términos en u_{ξ}, u_{η} y u].

Intentemos hacer $A^* = C^* = 0$. Para ello debe ser: $\begin{cases} q^2 A + pqB + p^2 C = 0 \\ s^2 A + rsB + r^2 C = 0 \end{cases}$.

Si $B^2 - 4AC > 0$ y $A \neq 0$ podemos elegir $p = r = 1$ y $q, s = \frac{1}{2A} [-B \mp \sqrt{B^2 - 4AC}]$.

[Si $A = 0$ y $C \neq 0$ tomamos $q = 1, p = 0$ y $s = 1, r = -\frac{B}{C}$; $A = C = 0$ es caso trivial].

Si $B^2 - 4AC = 0$, q y s coinciden y sería $J = 0$. Y si es < 0 , q y s serían complejas.

Además, es fácil verificar que $(B^*)^2 - 4A^*C^* = [B^2 - 4AC] J^2$ y, por tanto, el signo de $B^2 - 4AC$ no varía con cambios de coordenadas. Todo lo anterior nos lleva a definir:

$\text{Si } B^2 - 4AC \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases}$	se dice, respectivamente, que la EDP [E] es	hiperbólica parabólica elíptica
--	---	--

Encontremos la forma más sencilla en que podemos escribir [E] (**forma canónica**) en cada caso. Si es **hiperbólica**, arriba hemos visto que se convierte con el cambio

$$\begin{cases} \xi = x - \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} y \\ \eta = x - \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} y \end{cases} \text{ en } B^* u_{\xi\eta} + \dots = F. \text{ Como } (B^*)^2 > 0, \text{ podemos escribir la}$$

forma canónica de las **hiperbólicas**: $\boxed{u_{\xi\eta} + \dots = F^*}$.

A las dos familias de rectas $\xi = K, \eta = K$ se les llama **características** de [E].

Si [E] es **parabólica**, sólo tenemos $\xi = x - \frac{B}{2A} y$ [**una** familia de características].

Con esta ξ hacemos $A^* = 0$, y como $(B^*)^2 - 4A^*C^* = 0$ también es $B^* = 0$. Para η podemos tomar cualquier r y s tales que $J \neq 0$. Se suele tomar $\eta = y$. Así haciendo

$$\begin{cases} \xi = x - \frac{B}{2A} y \\ \eta = y \end{cases} \text{ y dividiendo por } C^* \text{ se obtiene la}$$

forma canónica de las **parabólicas**: $\boxed{u_{\eta\eta} + \dots = F^*}$.

Si es **elíptica**, las ξ, η son rectas complejas conjugadas: $\frac{2Ax - By}{2A} \pm i \frac{\sqrt{4AC - B^2}}{2A} y$ (no hay, pues, características reales). Y no es difícil comprobar que el cambio:

$$\begin{cases} \xi = \frac{2Ax - By}{\sqrt{4AC - B^2}} \\ \eta = y \end{cases} \text{ lleva [E] a la}$$

forma canónica de las **elípticas**: $\boxed{u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \dots = F^*}$.

Si A , B y C son no constantes, si en cada punto (x, y) de una región Ω del plano es $B(x, y)^2 - 4A(x, y)C(x, y) > 0$, $= 0$ o < 0 , se dice, respectivamente, que la EDP [E] es **hiperbólica**, **parabólica** o **elíptica** en Ω . Las características en este caso general son curvas integrales de EDOs de primer orden (quizás no resolubles).

Ej 1. $u_{yy} - 4u_{xy} + 5u_{xx} + u = 0 \rightarrow B^2 - 4AC = -4 < 0$, elíptica.

Copiando el cambio de la página anterior:

$$\begin{cases} \xi = x+2y \\ \eta = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_y = 2u_\xi + u_\eta \\ u_x = u_\xi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_{yy} = 4u_{\xi\xi} + 4u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \\ u_{xy} = 2u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta} \\ u_{xx} = u_{\xi\xi} \end{cases}$$

Llevándolo a la ecuación se llega a la forma canónica: $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u = 0$.

Ej 2. $4u_{yy} - 4u_{xy} + u_{xx} = 0 \rightarrow B^2 - 4AC = 0 \rightarrow$ parabólica en todo \mathbf{R}^2 .

El cambio en este caso sería $\xi = x + \frac{y}{2}$, o mejor (son las mismas características):

$$\begin{cases} \xi = 2x+y \\ \eta = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_y = u_\xi + u_\eta \\ u_x = 2u_\xi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \\ u_{xy} = 2u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} \\ u_{xx} = 4u_{\xi\xi} \end{cases} \rightarrow 4u_{\eta\eta} = 0, \quad u_{\eta\eta} = 0.$$

Esta forma canónica que se resuelve fácilmente: $u_\eta = p(\xi) \rightarrow u = \eta p(\xi) + q(\xi)$.

Por tanto, la **solución general** de la ecuación es:

$$u(x, y) = y p(2x+y) + q(2x+y), \text{ con } p \text{ y } q \text{ funciones } C^2 \text{ arbitrarias.}$$

Como en este caso, a veces es posible hallar elementalmente la **solución general** de [E] tras ponerla en forma canónica (en la mayoría, como en el ejemplo 1, será imposible). Identifiquemos las **formas canónicas resolubles**:

Si sólo hay derivadas respecto a una variable: $u_{\eta\eta} + E^*u_\eta + H^*u = F^*$.

Esta lineal de orden 2, ordinaria si la vemos como función de η , se integra viendo la ξ como un parámetro. Un par de constantes para cada ξ dan lugar a dos funciones arbitrarias de ξ en la solución. La ecuación, como vemos, debe ser parabólica.

Si sólo aparece $u_{\xi\eta}$ y una de las derivadas primeras: $u_{\xi\eta} + D^*u_\xi = F^*$.

Se resuelve haciendo $u_\xi = v$: la lineal de primer orden $v_\eta + D^*v = F^*$ es integrable viendo ξ como parámetro. La v contiene, pues, una función arbitraria de ξ . Al integrarla para hallar la u aparece otra función arbitraria (de η). Las cosas serían análogas si en vez de la u_ξ apareciese la u_η . La ecuación es hiperbólica.

[En las EDOs de segundo orden aparecen dos constantes arbitrarias; aquí hay, en los dos casos, dos funciones arbitrarias (evaluadas en las características como ocurría en las EDPs de primer orden). Se ve que ninguna ecuación elíptica, ni la del calor $u_t - u_{xx}$ son resolubles por este camino].

[Otras pocas ecuaciones más pueden llevarse a estas formas resolubles haciendo cambios de variable del tipo $u = e^{py} e^{qx} w$ que hacen desaparecer alguna derivada de menor orden o el término con la u].

Ej 3. $u_{yy} + 5u_{xy} + 4u_{xx} + 3u_y + 3u_x = 9 \rightarrow B^2 - 4AC = 9$, hiperbólica.

$$\frac{B \mp \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{1}{4} \rightarrow \begin{cases} \xi = x-y \\ \eta = x-4y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_y = -u_\xi - 4u_\eta \\ u_x = u_\xi + u_\eta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_{yy} = u_{\xi\xi} + 8u_{\xi\eta} + 16u_{\eta\eta} \\ u_{xy} = -u_{\xi\xi} - 5u_{\xi\eta} - 4u_{\eta\eta} \\ u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \end{cases}$$

Entonces: $u_{\xi\eta} + u_\eta = -1$, del segundo de los tipos citados. Para resolverla:

$$u_\eta = v \rightarrow v_\xi = -v - 1 \rightarrow v = p^*(\eta)e^{-\xi} - 1 \rightarrow u(\xi, \eta) = p(\eta)e^{-\xi} + q(\xi) - \eta$$

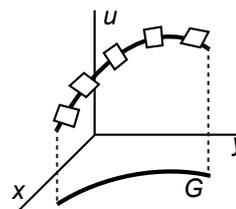
La solución general es: $u(x, y) = p(x-4y)e^{y-x} + q(x-y) + 4y-x$, p, q arbitrarias.

[La ecuación similar $u_{yy} + 5u_{xy} + 4u_{xx} + 3u_x = 9 \rightarrow u_{\xi\eta} - \frac{1}{3}u_\eta - \frac{1}{3}u_\xi = -1$, no es resoluble].

1.3. Unicidad; los problemas clásicos

¿Qué datos adicionales proporcionan problemas bien planteados para una EDP de segundo orden en dos variables lineal [E] $L[u]=F$? En primer lugar, ¿cómo aislar una única solución? Para una EDO de segundo orden era necesario fijar el valor de la solución y de su derivada en el instante inicial para tenerla. En una EDP de primer orden dábamos los valores de u en toda una curva G (no tangente a las características). Hemos visto que en los pocos casos en que [E] era resoluble aparecían dos funciones arbitrarias en la solución. Todo ello lleva a plantear el

Problema de Cauchy para [E]: hallar la solución que tome unos valores dados de u y la derivada normal u_n a lo largo de una curva dada G del plano xy .



[Geoméricamente: hallar la superficie solución que contenga una curva dada y tenga a lo largo de ella una familia de planos tangentes también dados. La derivada normal será habitualmente u_x o u_y].

En particular, al tomar como G el eje x se tiene el **problema de valores iniciales** que consiste en hallar la solución de [E] que cumple $u(x, 0)=f(x)$, $u_y(x, 0)=g(x)$.

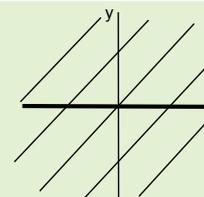
Como ocurría en las de primer orden se puede probar que:

Si los datos son regulares y G no es tangente a las características en ningún punto, el problema de Cauchy tiene solución única en las proximidades de G .

Ej 1. Sea

$$[P] \begin{cases} u_{yy} + 2u_{xy} + u_{xx} - u_y - u_x = 0 \\ u(x, 0) = x, \quad u_y(x, 0) = 0 \end{cases}$$

$B^2 - 4AC \equiv 0$
parabólica



$x - \frac{B}{2A}y = x - y = K$ características. Como $y=0$ no es tangente a ellas, el problema de Cauchy [P] tendrá solución única.

La ecuación resulta ser resoluble y podemos comprobarlo:

$$\begin{cases} \xi = x-y \\ \eta = y \end{cases} \rightarrow u_{\eta\eta} - u_{\eta} = 0 \rightarrow u = p(\xi) + q(\xi)e^{\eta} = p(x-y) + q(x-y)e^y.$$

Imponiendo los datos de Cauchy [$u_y = -p' + (q-q')e^y$]:

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) = p(x) + q(x) = x \\ u_y(x, 0) = -p'(x) - q'(x) + q(x) = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} p'(x) + q'(x) = 1 \\ p'(x) + q'(x) = q(x) \end{cases}$$

[p' y q' representan la misma derivada ordinaria en ambas ecuaciones]

$$\rightarrow q(x) = 1 \quad \forall x \rightarrow p(x) = x - 1 \quad \forall x \rightarrow \boxed{u = x - y - 1 + e^y},$$

solución determinada de forma única por los cálculos anteriores.

¿Es el problema de Cauchy adecuado a todas las EDPs de segundo orden? No, no lo es. En los problemas reales aparecen condiciones mucho más variadas: en unos casos condiciones iniciales y de contorno a la vez, en otros sólo de contorno...

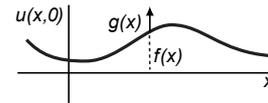
Por otra parte, unos datos de Cauchy pueden dar lugar problemas mal planteados para EDPs no hiperbólicas. Además de unicidad, debe haber dependencia continua: variando poco los datos, deben variar poco las soluciones. Se pueden dar ejemplos de problemas de Cauchy para Laplace (de solución única, pues sin características reales no puede haber tangencia con la curva de datos), para los que no se tiene la citada dependencia continua.

Conozcamos los principales problemas asociados a las tres **ecuaciones clásicas** en dos variables [sólo (P_1) será de Cauchy]. Para cada uno habría que probar que 'está bien planteado'. Demostraremos sólo parte de las afirmaciones. Para más variables las cosas son análogas y poco más complicadas.

Ondas. Tiene solución única dependiente continuamente de los datos el

problema puro de valores iniciales:

$$(P_1) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), & x, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$



para la **cuerda infinita** (de sentido real si t es pequeño y estamos lejos de los extremos). Hallemos su solución (única ecuación clásica resoluble por este camino) para $F \equiv 0$:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = g(x) \end{cases} \quad B^2 - 4AC = 4c^2, \text{ hipérbolica.}$$

A partir de las expresiones de la página 8: $\begin{cases} \xi = x+ct \\ \eta = x-ct \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \\ u_{tt} = c^2[u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}] \end{cases}$

$$\rightarrow -4c^2 u_{\xi\eta} = 0 \rightarrow \boxed{u_{\xi\eta} = 0} \text{ forma canónica} \rightarrow u_{\xi} = p^*(\xi) \rightarrow u = p(\xi) + q(\eta).$$

Luego la **solución general de la ecuación de ondas homogénea** es:

$$\boxed{u(x, t) = p(x+ct) + q(x-ct)}, \quad p \text{ y } q \text{ funciones arbitrarias de } C^2.$$

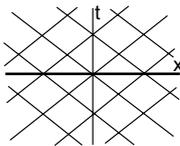
Imponemos los datos para aislar la solución del problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} p(x) + q(x) = f(x) \\ cp'(x) - cq'(x) = g(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p'(x) + q'(x) = f'(x) \\ p'(x) - q'(x) = \frac{1}{c}g(x) \end{cases} \rightarrow 2p'(x) = f'(x) + \frac{1}{c}g(x) \\ \rightarrow p(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds + k \rightarrow q(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds - k \rightarrow$$

fórmula de D'Alembert

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds$$

[Para que u sea C^2 , debe $f \in C^2$ y $g \in C^1$].



La unicidad del problema de Cauchy (P_1) la asegura el hecho de que imponemos los datos sobre la recta $t=0$ no característica.

Deduzcamos, para $F \equiv 0$, la dependencia continua. Es decir, probemos que para datos iniciales próximos sus soluciones $u(x, t)$ y $u^*(x, t)$ son cercanas en intervalos de tiempo finitos:

si $|f(x) - f^*(x)| < \delta$ y $|g(x) - g^*(x)| < \delta \forall x$, para $t \in [0, T]$ se tiene:

$$|u - u^*| \leq \frac{1}{2}|f(x+ct) - f^*(x+ct)| + \frac{1}{2}|f(x-ct) - f^*(x-ct)| + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} |g(s) - g^*(s)| ds \\ < \delta + \frac{\delta}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} ds = \delta(1+T) < \epsilon \forall x \text{ y } \forall t \in [0, T], \text{ si } \delta < \frac{\epsilon}{1+T}.$$

Otro problema bien planteado para la **cuerda acotada** cuyos extremos se mueven verticalmente según $h_0(t)$ y $h_L(t)$ dadas (que estén fijos es un caso particular). Hay entonces dos **condiciones de contorno** adicionales:

$$(P_2) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), & x \in [0, L], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x) \\ u(0, t) = h_0(t), & u(L, t) = h_L(t) \end{cases}$$

Probemos su **unicidad** (veremos que la solución existe, como en otros casos, hallándola explícitamente [en 1.4 mediante extensiones o en 4.2 por separación de variables]; no probamos la dependencia continua). Sean u_1 y u_2 soluciones de (P_2) y sea $u = u_1 - u_2$.

Entonces u cumple: (P_0) $\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x \in [0, L], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = u(0, t) = u(L, t) = 0 \end{cases}$

Queremos ver que $u \equiv 0$. Integremos la identidad:

$$u_t [u_{tt} - c^2 u_{xx}] = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [u_t^2 + c^2 u_x^2] - c^2 \frac{\partial}{\partial x} [u_t u_x]$$

para x entre 0 y L y t entre 0 y T cualquiera, suponiendo u solución de (P_0):

$$\frac{1}{2} \int_0^L [u_t^2 + c^2 u_x^2]_{(x,0)}^{(x,T)} dx - c^2 \int_0^T [u_t u_x]_{(0,t)}^{(L,t)} dt = \frac{1}{2} \int_0^L [u_t(x, T)^2 + c^2 u_x(x, T)^2] dx = 0$$

$$\text{pues } u_{tt} - c^2 u_{xx} = u_t(x, 0) = u_x(x, 0) = u_t(0, t) = u_t(L, t) = 0.$$

El último corchete es ≥ 0 y es función continua de x . Para que la integral se anule debe ser $u_t(x, T) = u_x(x, T) = 0$ si $0 \leq x \leq L$ y para cualquier T . Por tanto $u(x, t)$ es constante y como $u(x, 0) = 0$ debe ser $u = u_1 - u_2 \equiv 0$. Hay unicidad.

Calor. Para la **varilla infinita** se prueba que está bien planteado:

$$(P_3) \begin{cases} u_t - ku_{xx} = F(x, t), & x \in \mathbf{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & u \text{ acotada} \end{cases}$$

Basta un solo dato, la distribución inicial de temperaturas, para fijar las posteriores.

[No podemos dar arbitrariamente la $u_t(x, 0)$ pues debe ser $u_t(x, 0) = kf''(x) + F(x, 0)$ si u es solución ($t=0$ es característica y (P_3) no es buen problema de valores iniciales)].

Para la **varilla acotada** hay condiciones de contorno, que pueden ser de varios tipos, con diferentes significados físicos cada uno. Si los extremos toman a lo largo del tiempo las **temperaturas dadas** $h_0(t)$ y $h_L(t)$ se tiene:

$$(P_4) \begin{cases} u_t - ku_{xx} = F(x, t), & x \in (0, L), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u(0, t) = h_0(t), & u(L, t) = h_L(t) \end{cases}$$

Si lo que fijamos es el **flujo de calor** en los extremos obtenemos:

$$(P_5) \begin{cases} u_t - ku_{xx} = F(x, t), & x \in (0, L), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_x(0, t) = h_0(t), & u_x(L, t) = h_L(t) \end{cases}$$

[En particular, si $h_0(t) = h_L(t) = 0$, los extremos están **aislados**].

Un tercer tipo de condiciones de contorno combina u y u_x :

$$u(0, t) - au_x(0, t) = h_0(t) \quad \text{ó} \quad u(L, t) + bu_x(L, t) = h_L(t), \quad \text{con } a, b > 0$$

Expresan la **radiación libre** de calor hacia un medio a temperatura dada (si el extremo $x=L$ está más (menos) caliente que h_L entonces irradia (chupa) calor pues $u_x = (h_L - u)/b < 0 (> 0)$ y el flujo de calor es siempre en sentido opuesto al gradiente de las temperaturas; lo mismo sucede con el otro extremo).

(P_4) ó (P_5) (o cualquiera de los otros 7 problemas que aparecen combinando los 3 tipos de condiciones descritos) son todos problemas bien planteados.

Probemos que tienen solución única. Sean u_1 y u_2 soluciones. Entonces $u = u_1 - u_2$ satisface el problema con $F = f = h_0 = h_L = 0$. Nuestro objetivo es deducir que $u \equiv 0$.

Multiplicando la ecuación por u e integrando respecto a x entre 0 y L se tiene:

$$\begin{aligned} \int_0^L uu_t dx - k \int_0^L uu_{xx} dx &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L u^2 dx - k [uu_x]_{(0,t)}^{(L,t)} + k \int_0^L u_x^2 dx = 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_0^L [u(x, t)]^2 dx &\leq 0 \end{aligned}$$

[si $u=0$ ó $u_x=0$ en los extremos la última implicación es clara, ya que $k > 0$; es también fácil verlo si $u - au_x = 0, a > 0$ ó si $u + bu_x = 0, b > 0$; no se puede dar ese paso ni probar la unicidad para $a < 0$ ó $b < 0$ (físicamente inadmisibles)].

La última integral es una función $U(t)$ no creciente ($U' \leq 0$), que cumple $U(0) = 0$ (pues $u(x, 0) = 0$) y es $U(t) \geq 0$ (integrando positivo). De las tres cosas se sigue que $U(t) \equiv 0 \Rightarrow u \equiv 0$. Unicidad.

Una forma alternativa de probar la unicidad de algunos problemas (que además permite atacar la dependencia continua) es utilizar un **principio del máximo** que se ajuste a ese problema. Por ejemplo, es cierto este principio que no demostramos:

Si u es continua en $[0, T] \times [0, L]$ y satisface $u_t - ku_{xx} = 0$ en $(0, T) \times (0, L)$, los valores máximo y mínimo de u se alcanzan o bien en $t=0$ o bien en $x=0$ ó bien en $x=L$.

[Si ni la temperatura inicial en la varilla ni la de los extremos supera un valor M , no se puede crear en su interior una temperatura mayor que M (si no hay fuentes externas); la prueba a partir de esto de la unicidad y la dependencia continua de (P_4) sería similar a la que veremos para Laplace y no la hacemos; si quisiéramos demostrar la unicidad para los otros problemas de la ecuación del calor, necesitaríamos otros principios del máximo diferentes].

Laplace. Los problemas son de contorno. Los dos más importantes son:

Problema de Dirichlet:

$$(P_D) \begin{cases} \Delta u = F \text{ en } D \\ u = f \text{ en } \partial D \end{cases}$$

Problema de Neumann:

$$(P_N) \begin{cases} \Delta u = F \text{ en } D \\ u_n = f \text{ en } \partial D \end{cases}$$



Donde D es un abierto conexo acotado de \mathbf{R}^2 , ∂D es su frontera y u_n es la derivada en la dirección del vector normal unitario exterior \mathbf{n} .

Si vemos la ecuación describiendo una distribución estacionaria de temperaturas en una placa, en (P_D) fijamos las temperaturas en el borde y en (P_N) el flujo de calor en dirección normal al borde.

Si F , f y ∂D son regulares, el (P_D) es un problema bien planteado. Lo resolveremos en recintos sencillos en el capítulo 4. Probemos ahora su unicidad por dos caminos.

Mediante la **fórmula de Green** (generaliza la integración por partes a \mathbf{R}^2):

$$\text{Sea } u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D}). \text{ Entonces } \iint_D u \Delta u \, dx dy = \oint_{\partial D} u u_n \, ds - \iint_D \|\nabla u\|^2 \, dx dy$$

[Identidad $u \Delta u = \text{div}[u \nabla u] - \|\nabla u\|^2$ y teorema de la divergencia $\iint_D \text{div} \mathbf{f} \, dx dy = \oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, ds$].

Si u_1 y u_2 son soluciones de (P_D) , $u = u_1 - u_2$ verifica el problema con $F = f = 0$. La fórmula de Green dice entonces que:

$$\iint_D \|\nabla u\|^2 \, dx dy = 0 \Rightarrow \nabla u = \mathbf{0} \Rightarrow u = \text{cte} \Rightarrow u \equiv 0 \text{ (pues } u = 0 \text{ en } \partial D).$$

Probamos de otra forma la unicidad de (P_D) , y también la dependencia continua, con el siguiente **principio del máximo** para Laplace (intuitivamente claro: la temperatura de una placa no supera la máxima de su borde) que no demostramos:

Si u satisface $\Delta u = 0$ en un dominio acotado D y es continua en \bar{D} entonces u alcanza su máximo y su mínimo en la ∂D .

Como $u = u_1 - u_2$, con u_1, u_2 soluciones, verifica $\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } D \\ u = 0 \text{ en } \partial D \end{cases}$, se tiene:

$$0 = \min_{\partial D} u \leq \min_D u \leq \max_D u \leq \max_{\partial D} u = 0 \Rightarrow u \equiv 0$$

Si u^* es solución de (P_D) con $u = f^*$ en ∂D y sea $|f - f^*| < \epsilon$ en ∂D . Entonces:
 $v = u - u^* \rightarrow \begin{cases} \Delta v = 0 \text{ en } D \\ v = f - f^* \text{ en } \partial D \end{cases} \Rightarrow -\epsilon < \min_{\partial D} v \leq v \leq \max_{\partial D} v < \epsilon \Rightarrow |u - u^*| < \epsilon \text{ en } D.$

Si la diferencia entre datos es pequeña, lo es la diferencia entre soluciones.

Para el (P_N) la situación es más complicada. En primer lugar, **para que (P_N) pueda tener solución es necesario que F y f satisfagan la relación:**

$$\iint_D F \, dx dy = \oint_{\partial D} f \, ds \quad [\text{basta aplicar el teorema de la divergencia a } \nabla u \text{ para verlo}].$$

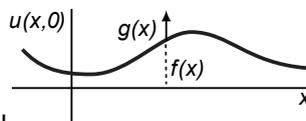
Además, si (P_N) tiene solución, esta contiene una constante arbitraria [lo que era esperable, ya que ecuación y condición de contorno sólo contienen derivadas]. También se ve que si queremos repetir la prueba de la unicidad con la fórmula de Green, podemos dar todos los pasos excepto la última implicación. Se dice que el **problema de Neumann (P_N) tiene unicidad salvo constante.**

[Además se imponen a Laplace condiciones de contorno del tipo $u + a u_n = f$, $a > 0$, y también tienen interés los problemas en que en parte de ∂D hay condiciones tipo Dirichlet, en otra tipo Neumann... (todos son problemas bien planteados). También se tratan problemas en D no acotados. Para tener unicidad, además de los datos en ∂D , hay que exigir un 'adecuado comportamiento' en el infinito].

1.4. Ecuación de la cuerda vibrante

En secciones anteriores vimos que para el **problema puro de valores iniciales**:

$$(P_1) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$



las características eran $x \pm ct = K$, la solución general

$$u(x, t) = p(x+ct) + q(x-ct), \quad p \text{ y } q \text{ funciones arbitrarias de } C^2,$$

y la solución única de (P_1) , satisfaciendo ya los datos iniciales:

$$[1] \quad u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds \quad \text{fórmula de D'Alembert}$$

[Para que u sea C^2 , debía $f \in C^2$ y $g \in C^1$ (entonces es **solución clásica o regular**). Si u es continua pero no C^2 se llama 'solución débil', concepto típico EDPs. En cada caso hay que precisar que se admite como solución débil y comprobar que el problema sigue bien planteado (si más funciones valen como soluciones, ¿seguirá la unicidad?).]

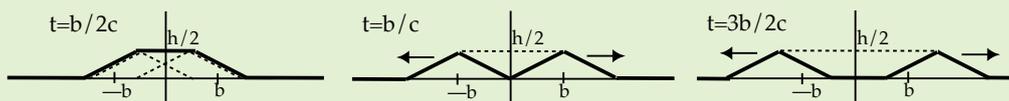
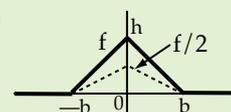
La solución de (P_1) es la suma de dos ondas que viajan a velocidad c , una hacia las x crecientes y otra hacia las decrecientes. A la vista de [1]:

$$\text{Llamando } G(x) \equiv \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds: \quad \begin{aligned} q(x) &= \frac{1}{2} f(x) - G(x) \text{ va hacia la derecha} \\ p(x) &= \frac{1}{2} f(x) + G(x) \text{ va hacia la izquierda} \end{aligned}$$

Para obtener un dibujo de la solución $u(x, t)$ en diferentes instantes, identificadas estas ondas viajeras, bastará trasladar sus gráficas y sumarlas (gráficamente). Esto es especialmente sencillo cuando sólo hay f (si no hay velocidades iniciales).

Ej 1. Supongamos $f=0$ salvo una perturbación en forma de triángulo en torno a 0 y que soltamos la cuerda sin impulso ($g=0$).

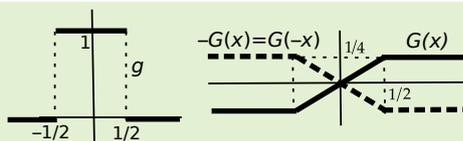
Dibujemos la solución para diferentes t . Bastará trasladar las dos ondas que viajan en sentidos opuestos [aquí ambas son $\frac{1}{2}f(x)$]:



Ha costado muy poco hacer los dibujos y predecir la evolución de esta solución débil [bastante más costaría dar la expresión analítica de la solución para todo x y todo t]. Los picos de la f inicial siguen indefinidamente y viajan también a velocidad c .

Las cosas se complican cuando viaja la G :

Ej 2.
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = 0, & u_t(x, 0) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1/2 \\ 0, & |x| > 1/2 \end{cases} \end{cases}$$



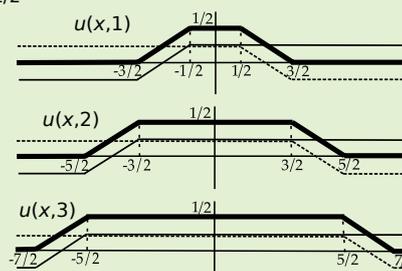
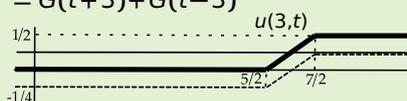
Viajan a izquierda y derecha:

$$u = \overleftarrow{G(x+t)} - \overrightarrow{G(x-t)}, \text{ con } G(x) = \frac{1}{2} \int_0^x g.$$

Moviendo G dibujamos la cuerda para $t = 1, 2$ y 3 :

Es fácil dibujar también la evolución de $x=3$:

$$\begin{aligned} u(3, t) &= G(3+t) - G(3-t) \\ &= G(t+3) + G(t-3) \end{aligned}$$



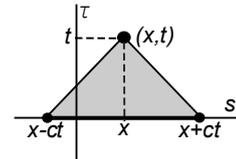
Supongamos ahora que hay **fuerzas externas**. El problema es:

$$(P_2) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), & x, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

Sabiendo algo de derivación de integrales, se comprueba que su solución es:

$$[2] \quad u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c[t-\tau]}^{x+c[t-\tau]} F(s, \tau) ds d\tau$$

Observemos que $u(x, t)$ sólo depende de los valores de f en $x-ct$ y $x+ct$ [puntos de corte con el eje x de las características que pasan por (x, t)] y de los de g en el intervalo $[x-ct, x+ct]$. A este intervalo se le llama **dominio de dependencia** del punto (x, t) . Se comprueba también que el recinto descrito por la integral doble es el triángulo del plano $s\tau$ limitado por el eje $\tau=0$ y las características citadas. Así pues, para hallar la solución u en un punto (x, t) se necesita sólo: i) los valores de F en dicho triángulo, ii) los de g en toda su base, iii) los de f en los dos puntos $x-ct$ y $x+ct$.



Ej 3. $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 2 \\ u(x, 0) = x, & u_t(x, 0) = 3 \end{cases}$ Utilizando directamente [2]:

$$u = \frac{1}{2}[(x+t) + (x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} 3 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-[t-\tau]}^{x+[t-\tau]} 2 ds d\tau = x + 3t + 2 \int_0^t [t-\tau] d\tau = x + 3t + t^2$$

A veces es fácil hallar una solución v de la ecuación no homogénea y evitar el cálculo de la integral doble, pues $w = u - v$ conduce a un problema con $F = 0$, resoluble con [1] (cuando haya condiciones de contorno, deberán seguir siendo homogéneas). Si F depende sólo de x o de t se puede buscar una $v(x)$ o una $v(t)$. En este caso:

$$-v_{xx} = 2 \rightarrow v = -x^2 + Cx + K \rightarrow \text{si } v(x) = -x^2, \text{ } w \text{ cumple } \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0 \\ w(x, 0) = x + x^2, & w_t(x, 0) = 3 \end{cases}$$

$$\rightarrow w = \frac{1}{2}[(x+t) + (x+t)^2 + (x-t) + (x-t)^2] + \int_{x-t}^{x+t} 3 ds = x + x^2 + t^2 + 3t, \quad u = x + 3t + t^2.$$

$$v_{tt} = 2 \rightarrow v(t) = t^2 + 3t \rightarrow \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0 \\ w(x, 0) = x, & w_t(x, 0) = 0 \end{cases} \rightarrow w = x \rightarrow u = x + 3t + t^2.$$

Pasemos a resolver problemas con **condiciones de contorno**. En primer lugar, el problema homogéneo para la **cuerda semi-infinita** y fija en un extremo:

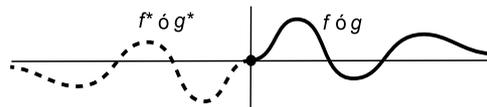
$$(P_3) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x), & u(0, t) = 0 \end{cases} \quad [\text{para que no esté rota, debe ser } f(0) = 0].$$

La fórmula [1] exige funciones definidas $\forall x$ y ni f ni g están definidas si $x < 0$. ¿Cómo extender estas funciones a todo \mathbf{R} ? Si llamamos f^* y g^* a sus extensiones y se debe cumplir la condición de contorno:

$$u(0, t) = \frac{1}{2}[f^*(ct) + f^*(-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{-ct}^{ct} g^*(s) ds = 0,$$

es claro que f^* y g^* han de ser **impares respecto a 0**, es decir,

$$f^*(-x) = -f^*(x); \quad g^*(-x) = -g^*(x).$$



Así pues, la solución de (P_3) es la del siguiente problema (para la cuerda infinita):

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f^*(x) \\ u_t(x, 0) = g^*(x) \end{cases}, \quad u(x, t) = \frac{1}{2}[f^*(x+ct) + f^*(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g^*(s) ds \quad [3]$$

pues u cumple la ecuación, las condiciones iniciales para $x \geq 0$, y la de contorno. Las dificultades prácticas del uso de esta solución es que f^* y g^* tendrán, en general, diversas expresiones en distintos intervalos.

Ej 4.
$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, & x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = \begin{cases} \text{sen } \pi x, & x \in [2, 3] \\ 0, & x \in [0, 2] \cup [3, \infty) \end{cases}, & u_t(x, 0) = u(0, t) = 0 \end{cases}$$

- a) Hallar $u(\frac{7}{6}, 4)$.
 b) Dibujar $u(x, 2)$ y $u(x, 4)$.

La solución es $u(x, t) = \frac{1}{2}[f^*(x+t) + f^*(x-t)]$, con f^* extensión impar respecto del origen.

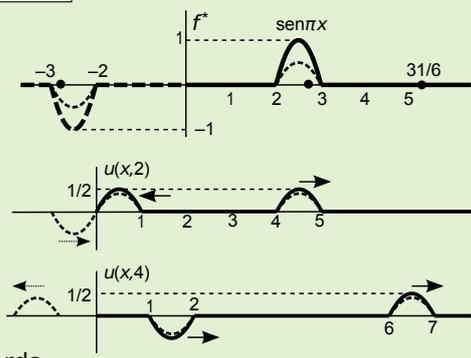
a) $u(\frac{7}{6}, 4) = \frac{1}{2}[f^*(\frac{31}{6}) + f^*(-\frac{17}{6})]$

$$= \frac{1}{2}[f(\frac{31}{6}) - f(\frac{17}{6})] = -\frac{1}{2} \text{sen } \frac{17\pi}{6} = -\frac{1}{4}$$

- b) Para dibujar basta trasladar rígidamente la gráfica de $\frac{1}{2}f^*$ a izquierda y derecha 2 unidades en un caso y 4 en otro y sumar.

En $t=2$, la onda que se mueve hacia la izquierda está llegando al origen; en $t=4$ se ha reflejado e invertido y ahora viaja hacia la derecha.

[Esta reflexión e inversión siempre ocurre en los extremos con la condición $u=0$, lo que permite predecir fácilmente la evolución de estas perturbaciones localizadas en la f . Si f fuese no nula, por ejemplo, en todo $[0, \infty)$ o si la perturbación fuese en la g , las cosas, gráficamente, se pueden complicar mucho].



Ej 5.
$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, & x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = 0, & u_t(x, 0) = \begin{cases} (x-2)(x-4), & x \in [2, 4] \\ 0, & \text{resto de } [0, \infty) \end{cases} \\ u(0, t) = 0 \end{cases}$$

- a) Hallar el valor de $u(3, 6)$.
 b) Hallar $u(3, t)$ si $t \geq 7$ y si $1 \leq t \leq 5$.

Para aplicar D'Alembert extendemos g a una g^* impar definida en todo \mathbf{R} :

Entonces $u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g^*(s) ds$ será la solución del problema para todo x, t .

a) $u(3, 6) = \frac{1}{2} \int_{-3}^9 g^*_{\text{impar}} = \frac{1}{2} \int_3^4 (s^2 - 6s + 8) ds = [\frac{s^3}{6} - \frac{3s^2}{2}]_3^4 + 4 = -\frac{13}{3} + 4 = -\frac{1}{3}$.

b) Para $t \geq 7$ es $3-t \geq -4$ y $3+t \geq 10$.
 Por tanto, $u(3, t) = \frac{1}{2} \int_{3-t}^{3+t} g^* = 0$, pues las áreas se cancelan.

Para $1 \leq t \leq 5$ es $-2 \leq 3-t \leq 2$ y $3+t \geq 4$, y así g^* sólo es no nula en $[2, 4]$:

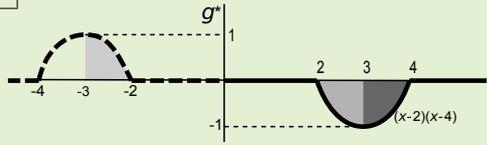
$$u(3, t) = \frac{1}{2} \int_2^4 (s^2 - 6s + 8) ds = -\frac{2}{3} \text{ [el doble de la de arriba].}$$

Gracias a la imparidad no hemos necesitado, para realizar los cálculos anteriores, conocer la expresión de g^* para $x \leq 0$, pero esta es fácil de escribir:

Para $x \in [-4, -2]$ será $g^*(x) = -(x+2)(x+4)$ y claramente es 0 en el resto.
 (cambiando x por $-x$ y el signo)

Con esta expresión se obtendría (trabajando más) el mismo resultado, por ejemplo:

a) $u(3, 6) = \frac{1}{2} \int_{-3}^9 g^* = -\frac{1}{2} \int_{-3}^{-2} (s^2 + 6s + 8) ds + \frac{1}{2} \int_2^4 (s^2 - 6s + 8) ds = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$.



Veamos cómo se debe extender si la condición de contorno $u(0, t) = 0$ de (P_3) se sustituye por la $u_x(0, t) = 0$ (describe el hecho de dejar al extremo de la cuerda subir y bajar libremente).

$$u_x(0, t) = \frac{1}{2}[f^{*\prime}(ct) + f^{*\prime}(-ct)] + \frac{1}{2c}[g^*(-ct) - g^*(ct)] = 0, \text{ } f^{*\prime} \text{ impar y } g^* \text{ par} \Rightarrow$$

se deben extender f y g **de forma par** respecto a 0. Observemos, por ejemplo, que en este caso las ondas siguen reflejándose en los extremos con $u_x = 0$, pero que no se da la inversión (las ondas que se encuentran en el extremos tienen el mismo signo).

[Anticipándonos a lo que veremos: también se extendería par en x una $F(x, t) \neq 0$, y en la cuerda finita se extendería par también respecto a $x=L$ si fuese ahí $u_x = 0$].

Siguiendo con la cuerda semi-infinita, veamos como se resuelve el problema más general con fuerzas externas y extremo móvil:

$$(P_4) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), & x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x) \\ u(0, t) = h_0(t) \end{cases} \quad [\text{debe ahora ser } f(0) = h_0(0)].$$

Primero **debemos hacer la condición de contorno homogénea**, encontrando una v que la cumpla y haciendo $w = u - v$, ya que entonces será $w(0, t) = 0$, aunque probablemente se complicarán la ecuación y el resto de condiciones.

La v más clara (no siempre la mejor) es: $v(t) = h_0(t)$.

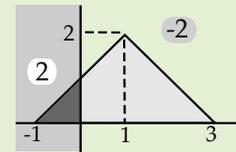
Una vez que tenemos la condición de contorno homogénea, la solución del problema en w la da [2] si sustituimos sus f, g y F por f^*, g^* y F^* , siendo ésta última la **extensión impar de F mirándola como función de x** :

$$w(x, t) = \frac{1}{2} [f^*(x+ct) + f^*(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g^*(s) ds + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c[t-\tau]}^{x+c[t-\tau]} F^*(s, \tau) ds d\tau$$

Ej 6. $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = t^2 \end{cases}$ Hallemos primero la solución para un x y t fijos: $u(1, 2)$.

Para anular la condición de contorno podemos usar la v citada:

$$w = u - t^2 \rightarrow \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = -2 \\ w(x, 0) = w_t(x, 0) = 0 \\ w(0, t) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ -2, & x > 0 \end{cases} \\ w(x, 0) = w_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$



$$w(1, 2) = \frac{1}{2} \iint_{\Delta} F^* = \frac{1}{2} [(2) \text{área } \blacktriangle + (-2) \text{área } \triangle] = -3 \rightarrow u(1, 2) = -3 + 4 = 1.$$

[Por ser constantes las F a integrar, nos hemos ahorrado el cálculo de integrales dobles. Pero como esto no se podrá hacer en general, vamos a perder un poco el tiempo en hallar $w(1, 2)$ sin este atajo. El valor que estamos calculando es:

$$w(1, 2) = \frac{1}{2} \iint_{\Delta} F^* = \frac{1}{2} \int_0^2 \int_{\tau-1}^{3-\tau} F^*(s, \tau) ds d\tau$$

Sobre el triángulo pequeño la integral viene dada por:

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\tau-1}^0 2 ds d\tau = \int_0^1 (1-\tau) d\tau = \frac{1}{2}.$$

Para el otro cuadrilátero hay que dividir en dos el recinto de integración:

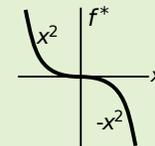
$$\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{3-\tau} (-2) ds d\tau + \frac{1}{2} \int_1^2 \int_{\tau-1}^{3-\tau} (-2) ds d\tau = \int_0^1 (\tau-3) d\tau + \int_1^2 (2\tau-4) d\tau = -\frac{7}{2}.$$

Sumando ambos resultados obtenemos $w(1, 2) = -3$ como antes].

Pero podríamos conseguir un problema sin F , haciendo el cambio con una v mejor. Tanteando un poco se ve que $v = x^2 + t^2$ cumple la condición y también la ecuación:

$$w = u - v \rightarrow \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0 \\ w(x, 0) = -x^2, & w_t(x, 0) = 0 \\ w(0, t) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0, & x, t \in \mathbf{R} \\ w(x, 0) = f^*(x) \\ w_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow w(1, 2) = \frac{1}{2} [f^*(3) + f^*(-1)] = -4 \rightarrow u(1, 2) = 5 - 4 = 1$$

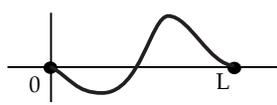


Con este segundo cambio no es difícil dar la $u(x, t)$ para todo $x, t \geq 0$ (con el primero nos costaría muchísimo más). Está claro que hay que considerar **dos posibilidades**, pues, aunque $x+t$ es siempre positivo, $x-t$ puede ser también negativo, y la f^* tiene expresiones distintas para valores positivos y negativos:

$$w = \frac{1}{2} [f^*(x+t) + f^*(x-t)] = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x+t)^2 + \frac{1}{2}(x-t)^2 = -2tx, & x \leq t \\ -\frac{1}{2}(x+t)^2 - \frac{1}{2}(x-t)^2 = -x^2 - t^2, & x \geq t \end{cases} \rightarrow u = \begin{cases} (x-t)^2, & x \leq t \\ 0, & x \geq t \end{cases}$$

[Como las ondas viajan a velocidad $c=1$ los puntos a distancia $\geq t$ debían estar parados en el instante t].

Estudiamos la **cuerda acotada** y fija en los extremos [la volveremos a ver en 4.2]:

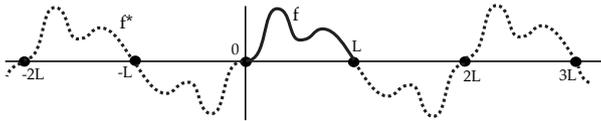


$$(P_5) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x \in [0, L], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x) \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \end{cases}$$

[debe ser $f(0) = f(L) = 0$].

Para hallar su solución única con la fórmula de D'Alembert **extendemos f y g a $[-L, L]$ de forma impar respecto a 0 y luego de forma $2L$ -periódica a todo \mathbf{R}** , es decir, llamando f^* y g^* a estas extensiones:

$$f^*(-x) = -f^*(x), f^*(x+2L) = f^*(x); \quad g^*(-x) = -g^*(x), g^*(x+2L) = g^*(x).$$



(entonces f^* y g^* también serán impares respecto a L).

Como para (P_3) , la solución de (P_5) se obtiene aplicando [3] al siguiente problema (por la imparidad de los datos se cumplen también las condiciones de contorno):

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f^*(x), & u_t(x, 0) = g^*(x) \end{cases}$$

Para que la u dada por [3] sea C^2 (regular) deben $f \in C^2[0, L]$ y $g \in C^1[0, L]$ y además: $f(0) = f(L) = f''(0) = f''(L) = g(0) = g(L) = 0$ [f' y g' existen en 0 y L por la imparidad].

Ej 7.
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in [0, 1], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1-x, & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \\ u_t(x, 0) = u(0, t) = u(1, t) = 0 \end{cases}$$
 (Puede representar la pulsación de la cuerda de una guitarra).

Es complicado hallar explícitamente $u(x, t) \forall x, t$ pues f^* tiene muchas expresiones:

$$f^*(x) = \begin{cases} \dots \\ -1-x, & -3/2 \leq x \leq -1/2 \\ x, & -1/2 \leq x \leq 1/2 \\ 1-x, & 1/2 \leq x \leq 3/2 \\ x-2, & 3/2 \leq x \leq 5/2 \\ \dots \end{cases}$$

Hallar $u(x, t) = \frac{1}{2}[f^*(x+t) + f^*(x-t)]$ exigiría discutir en qué intervalos se mueven $x+t$ y $x-t$ y sería muy largo (para estas discusiones conviene dibujar los dominios de dependencia). Algo más fácil es hallar la solución para un t o x fijos. Por ejemplo:

$$u(x, \frac{1}{4}) = \frac{1}{2}[f^*(x + \frac{1}{4}) + f^*(x - \frac{1}{4})]$$

$$= \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{1}{8} + \frac{x}{2} - \frac{1}{8} = x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} - \frac{x}{2} + \frac{x}{2} - \frac{1}{8} = \frac{1}{4}, & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ \frac{3}{8} - \frac{x}{2} + \frac{5}{8} - \frac{x}{2} = 1-x, & \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Sí es muy fácil hallar u para un (x, t) dado. No se necesita siquiera la expresión de f^* . Por ejemplo: $u(\frac{1}{4}, 3) = \frac{1}{2}[f^*(\frac{13}{4}) + f^*(-\frac{11}{4})] = \frac{1}{2}[f^*(-\frac{3}{4}) + f^*(-\frac{3}{4})] = -f(\frac{3}{4}) = -\frac{1}{4}$.
 f^* es 2-periódica f^* es impar

Tampoco se precisa la expresión de f^* para hacer dibujos: basta trasladar ondas y sumar. Dibujemos: $u(\frac{1}{2}, t) = \frac{1}{2}[f^*(\frac{1}{2}+t) + f^*(\frac{1}{2}-t)] = \frac{1}{2}[f^*(\frac{1}{2}+t) - f^*(t-\frac{1}{2})]$

La gráfica tiene periodo 2. Esto es general: por las propiedades de f^* y g^* la u dada por [3] es $\frac{2L}{c}$ -periódica. [Lo que será evidente en la serie solución de 4.2].

Si queremos resolver el problema más general:

$$(P_6) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), & x \in [0, L], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x) \\ u(0, t) = h_0(t), & u(L, t) = h_L(t) \end{cases}$$

(hay fuerzas externas y movemos los extremos)

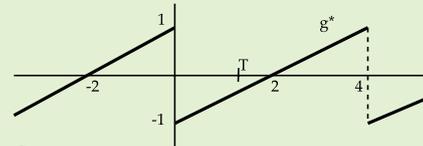
primero, como en (P₄) y otros problemas que veremos, hay que hacer las condiciones de contorno homogéneas, hallando una v que las cumpla y haciendo $w = u - v$. Tanteando con funciones $v = a(t)x + b(t)$ se ve fácilmente que una posible v es:

$$v(x, t) = \left[1 - \frac{x}{L}\right]h_0(t) + \frac{x}{L}h_L(t) \quad \text{[a veces será mejor buscar otra].}$$

La solución del problema en w la da de nuevo [2], poniendo en vez de f , g y F , las extensiones impares y $2L$ -periódicas f^* , g^* y F^* (vista F como función de x).

Ej 8. $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in [0, 2], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = t, & u(2, t) = 0 \end{cases}$ Estudiemos la evolución de la cuerda para $t \in [0, 2]$.
Primero usamos la v de arriba $v = t(1 - \frac{x}{2}) \rightarrow u = w + v$

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0, & x \in [0, 2] \\ w(x, 0) = 0, & w_t(x, 0) = \frac{x}{2} - 1 \\ w(0, t) = w(2, t) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0, & x \in \mathbf{R} \\ w(x, 0) = 0 \\ w_t(x, 0) = g^*(x) \end{cases}$$

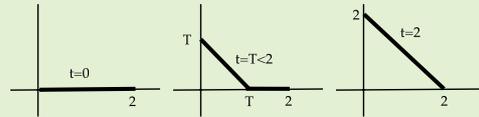


La solución del último problema es $w(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g^*(s) ds$.

Sea $T \in [0, 2]$ fijo. Como $[x-T, x+T]$ no contiene valores negativos a partir de $x = T$:

$$w(x, T) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{x-T}^0 (\frac{s}{2} + 1) ds + \frac{1}{2} \int_0^{x+T} (\frac{s}{2} - 1) ds = x(\frac{T}{2} - 1), & x \in [0, T] \\ \frac{1}{2} \int_{x-T}^{x+T} (\frac{s}{2} - 1) ds = T(\frac{x}{2} - 1), & x \in [T, 2] \end{cases}$$

$$\rightarrow u(x, T) = \begin{cases} T - x, & x \in [0, T] \\ 0, & x \in [T, 2] \end{cases}$$



La perturbación viaja a velocidad 1. La cuerda debía estar en reposo para $x \geq T$.

Acabemos la sección viendo que las **ondas** $u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$ **en el espacio con simetría radial** se reducen a cuerdas semi-infinitas. Pasando el laplaciano a esféricas (en 4.4 está su expresión) y quitando los términos con derivadas respecto a θ y ϕ se llega a:

$$(P_r) \begin{cases} u_{tt} - c^2 [u_{rr} + \frac{2}{r} u_r] = 0, & r \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(r, 0) = f(r), & u_t(r, 0) = g(r) \end{cases}$$

Haciendo el cambio $v = ur$, la ecuación pasa a ser la de la cuerda: $v_{tt} - c^2 v_{rr} = 0$. Y como u debe ser acotada, aparece la condición de contorno: $v(0, t) = 0 \cdot u(0, t) = 0$. Así pues, el problema en v es del tipo (P₃) que vimos antes:

$$\begin{cases} v_{tt} - c^2 v_{rr} = 0, & r \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ v(r, 0) = rf(r) \equiv F(r), & v_t(r, 0) = rg(r) \equiv G(r), v(0, t) = 0 \end{cases}$$

Si F^* y G^* son las extensiones impares de $F(r)$ y $G(r)$ la solución de (P_r) es:

$$u(r, t) = \frac{1}{2r} [F^*(r+ct) + F^*(r-ct)] + \frac{1}{2cr} \int_{r-ct}^{r+ct} G^*(s) ds,$$

que podemos poner en la forma $u(r, t) = \frac{1}{r} p(r+ct) + \frac{1}{r} q(r-ct)$ e interpretar como la suma de dos ondas esféricas, cuyos radios disminuyen o crecen a velocidad c . La magnitud de la perturbación propagada es inversamente proporcional al radio.

1.5. Transformadas de Fourier

Sea $f(x)$ definida en \mathbf{R} y absolutamente integrable $[\int_{-\infty}^{\infty} |f| < \infty]$.

La **transformada de Fourier** de f es la función: $\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx$.

Si f es además C^1 se puede recuperar a partir de \hat{f} usando la fórmula de inversión:

Teor 1 $f \in C^1(\mathbf{R})$ y absolutamente integrable $\Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{-ikx} dk \quad \forall x \in \mathbf{R}$.

[Algunos libros no ponen la constante $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ en la definición de \hat{f} y ponen $\frac{1}{2\pi}$ en la fórmula de inversión; también se puede ver en la primera fórmula e^{-ikx} y en la segunda e^{ikx} ; como otros resultados (algunos se probarán en problemas) no la demostramos].

Se llama a f **transformada inversa** de Fourier de \hat{f} . Vamos a denotar también $\mathcal{F}[f] = \hat{f}$ y $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}] = f$. Es evidente que \mathcal{F} y \mathcal{F}^{-1} son lineales.

Veamos otras propiedades. La \mathcal{F} hace desaparecer derivadas:

Teor 2 $f, f', f'' \in C(\mathbf{R})$ y absolutamente integrables $\Rightarrow \mathcal{F}[f'] = -ik\mathcal{F}[f]$
 $\mathcal{F}[f''] = -k^2\mathcal{F}[f]$

$\mathcal{F}[f'(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x) e^{ikx} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{ik}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx = -ik\mathcal{F}[f(x)]$,
 pues $f_{x \rightarrow \infty} = 0$ si $\int_{-\infty}^{\infty} |f|$ converge. $\mathcal{F}[f''(x)] = -ik\mathcal{F}[f'(x)] = -k^2\mathcal{F}[f(x)]$.

Estas transformadas nos aparecerán resolviendo EDPs (probamos las 2 primeras):

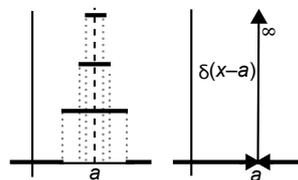
Teor 3 $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(k) e^{iak}] = f(x-a)$. Si $h(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$, $\mathcal{F}[h] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ikb} - e^{ika}}{ik}$.
 $\mathcal{F}(e^{-ax^2}) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-k^2/4a}$, $\mathcal{F}^{-1}(e^{-ak^2}) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-x^2/4a}$, $a > 0$.

$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f} e^{-ika}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{-ik(x-a)} dk = f(x-a)$. $\mathcal{F}(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ikb} - e^{ika}}{ik}$.

Teor 4 La **convolución** de f y g es la función: $(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-s) g(s) ds$.
 Se tiene $f * g = g * f$, y $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g)$, si las transformadas existen.

Hallemos la transformada de la 'función' **delta de Dirac**, cuya definición sería exige la llamada 'teoría de las distribuciones', pero que es fácil de manejar formalmente. La $\delta(x-a)$ se puede 'definir' intuitivamente como el 'límite' cuando $n \rightarrow \infty$ de

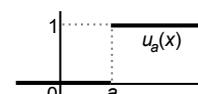
$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } x \in [a - \frac{1}{2n}, a + \frac{1}{2n}] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$



Esta $\delta(x-a)$ tiene las siguientes propiedades (que nos bastarán para trabajar con ella):

$$\delta(x-a) = 0 \text{ si } x \neq a; \int_b^c f(x) \delta(x-a) dx = \begin{cases} f(a) & \text{si } a \in [b, c] \\ 0 & \text{si } a \notin [b, c] \end{cases}, f \text{ continua; } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) dx = 1.$$

$$\delta(x-a) = \frac{d}{dx} u_a(x), \text{ donde } u_a \text{ es la función paso } u_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

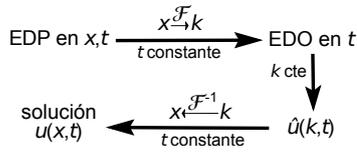


La transformada de la delta es muy fácil de hallar:

$$\mathcal{F}[\delta(x-a)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) e^{ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ika}$$

[Obsérvese que formalmente esta función de k (que no tiende a 0 en $\pm\infty$) no tiene transformada inversa, pero con la \mathcal{F} se suele ser riguroso justificando los resultados al final].

Aplicando a una EDP en dos variables la \mathcal{F} en una de ellas aparece una EDO (en la otra variable) para la \hat{u} . Resolviendo la EDO se halla \hat{u} . Identificando la u de la que proviene o con el teorema 1 se puede a veces dar explícitamente la solución, pero en muchos casos hay que dejar u en términos de integrales no calculables.



En cada uno de los pasos anteriores, hay que tener claro cuáles son las variables y cuales las constantes. En lo que sigue, haremos lo esquematizado a la izquierda, pues nuestras ecuaciones serán en (x, t) y siempre haremos transformadas en x .

Ej 1. $\begin{cases} u_t + u_x = g(x) \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$ Aplicamos la \mathcal{F} en la variable x (se supone que u, g y f son 'buenas', de modo que se pueden usar los teoremas). Utilizando la linealidad, el teorema 2 y el hecho de que:

$$\mathcal{F}[u_t] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} e^{ikx} dx = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{ikx} dx = \hat{u}_t \rightarrow \begin{cases} \hat{u}_t - ik\hat{u} = \hat{g}(k) \\ \hat{u}(k, 0) = \hat{f}(k) \end{cases}$$

Esta lineal de primer orden en t tendrá solución con una constante para cada k :

$$\hat{u}(k, t) = p(k) e^{ikt} - \frac{\hat{g}(k)}{ik}, \text{ con } p \text{ arbitraria} \xrightarrow{\text{d.i.}} \hat{u} = \hat{f}(k) e^{ikt} + \hat{g}(k) \left[\frac{e^{ikt} - 1}{ik} \right]$$

Por tanto, a la vista de las dos primeras transformadas del teorema 3, y el 4:

$$u(x, t) = f(x-t) + \sqrt{2\pi} g(x) * h(x) \text{ siendo } h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, t] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Como $\int_0^t g(x-u) du = -\int_x^{x-t} g(s) ds$, concluimos que $u = f(x-t) + \int_{x-t}^x g(s) ds$.

Obsérvese que la expresión anterior nos da la solución del problema si $f \in C^1$ y g continua, aunque no sean absolutamente integrables, que era necesario para aplicar la transformada. Esta situación es típica utilizando la \mathcal{F} .

[La solución la podemos calcular también con las técnicas del capítulo 1:

$$\frac{dt}{dx} = 1 \rightarrow \begin{cases} \xi = x-t \\ \eta = x \end{cases} \rightarrow u_\eta = g(\eta) \rightarrow u = p(x-t) + \int_0^x g(s) ds \rightarrow$$

$$p(x) + \int_0^x g(s) ds = f(x) \rightarrow u = f(x-t) - \int_0^{x-t} g(s) ds + \int_0^x g(s) ds \text{ como antes].}$$

Ej 2. $\begin{cases} u_{tt} + u_{tx} - 2u_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$ Aplicando \mathcal{F} : $\begin{cases} \hat{u}_{tt} - ik\hat{u}_t + 2k^2\hat{u} = 0 \\ \hat{u}(k, 0) = \hat{f}(k), \hat{u}_t(k, 0) = 0 \end{cases}$.

Las ecuaciones lineales con coeficientes constantes de coeficientes complejos se resuelven igual que las de reales. A través del polinomio característico:

$$\mu^2 - ik\mu + 2k^2 = 0 \rightarrow \mu = 2ik, -ik \rightarrow \hat{u}(k, t) = p(k) e^{2ikt} + q(k) e^{-ikt}$$

Imponiendo los datos iniciales: $\begin{cases} p(k) = \frac{1}{3}\hat{f}(k) \\ q(k) = \frac{2}{3}\hat{f}(k) \end{cases} \rightarrow \hat{u}(k, t) = \frac{2}{3}\hat{f}(k) e^{-ikt} + \frac{1}{3}\hat{f}(k) e^{2ikt}$.

Y como $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(k) e^{ika}] = f(x-a)$, concluimos que $u(x, t) = \frac{2}{3}f(x+t) + \frac{1}{3}f(x-2t)$.

[Solución válida $\forall f \in C^2$, tenga o no transformada].

De nuevo el ejemplo es resoluble también por los caminos descritos en el capítulo 1:

$$B^2 - 4AC = 9 \text{ hiperbólica de coeficientes constantes} \rightarrow \begin{cases} \xi = x+t \\ \eta = x-2t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \\ u_{xt} = u_{\xi\xi} - u_{\xi\eta} - 2u_{\eta\eta} \\ u_{tt} = u_{\xi\xi} - 4u_{\xi\eta} + 4u_{\eta\eta} \end{cases} \rightarrow$$

$$u_{\xi\eta} = 0 \rightarrow u = p(\xi) + q(\eta) = p(x+t) + q(x-2t), \text{ solución general.}$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = p(x) + q(x) = f(x) & q(x) = \frac{1}{3}f(x) - \frac{C}{3} \\ u_t(x, 0) = p'(x) - 2q'(x) = 0, p(x) = 2q(x) + C \uparrow & p(x) = \frac{2}{3}f(x) + \frac{C}{3} \end{cases} \rightarrow$$

$$u(x, t) = \frac{2}{3}f(x+t) + \frac{1}{3}f(x-2t)$$

Más interés que los ejemplos anteriores, ya que no conocemos ningún otro método para resolverlo, tiene el problema para el **calor en una varilla infinita**:

$$(P) \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in \mathbf{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & u \text{ acotada} \end{cases}$$

Supongamos que u y f son suficientemente regulares y que tienden a 0 en $\pm\infty$ lo suficientemente rápido como para poder utilizar los teoremas anteriores. Aplicando la \mathcal{F} en la variable x a la ecuación y al dato inicial se tiene el problema:

$$\begin{cases} \hat{u}_t + k^2 \hat{u} = 0 \\ \hat{u}(k, 0) = \hat{f}(k) \end{cases} \text{ cuya solución es } \hat{u}(k, t) = \hat{f}(k) e^{-k^2 t}$$

La solución será la convolución de las transformadas inversas de cada uno de los factores (la del segundo la vimos en el teorema 3):

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-(x-s)^2/4t} ds \equiv \int_{-\infty}^{\infty} G(x, s, t) f(s) ds \quad [1]$$

$G(x, s, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-(x-s)^2/4t}$ es la llamada **solución fundamental** de la ecuación del calor [es la temperatura del punto x en el tiempo t debida a una f inicial de la forma $\delta(x-s)$].

Una vez deducida [1], en vez de justificar los pasos que llevaron a ella, se prueba que proporciona realmente la solución de (P) con hipótesis más amplias de las que nos permiten aplicar la \mathcal{F} . En concreto, para cualquier f acotada y continua a trozos, [1] nos da la solución única acotada de (P) que es continua para $t \geq 0$ a excepción de los puntos de $t=0$ en que f es discontinua.

De [1] se deduce también que, según este modelo matemático, el calor (a diferencia de las ondas) se transmite a **velocidad infinita**: si $f > 0$ en un entorno de un x_0 y nula en el resto, es claro que $u(x, t) > 0$ por pequeño que sea t y grande que sea $|x-x_0|$. También se ve que u es C^∞ para $t > 0$ aunque f sea discontinua (aunque sea $f(x) = \delta(x-s)$!). En las ondas se conservaban los picos iniciales.

Ej 3. Apliquemos [1] para resolver un par de problemas particulares.

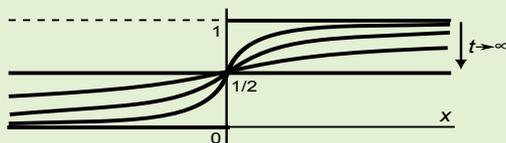
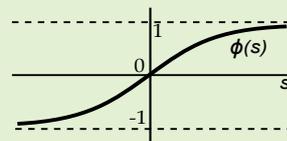
Sea primero $f(x) = u_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \rightarrow u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-(x-s)^2/4t} ds$

Haciendo $v = \frac{s-x}{2\sqrt{t}}$ en la integral: $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-v^2} dv$, que podemos poner:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{t}} e^{-v^2} dv + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-v^2} dv = \frac{1}{2} \left[1 + \phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \right], \text{ donde } \phi(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s e^{-v^2} dv$$

es la 'función error' que aparece a menudo en la teoría de las probabilidades y hemos usado la conocida integral:

$$\int_0^{\infty} e^{-v^2} dv = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} dv = \sqrt{\pi}.$$



Como se observa, la solución, suave si $t > 0$, tiende hacia $\frac{1}{2}$ para todo x cuando $t \rightarrow \infty$.

Sea ahora $f(x) = e^{-x^2}$. Completamos cuadrados y hacemos un cambio de variable:

$$u = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} e^{-\frac{(x-s)^2}{4t}} ds = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t+1}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\bullet)^2} ds \text{ con } \bullet = \frac{s\sqrt{4t+1} - x}{2\sqrt{t}}$$

$$\text{Haciendo } z = \bullet \text{ se obtiene: } u = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{4t+1}} e^{-\frac{x^2}{4t+1}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{1+4t}} e^{-\frac{x^2}{1+4t}}.$$

Pero sale mucho más corto aplicando directamente \mathcal{F} :

$$\begin{cases} \hat{u}_t = -k^2 \hat{u} \\ \hat{u}(k, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-k^2/4} \end{cases} \rightarrow \hat{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{k^2(1+4t)}{4}} \rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{1+4t}} e^{-\frac{x^2}{1+4t}}.$$

Ej 4. $\begin{cases} u_t - u_{xx} + 2tu = 0, & x \in \mathbf{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & u \text{ acotada} \end{cases}$ Hallemos la solución para una $f(x)$ general y deduzcamos la solución para $f(x) \equiv 1$.

[Como $\mathcal{F}(1)$ no existe, no se puede resolver directamente el problema con $u(x, 0) = 1$].

$$\begin{cases} \hat{u}_t + (k^2 + 2t)\hat{u} = 0 \\ \hat{u}(k, 0) = \hat{f}(k) \end{cases} \rightarrow u(\hat{k}, t) = p(k) e^{-k^2 t - t^2} \xrightarrow{d.i.} u(\hat{k}, t) = \hat{f}(k) e^{-t^2} e^{-k^2 t} \rightarrow$$

$$u(x, t) = e^{-t^2} f(x) * \mathcal{F}^{-1}(e^{-k^2 t}) = \frac{e^{-t^2}}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-(x-s)^2/4t} ds.$$

En particular, si $f(x) \equiv 1$, $u = \frac{e^{-t^2}}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-s)^2/4t} ds \underset{(s-x)/(2\sqrt{t})=u}{=} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = e^{-t^2}$.

[Parece que sería adecuado hacer un cambio de la forma $u = w e^{-t^2} \rightarrow \begin{cases} w_t - w_{xx} = 0 \\ w(x, 0) = f(x) \end{cases}$;

de [1] se deduce nuestra fórmula y $w \equiv 1$ es solución clara si $f(x) \equiv 1$ (la varilla sigue a 1^0).

La \mathcal{F} permite abordar problemas de EDPs con la **delta** de Dirac δ sin entrar en sutilezas sobre continuidades y saltos en derivadas. Resolvamos un problema (algo largo) para la cuerda infinita con una $F = \delta$ (empujamos hacia arriba en el punto central de la cuerda):

Ej 5. $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \delta(x), & x \in \mathbf{R}, t \geq 0 \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$. Aplicando la \mathcal{F} : $\begin{cases} \hat{u}_{tt} + k^2 \hat{u} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ \hat{u}(k, 0) = \hat{u}_t(k, 0) = 0 \end{cases}$.

La solución general ($\lambda = \pm ki$ y u_p a simple vista) es:

$$\hat{u}(k, t) = p(k) \cos kt + q(k) \sin kt + \frac{1}{\sqrt{2\pi k^2}} \xrightarrow{d.i.} \hat{u}(k, t) = \frac{1 - \cos kt}{\sqrt{2\pi k^2}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin \frac{kt}{2}}{k} \right]^2.$$

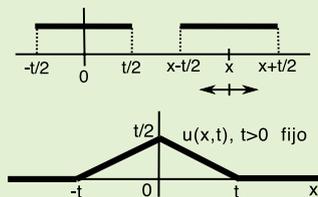
En la h del teorema 3, cuando $a = -b$ se tiene como caso particular:

$$\text{Si } h(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-b, b] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}, \mathcal{F}(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ikb} - e^{-ikb}}{ik} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\text{sen } bk}{k}.$$

La u será, por tanto, la convolución de una h de este tipo consigo misma. En concreto:

$$u = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} h(x-s) h(s) ds, \text{ donde } h(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-t/2, t/2] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Discutiendo en qué intervalos el integrando es 1 ó 0 según los valores de x se concluye:

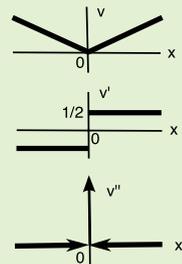


Si $x \leq -t$ ó si $x \geq t$ es $u = 0$

$$\text{Si } x \in [-t, 0], u = \frac{1}{2} \left[x + \frac{t}{2} - \left(-\frac{t}{2}\right) \right] = \frac{1}{2} [x + t]$$

$$\text{Si } x \in [0, t], u = \frac{1}{2} \left[\frac{t}{2} - (x - \frac{t}{2}) \right] = \frac{1}{2} [t - x]$$

$$\text{Es decir, } u(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{si } |x| \geq t \\ \frac{1}{2} [t - |x|], & \text{si } |x| \leq t \end{cases}$$



Para hacerlo sin transformadas, lo más corto es hacer la ecuación homogénea con un cambio de variable.

Como $v = \frac{1}{2}|x|$ satisface $v'' = \delta(x)$, con $w = u + v$ se obtiene:

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0 \\ w(x, 0) = |x|/2, w_t(x, 0) = 0 \end{cases} \rightarrow u = \frac{1}{4} [|x+t| + |x-t|] - \frac{1}{2} |x|.$$

Discutiendo los valores absolutos se llega a la solución de antes.

En todos los ejemplos anteriores podíamos dar la transformada inversa (cosa no habitual). Hacemos uno, con la δ , en el sólo sabemos hallar la solución para $x=0$:

Ej 6. $\begin{cases} u_t - u_{xx} = \delta(x), & x \in \mathbf{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = 0 \end{cases}$. $\begin{cases} \hat{u}_t + k^2 \hat{u} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ \hat{u}(k, 0) = 0 \end{cases}$, $\hat{u} = \frac{1 - e^{-k^2 t}}{k^2 \sqrt{2\pi}}$ [no identificable con la transformada de ninguna función conocida].

Debemos acudir al teorema 1: $u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-k^2 t}}{k^2} e^{-ikx} dk$, difícil en general, pero:

$$u(0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-k^2 t}}{k^2} dk = -\frac{1 - e^{-k^2 t}}{2\pi k} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{t}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2 t} dk = \frac{\sqrt{t}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds = \sqrt{\frac{t}{\pi}}.$$

Para evitar la δ : $w = u + \frac{|x|}{2} \rightarrow \begin{cases} w_t - w_{xx} = 0 \\ w(x, 0) = \frac{|x|}{2} \end{cases} \rightarrow w = \frac{1}{4\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} |s| e^{-(x-s)^2/4t} ds$

$$w(0, t) = \frac{1}{4\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} |s| e^{-s^2/4t} ds = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} s e^{-s^2/4t} ds = -\sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-s^2/4t} \Big|_0^{\infty} = \sqrt{\frac{t}{\pi}}.$$

2. Soluciones de EDOs en forma de serie

En el estudio de las EDOs lineales se comprueba que hay escasas formas de resolver elementalmente la ecuación con coeficientes variables

$$[e] \quad y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

Este capítulo trata una forma general de atacarla: **suponer la solución desarrollada en serie de potencias e introducir esta serie en la ecuación para determinar sus coeficientes.**

En la sección 2.1 recordaremos la definición de función **analítica** (función descrita por una serie de potencias convergente) y algunas manipulaciones matemáticas que se pueden hacer con ellas. **Si a y b son analíticas en x_0** (punto **regular**) siempre se podrán encontrar dos soluciones linealmente independientes de [e] en forma de serie de potencias por el siguiente camino: llevando la serie a la ecuación conseguiremos expresar sus coeficientes c_k en función de los dos primeros c_0 y c_1 , que serán las dos constantes arbitrarias que deben aparecer en la solución de cualquier EDO de segundo orden (algunas veces podremos dar la expresión general del c_k , pero otras nos limitaremos a ir calculando coeficiente a coeficiente). Un teorema, que aceptaremos sin demostración, asegurará que las series solución convergen al menos en el intervalo en que las series de a y b lo hacían. Imponer datos iniciales en x_0 será inmediato, pues tendremos que $y(x_0) = c_0$ y $y'(x_0) = c_1$.

Empezaremos la sección 2.2 resolviendo elementalmente (con el cambio $x = e^s$ se convertirá en una de coeficientes constantes) la ecuación de Euler:

$$[u] \quad x^2 y'' + axy' + by = 0, \quad a, b \in \mathbf{R}$$

Pasaremos luego a resolver utilizando series la ecuación más general:

$$[e^*] \quad x^2 y'' + x a^*(x)y' + b^*(x)y = 0$$

Si a^* y b^* son analíticas en $x=0$ diremos que este punto es **singular regular** (otros puntos x_0 se llevan al origen haciendo $s = x - x_0$). La forma de resolver [e*] es sólo algo más complicada (es el **método de Frobenius**). Calcularemos primero una solución y_1 que será siempre de la forma $x^r \sum$ (siendo r una de las raíces del llamado **polinomio indicial**) y a continuación otra y_2 , linealmente independiente de la anterior, que unas veces (según sea la diferencia entre las raíces de ese polinomio) será del mismo tipo y otras contendrá además un término incluyendo el $\ln x$, que ya aparecía en las de Euler. Un teorema no demostrado garantizará la convergencia de las series que vayamos hallando.

El cálculo de los coeficientes de las series es sencillo (aunque algo pesado). El problema básico es la dificultad de obtener información sobre las soluciones que se encuentran (muchas veces ni tendremos su término general). Pero ecuaciones del tipo [e] o [e*] aparecen resolviendo EDPs y las series son el único instrumento para abordarlas. Por eso hay libros enteros (los de funciones especiales de la física) dedicados a estudiar las propiedades de las series solución de algunas de estas ecuaciones (las de Legendre, Hermite, Bessel, Laguerre, Tchebycheff, ...). Una pequeña muestra de tales estudios son las propiedades de las soluciones de las ecuaciones de **Legendre**, **Hermite** y **Bessel** citadas en la sección 2.3.

Las soluciones por serie en torno a cualquier punto (salvo que sean identificables con una función elemental) no dan ninguna información sobre el comportamiento de las soluciones cuando $x \rightarrow \infty$. En la sección 2.4, para estudiar para grandes valores de x las soluciones, introduciremos el llamado **punto del infinito** de una ecuación, punto $s=0$ de la ecuación que se obtiene haciendo $x=1/s$ en la inicial.

2.1 Funciones analíticas y puntos regulares

Recordemos que una función real $f(x)$ es **analítica** en $x = x_0$ si viene dada por una **serie de potencias** cerca de x_0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-x_0)^k = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \dots$$

A partir de ahora, $x=0$ (si no, con $x-x_0=s$ estaríamos en ese caso): $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$.

A cada serie de potencias está asociado un **radio de convergencia** R tal que:

Si $R=0$, la serie sólo converge en $x=0$. Si $R=\infty$, converge para todo x .

Si $0 < R < \infty$, converge si $|x| < R$ y diverge si $|x| > R$ (en $x = \pm R$ no sabemos).

Además, si $0 < x_0 < R$, la serie converge uniformemente en $[-x_0, x_0]$.

El R se puede calcular en muchas ocasiones aplicando el criterio del **cociente**:

Sea $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ y $p = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$. Entonces si $p < 1$ la \sum converge, y si $p > 1$ diverge.

Propiedad básica de las series de potencias es que, para $|x| < R$ (si $R > 0$), **se pueden derivar e integrar término a término**:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} = c_1 + 2c_2 x + \dots, \\ f''(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} = 2c_2 + 6c_3 x + \dots, \dots \quad (\Rightarrow f^{(k)}(0) = k! c_k) \\ \int \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k &= C + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1} = C + c_0 x + \frac{c_1}{2} x^2 + \dots \quad \text{si } |x| < R \end{aligned}$$

También pueden sumarse, multiplicarse, ... estas series como si fuesen polinomios:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \text{si } |x| < R_f \quad \text{y} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \quad \text{si } |x| < R_g \Rightarrow \text{Si } |x| < \min\{R_f, R_g\},$$

$$f(x)+g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} [a_k+b_k] x^k, \quad f(x)g(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \dots$$

[También f/g es analítica si tiene límite en $x=0$ (así lo son $\frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$, $\frac{\text{sen } x}{x}$, ...); en el siguiente ejemplo ya veremos como hacer desarrollos de cocientes].

Caso importante de estas series son las de **Taylor**:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}}{k!} x^k, \quad \text{para } f \text{ con infinitas derivadas en } 0.$$

La mayoría de las funciones elementales coinciden con su serie de Taylor (y por tanto son analíticas) en todo el intervalo de convergencia de la serie. Por ejemplo:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \text{sen } x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \text{cos } x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!},$$

$$\text{sh } x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \text{ch } x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad \ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}, \quad \arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1},$$

$$[1+x]^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots, \quad \text{si } |x| < 1.$$

Aunque f sea $C^\infty(\mathbf{R})$ y su serie de Taylor converja $\forall x$ puede que ambas no coincidan, como le ocurre a $f(x) = e^{-1/x^2}$, $f(0) = 0$ (que cumple $f^{(k)}(0) = 0 \forall k$, con lo que su serie de Taylor es $\sum 0 \cdot x^k = 0$ y, por tanto, f no es analítica). Para que una f lo sea, es necesario que tenga infinitas derivadas en el punto, pero no es suficiente.

Ej 1. Hallemos de varias formas (algunas nada naturales) el desarrollo de $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$.

$$f(x) = -\frac{d}{dx} \frac{1}{1+x} \rightarrow \frac{1}{(1+x)^2} = -\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = -\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1) x^k \text{ si } |x| < 1.$$

Otra forma:

$$(1+x)^{-2} = 1 - 2x + \frac{-2(-2-1)}{2!} x^2 + \frac{-2(-2-1)(-2-2)}{3!} x^3 + \dots = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots, |x| < 1.$$

Multiplicando: $f(x) = [1 - x + x^2 - \dots][1 - x + x^2 - \dots]$

$$= [1 + (-1-1)x + (1+1+1)x^2 + \dots] = 1 - 2x + 3x^2 - \dots \text{ si } |x| < 1.$$

También podemos 'dividir': buscar una serie $\sum c_k x^k$ tal que

$$[c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots][x^2 + 2x + 1] = 1 \Rightarrow$$

$$c_0 = 1; 2c_0 + c_1 = 0 \rightarrow c_1 = -2c_0 = -2; c_0 + 2c_1 + c_2 = 0 \rightarrow c_2 = -c_0 - 2c_1 = 3; \dots$$

[El radio R del desarrollo de un cociente P/Q, con P y Q polinomios, simplificados los factores comunes, y Q(0) ≠ 0 es la distancia al origen de la raíz (real o compleja) de Q más próxima].

Y con un caso sencillo de 'composición' de series:

$$\frac{1}{1+(2x+x^2)} = 1 - (2x+x^2) + (2x+x^2)^2 - (2x+x^2)^3 + \dots = 1 - 2x + (-1+4)x^2 + \dots$$

Pasemos ya a resolver ecuaciones diferenciales ordinarias por medio de series. En esta sección no dedicaremos a los **puntos regulares**. Sea la ecuación:

$$[e] \quad y'' + a(x)y' + b(x)y = 0.$$

Se dice que $x=x_0$ es un **punto regular de [e]** si a y b son analíticas en $x=x_0$. En caso contrario se dice que $x=x_0$ es **punto singular** de [e].

Sea $x=0$ regular. Se podrán, pues, escribir a y b como series de potencias para $|x| < R$ (mínimo de los radios de a y b). Y es esperable que las soluciones de [e] también se puedan escribir como una serie de potencias para $|x| < R$. Empecemos con un ejemplo:

Ej 2. $(1+x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$, es decir, $y'' + \frac{2x}{1+x^2}y' - \frac{2}{1+x^2}y = 0$,

$a(x)$ y $b(x)$ analíticas en $x=0$ (regular) con $R=1$ ($x=\pm i$ ceros del denominador).

Llevemos una solución en forma de serie arbitraria y sus derivadas a la ecuación inicial (mejor que a la otra, pues deberíamos desarrollar a y b) y hallemos sus coeficientes:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad y' = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}, \quad y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} \rightarrow$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} [k(k-1)c_k x^{k-2} + k(k-1)c_k x^k] + \sum_{k=1}^{\infty} 2k c_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} 2c_k x^k = 0$$

[Se podría poner $k=0$ en las tres series, pues se anularía el primer término en la de $k=1$ y los dos primeros en la de $k=2$, pero así es clara la potencia con la que empieza cada una].

La solución de esta lineal de segundo orden deberá contener dos constantes arbitrarias. Vamos a **intentar escribir los c_k en función de los dos primeros c_0 y c_1** . Como han de ser 0 los coeficientes de cada potencia de x , deducimos:

$$x^0: 2 \cdot 1 \cdot c_2 - 2 \cdot c_0 = 0 \rightarrow c_2 = c_0$$

$$x^1: 3 \cdot 2 \cdot c_3 + [2-2]c_1 = 0 \rightarrow c_3 = 0$$

.....

$$x^k: (k+2)(k+1)c_{k+2} + [k(k-1) + 2k - 2]c_k = 0$$

[Hemos escrito aparte los primeros términos porque cada serie empieza a aportar términos para distintos k ; como potencia general hemos tomado x^k porque era la más repetida, pero también podríamos haber escogido x^{k-2}].

De la última igualdad deducimos la **regla de recurrencia** que expresa un coeficiente en función de los anteriores ya conocidos (en este ejemplo, queda c_{k+2} en función sólo de c_k , pero en otros pueden aparecer varios); para facilitar los cálculos, **factorizamos los polinomios que aparecen** calculando sus raíces:

$$c_{k+2} = -\frac{(k+2)(k-1)}{(k+2)(k+1)} c_k = -\frac{k-1}{k+1} c_k, \quad k=0, 1, \dots$$

Si preferimos tener el c_k en términos de los anteriores, basta cambiar k por $k-2$:

$$c_k = -\frac{k-3}{k-1} c_{k-2}, \quad k=2, 3, \dots$$

A partir de la regla de recurrencia escribimos algunos c_k más (siempre en función de c_0 o c_1) con el objetivo de encontrar la expresión del **término general** de la serie (en muchos ejemplos esto no será posible, pero aquí sí):

$$c_4 = -\frac{1}{3}c_2 = -\frac{1}{3}c_0, \quad c_6 = -\frac{3}{5}c_4 = \frac{1}{5}c_0, \quad c_8 = -\frac{5}{7}c_6 = -\frac{1}{7}c_0, \dots$$

$c_5=0$ por estar en función de c_3 que se anulaba. Análogamente $c_7=c_9=\dots=0$.

Por si no está aún clara la expresión de los c_{2k} , usamos la recurrencia 'desde arriba':

$$c_k = -\frac{k-3}{k-1} c_{k-2} = \frac{k-3}{k-1} \frac{k-5}{k-3} c_{k-4} = \frac{k-5}{k-1} c_{k-4} = -\frac{k-7}{k-1} c_{k-6} = \dots$$

El numerador de c_{2k} es 1, el denominador es $2k-1$ y el signo va alternando, así que:

$$c_{2k} = (-1)^{k+1} \frac{1}{2k-1} c_0, \quad k=2, 3, \dots$$

Agrupamos los términos que acompañan a c_0 y c_1 (que quedan indeterminados) y obtenemos por fin:

$$y = c_0 \left[1 + x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{5}x^6 + \dots \right] + c_1 x = c_0 \left[1 + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k}}{2k-1} \right] + c_1 x = c_0 y_1 + c_1 y_2$$

Expresión con la estructura clásica de las soluciones de las lineales de segundo orden. Pero para que lo sea de verdad, las series deben converger en un entorno de $x=0$, y además y_1 y y_2 han de ser linealmente independientes. Esto es lo que sucede. La serie de y_1 (lo prueba el criterio del cociente) converge si $|x| < 1$ y la 'serie' de y_2 (truncada a partir de su segundo término) converge $\forall x$. Y además el wronskiano de ambas soluciones en $x=0$ es 1 (pues $y_1(0)=1, y_1'(0)=0, y_2(0)=0, y_2'(0)=1$).

Si, en vez de la solución general, la que queremos es la que cumple $y(0)=y_0, y'(0)=y'_0$ (existe y es única por ser a y b analíticas en $x=0$), dada la forma de las series de y_1 y y_2 , es inmediato que debe tomarse $c_0=y_0, c_1=y'_0$.

La ecuación se podía haber resuelto sin series. Bataba advertir que $y_2=x$ era una solución y hallar la y_1 mediante la fórmula que se estudia en los cursos de EDOs:

$$y_1 = y_2 \int y_2^{-2} e^{-\int a} dx = x \int x^{-2} e^{-\int \frac{2x}{1+x^2}} dx = x \int \frac{dx}{x^2(1+x^2)} = -1 - x \arctan x$$

[su desarrollo, salvo el signo, coincide con el obtenido anteriormente].

Gran parte de lo visto en este ejemplo ocurre en general, como asegura el siguiente teorema que no demostraremos.

Teor Si $x=0$ regular y R es el menor de los radios de convergencia de las series de a y b , la solución general de [e] $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ es

$$y = c_0 y_1 + c_1 y_2 = c_0 \left[1 + \sum \right] + c_1 \left[x + \sum \right],$$

con c_0, c_1 arbitrarios, y las series, que contienen potencias x^k con $k \geq 2$, convergen, al menos, si $|x| < R$. Los coeficientes las series se determinan de forma única probando una serie de potencias arbitraria en la ecuación (con las funciones $a(x)$ y $b(x)$ desarrolladas) y expresando sus coeficientes c_k , para $k \geq 2$, en función de c_0 y c_1 . La solución única de [e] con $y(0)=y_0, y'(0)=y'_0$ se obtiene simplemente tomando $c_0=y_0, c_1=y'_0$.

[El desarrollo de a y b , desde luego, será innecesario si esas funciones son polinomios].

Para estudiar las soluciones de [e] cerca de otro x_0 regular, el **cambio de variable** $s = x - x_0$ (que no afecta a las derivadas por ser $ds/dx = 1$) lleva a una ecuación en la variable s para la que $s=0$ es regular. Probaríamos entonces para hallar su solución la serie:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k \quad \left[\text{es decir, } y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k \right].$$

Ej 3. $y'' + (x-2)y = 0$, $y(0)=2$, $y'(0)=1$

$x=0$ regular puesto que $a(x)=0$ y $b(x)=x-2$ son analíticas en todo \mathbf{R} .

El primer ejemplo era demasiado sencillo. En general, y como en este, las cosas son más complicadas. Llevando una serie arbitraria y sus derivadas a la ecuación e igualando a 0 los coeficientes de cada x^k :

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} [c_k x^{k+1} - 2c_k x^k] = 0 \rightarrow$$

$$x^0: 2 \cdot 1 \cdot c_2 - 2 \cdot c_0 = 0 \rightarrow c_2 = c_0; \quad x^1: 3 \cdot 2 \cdot c_3 + c_0 - 2 \cdot c_1 = 0 \rightarrow c_3 = -c_0 + c_1; \dots$$

$$x^{k-2}: k(k-1)c_k + c_{k-3} - 2c_{k-2} = 0 \rightarrow c_k = -\frac{1}{k(k-1)}c_{k-3} + \frac{2}{k(k-1)}c_{k-2}, \quad k=3, 4, \dots$$

(regla de recurrencia de tres términos que suele traer muchos más problemas que las de dos). Escribimos un par de términos más en función de c_0 y c_1 :

$$c_4 = -\frac{1}{12}c_1 + \frac{2}{12}c_2 = \frac{1}{6}c_0 - \frac{1}{12}c_1; \quad c_5 = -\frac{1}{20}c_2 + \frac{2}{20}c_3 = -\frac{1}{15}c_0 + \frac{1}{30}c_1$$

No hay forma de encontrar la expresión del término general, aunque paso a paso podemos ir calculando el número de términos que queramos.

La solución general es entonces:

$$y = c_0 \left[1 + x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + \dots \right] + c_1 \left[x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{30}x^5 + \dots \right]$$

Y la particular pedida: $y = 2 + x + 2x^2 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{10}x^5 + \dots$, convergente $\forall x$ según el teorema.

Para calcular unos pocos términos (pero no para hallar muchos o para buscar la expresión del término general) de una serie solución cerca de un punto regular (en los singulares regulares no se podrá hacer) se puede seguir el siguiente camino:

Haciendo $x=0$ en la ecuación: $y''(0) + (0-2)y(0) = 0 \rightarrow y''(0) = 4$

Derivando la ecuación y volviendo a hacer $x=0$:

$$y''' + (x-2)y' + y = 0 \rightarrow y'''(0) = 2y'(0) - y(0) = 0$$

Derivando otra vez: $y'''' + (x-2)y'' + 2y' = 0 \rightarrow y''''(0) = 2y''(0) - 2y'(0) = 6, \dots$

Y de estas derivadas deducimos la expresión de la serie solución:

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2}x^2 + \frac{y'''(0)}{6}x^3 + \dots = 2 + x + \frac{4}{2}x^2 + \frac{0}{6}x^3 + \frac{6}{24}x^4 + \dots$$

Si los datos iniciales fueran $y(2)=6$, $y'(2)=0$, la solución general de antes, dada por series en $x=0$, no sirve para imponer los datos. Se debe resolver en torno a este punto:

$s=x-2 \rightarrow y'' + sy = 0$ (esta derivada es respecto a s , pero la seguimos llamando igual).

$$s=0 \text{ regular} \rightarrow y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k \rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k s^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^{k+1} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow s^0: 2c_2 = 0; \quad s^1: 6c_3 + c_0 = 0, \quad c_3 = -c_0; \quad \dots;$$

$$s^{k-2}: k(k-1)c_k + c_{k-3} = 0 \rightarrow c_k = -\frac{1}{k(k-1)}c_{k-3}; \quad k=3, 4, \dots \rightarrow$$

$$c_5 = c_8 = \dots = 0; \quad c_4 = -\frac{1}{4 \cdot 3}c_1; \quad c_6 = -\frac{1}{6 \cdot 5}c_3 = \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}c_0; \quad c_7 = -\frac{1}{7 \cdot 6}c_4 = \frac{1}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}c_1 \rightarrow$$

$$y = c_0 \left[1 - \frac{1}{6}s^3 + \frac{1}{180}s^6 + \dots \right] + c_1 \left[s - \frac{1}{12}s^4 + \frac{1}{504}s^7 + \dots \right] \xrightarrow{\text{datos}}$$

$$y = 6 - s^3 + \frac{1}{30}s^6 + \dots = 6 - (x-2)^3 + \frac{1}{30}(x-2)^6 + \dots$$

(Aquí sí podemos expresar el término general, aunque no nos queda tan compacto como en el ejemplo 1:

$$y = c_0 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (x-2)^{3k}}{2 \cdot 5 \dots (3k-1) \cdot 3 \cdot 6 \dots (3k)} \right] + c_1 \left[x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (x-2)^{3k+1}}{3 \cdot 6 \dots (3k) \cdot 4 \cdot 7 \dots (3k+1)} \right].$$

2.2 Ecuación de Euler y puntos singulares regulares

Empecemos la sección tratando una EDO lineal de segundo orden con **coeficientes variables**, que es resoluble por métodos elementales.

Ecuaciones de Euler: [u] $x^2y'' + axy' + by = h(x)$, $x > 0$.

Haciendo el cambio de variable independiente $x = e^s$: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{ds}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2} \left[\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds} \right]$,

[u] se convierte en la siguiente ecuación lineal con coeficientes constantes:

$$\frac{d^2y}{ds^2} + (a-1)\frac{dy}{ds} + by = h(e^s), \text{ de ecuación característica}$$

$$Q(\mu) \equiv \mu(\mu-1) + a\mu + b = 0.$$

Conocemos las soluciones de la ecuación homogénea para la segunda ecuación. Deshaciendo el cambio ($s = \ln x$), tenemos que la solución general de una ecuación de Euler **homogénea** es:

Si $\mu_1 \neq \mu_2$ reales, $y = c_1x^{\mu_1} + c_2x^{\mu_2}$
Si μ doble (real), $y = (c_1 + c_2 \ln x)x^\mu$
Si $\mu = p \pm qi$, $y = [c_1 \cos(q \ln x) + c_2 \sin(q \ln x)]x^p$

(observemos que la 'ecuación característica' de una ecuación de Euler sería la que obtendríamos probando en la homogénea soluciones de la forma x^μ).

Ej 1. $2xy'' + y' = 0$, o sea $x^2y'' + \frac{1}{2}xy' = 0$ de 'ecuación característica' $\mu(\mu-1) + \frac{1}{2}\mu = 0$.

Como $\mu = \frac{1}{2}, 0$, su solución general es $y = c_1x^{1/2} + c_2$ (para $x \geq 0$).

[Una solución válida también para $x \leq 0$ sería $y = c_1|x|^{1/2} + c_2$].

[También se podría resolver haciendo $y' = v$: $v' = -\frac{v}{2x} \rightarrow v = Cx^{-1/2}$, $y = Cx^{1/2} + K$].

Para hallar la solución particular de la no homogénea dispondremos siempre de la **fórmula de variación de las constantes con $f(x) = h(x)/x^2$** (y para la ecuación de coeficientes constantes en s del método de **coeficientes indeterminados** de las lineales con coeficientes constantes, **si $h(e^s)$ es del tipo adecuado**).

Ej 2. Hallemos la solución general de $x^2y'' + xy' - y = 2x$. $\mu(\mu-1) + \mu - 1 = 0$, $\mu = \pm 1 \rightarrow$

la homogénea tiene por solución general $x_h = c_1x + c_2x^{-1}$ (válida en este caso $\forall x \neq 0$).

$$|W|(x) = \begin{vmatrix} x & x^{-1} \\ 1 & -x^{-2} \end{vmatrix} = -2x^{-1}, f(x) = \frac{2}{x} \rightarrow y_p = x^{-1} \int \frac{x \cdot 2x^{-1} dx}{-2x^{-1}} - x \int \frac{x^{-1} \cdot 2x^{-1} dx}{-2x^{-1}} = x \ln x - \frac{x}{2} \rightarrow$$

la solución general de la no homogénea es $y = c_1x + \frac{c_2}{x} + x \ln x$ (metiendo el $-\frac{1}{2}$ en c_1).

La y_p se puede hallar utilizando coeficientes indeterminados en la ecuación $y'' - y = e^s$ a la que conduce el cambio $x = e^s$. La y_p que debemos probar en la ecuación en s es $y_p = Ase^s$, o lo que es lo mismo, podemos probar $y_p = Ax \ln x$ en la de Euler inicial:

$$y'_p = A[\ln x + 1], y''_p = \frac{A}{x} \rightarrow Ax + Ax = 2x \rightarrow A = 1 \text{ como antes.}$$

Volvamos a las soluciones por medio de series. Supondremos en esta sección que para [e] $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ es $x = x_0$ un **punto singular**, es decir, que a o b o ambas no son analíticas en $x = x_0$, con lo que no es aplicable el método de la sección anterior. Sin embargo, interesa precisamente a menudo conocer la forma de las soluciones de [e] en las cercanías de sus puntos singulares. Sólo sabremos decir algo sobre ellas para un tipo particular de puntos sólo débilmente singulares: los **singulares regulares** que definiremos a continuación.

Suponemos a partir de ahora que $x=0$ es **punto singular** de [e]. Si quisiéramos estudiar las soluciones cerca de otro $x_0 \neq 0$ singular, el cambio $s=x-x_0$ traslada el problema al estudio de las soluciones cerca de 0 de la ecuación en s .

Conviene escribir [e] de otra forma. Multiplicando por x^2 y llamando $a^*(x)=xa(x)$ y $b^*(x)=x^2b(x)$ obtenemos:

$$[e^*] \quad x^2y'' + xa^*(x)y' + b^*(x)y = 0$$

$x=0$ es punto **singular regular** de [e]-[e*] si a^* y b^* son analíticas en $x=0$.

Ej 3. $x(x-1)^2y'' - xy' + (x-1)y = 0$, es decir, $y'' - \frac{1}{(x-1)^2}y' + \frac{1}{x(x-1)}y = 0$.

$x=0$ y $x=1$ son puntos singulares de la ecuación (todos los demás son regulares).

Como para [e*] $x^2y'' - x\frac{x}{(x-1)^2}y' + \frac{x}{x-1}y = 0$ son $a^*(x) = -\frac{x}{(x-1)^2}$ y $b^*(x) = \frac{x}{x-1}$ analíticas en $x=0$, este punto es singular regular.

Con $x-1=s$ obtenemos: $s^2(s+1)y'' - (s+1)y' + sy = 0$, es decir, $s^2y'' - s\frac{1}{s}y' + \frac{s}{s+1}y = 0$

Como $-\frac{1}{s}$ no es analítica en 0 (aunque $\frac{s}{s+1}$ lo sea), $x=1$ ($s=0$) es singular no regular.

[En torno a $x=1$ no sabremos resolver la ecuación por series (la teoría es complicada)].

Queremos resolver [e*] cerca de $x=0$ suponiendo que a^* y b^* son analíticas en ese punto, es decir, que admiten desarrollo en serie válido en $|x| < R$ (mínimo de los radios de convergencia):

$$a^*(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^* x^k = a_0^* + a_1^* x + \dots, \quad b^*(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^* x^k = b_0^* + b_1^* x + \dots, \quad |x| < R.$$

[Normalmente será $a_0^* = a^*(0)$ y $b_0^* = b^*(0)$ salvo para funciones como $\frac{\text{sen } x}{x}$].

[e*] se resolverá con el **método de Frobenius**, que detallaremos en el teorema de esta sección. No lo probaremos, pero intentemos hacer creíbles sus hipótesis y conclusiones. La ecuación más sencilla del tipo [e*] es la de Euler (en ella $a^*(x)$ y $b^*(x)$ son 'series' que se reducen a su primer término). Viendo sus soluciones está claro que no hay, en general, soluciones analíticas de [e*]. Pero ya que hay soluciones de Euler de la forma x^r se podría pensar que [e*] posee soluciones en forma de serie que comiencen por términos x^r .

Probemos por tanto en [e*] la solución $y = x^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 x^r + c_1 x^{r+1} + c_2 x^{r+2} + \dots \rightarrow$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+r)(k+r-1)c_k x^{k+r} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k^* x^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+r)c_k x^{k+r} \right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k^* x^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+r} \right) = 0$$

El coeficiente de la potencia de menor orden (x^r) debe anularse: $[r(r-1) + a_0^* r + b_0^*]c_0 = 0$.

Si la serie ha de empezar por términos x^r , debe ser $c_0 \neq 0$. Por tanto, los únicos r para los que pueden existir soluciones no triviales de la forma $x^r \sum$ son las raíces del polinomio:

$$Q(r) \equiv r(r-1) + a_0^* r + b_0^*, \quad \text{llamado } \mathbf{polinomio\ indicial} \text{ de [e*]}.$$

Esto es coherente con las ecuaciones de Euler. Para ellas, si $Q(r)$ tenía dos raíces distintas r_1 y r_2 , dos soluciones independientes de la ecuación eran x^{r_1} y x^{r_2} . Si la raíz era doble sólo existía una solución de esa forma, y la segunda era la primera multiplicada por el $\ln x$; por tanto, también es de esperar que en la solución general de [e*] aparezcan logaritmos.

Pero al resolver por series [e*] pueden aparecer problemas que no se presentan en el caso particular de las de Euler. Igualando a 0 el coeficiente que acompaña a x^{r+k} tenemos:

$$[(r+k)(r+k-1) + (r+k)a_0^* + b_0^*]c_k + [(r+k-1)a_1^* + b_1^*]c_{k-1} + \dots = 0$$

donde los puntos representan los términos con c_{k-2} , c_{k-3} , ... De esta expresión podemos despejar el c_k en función de los anteriores ya calculados siempre que el corchete que le acompaña, que es $Q(r+k)$, no se anule. Si r_1 es la mayor de las dos raíces $Q(r_1+k) \neq 0 \forall k$. Pero si r_2 es la menor, y $r_1 - r_2$ es un entero positivo n , el $Q(r_2+k) = 0$ si $k=n$, y, salvo que los demás sumandos también se anulen (con lo que c_n quedaría indeterminado), no hay forma de anular el coeficiente de x^{r_2+n} y no pueden existir soluciones $x^{r_2} \sum$.

Enunciamos ya el **teorema de Frobenius** (aunque se podría considerar el caso de raíces complejas del \mathbb{Q} , nos limitamos, por sencillez, a los casos reales):

Supongamos que el polinomio indicial $Q(r) = r(r-1) + a_0^*r + b_0^*$ tiene raíces reales r_1, r_2 con $r_1 \geq r_2$. Entonces:

Siempre hay una solución de [e*] de la forma $y_1 = x^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, c_0 \neq 0$.

La otra solución y_2 linealmente independiente es, según los casos:

Teor

a] Si $r_1 - r_2$ no es cero ni entero positivo: $y_2 = x^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k, b_0 \neq 0$.

b] Si $r_1 = r_2$, $y_2 = x^{r_1+1} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k + y_1 \ln x$.

c] Si $r_1 - r_2 = 1, 2, 3, \dots$, $y_2 = x^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k + d y_1 \ln x, b_0 \neq 0, d \in \mathbb{R}$.

Todas las soluciones están definidas al menos para $0 < x < R$ y los coeficientes c_k, b_k y la constante d se pueden determinar sustituyendo cada una de las soluciones en la ecuación.

Se comprueba sin dificultad que a partir de las soluciones anteriores obtenemos otras válidas en $-R < x < 0$ sin más que sustituir $\ln x$ por $\ln |x|$ y las expresiones de la forma x^r que preceden a las series por $|x|^r$. En el caso **c]** la constante d puede ser perfectamente 0 (como ocurre en las ecuaciones de Euler), con lo que, a pesar de todo, hay dos soluciones independientes de la forma $x^r \sum$.

Ej 4. $2xy'' + y' + xy = 0$, o sea, $x^2y'' + x\frac{1}{2}y' + \frac{x^2}{2}y = 0 \rightarrow a^*(x) = \frac{1}{2}, b^*(x) = \frac{x^2}{2}$.

$a^*(x)$ y $b^*(x)$ analíticas ($R = \infty$) $\Rightarrow x=0$ singular regular. Como $a_0^* = \frac{1}{2}$ y $b_0^* = 0$, el polinomio indicial es $r(r-1) + \frac{1}{2}r + 0 = r(r - \frac{1}{2}) \rightarrow r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = 0$, con $r_1 - r_2 \notin \mathbb{N}$.

Las dos series solución linealmente independientes (una analítica y la otra no) son, pues:

$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1/2}, c_0 \neq 0, y_2 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k, b_0 \neq 0$ (convergen $\forall x \in \mathbb{R}$, según el teorema).

Llevando y_1 a la ecuación (estas series se derivan como las de potencias habituales):

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2(k + \frac{1}{2})(k - \frac{1}{2})c_k x^{k-1/2} + \sum_{k=0}^{\infty} (k + \frac{1}{2})c_k x^{k-1/2} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+3/2} = 0$$

(ahora las 3 series empiezan por $k=0$ pues no se van los primeros términos al derivar).

Igualando a 0 los coeficientes de las diferentes potencias de x :

$x^{-1/2}$: $[2(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}]c_0 = 0 \cdot c_0 = 0$ y c_0 queda indeterminado como debía.

$x^{1/2}$: $[2(\frac{3}{2})(\frac{1}{2}) + \frac{3}{2}]c_1 = 0 \rightarrow c_1 = 0$,

$x^{k-1/2}$: $[2(k + \frac{1}{2})(k - \frac{1}{2}) + (k + \frac{1}{2})]c_k + c_{k-2} = 0 \rightarrow c_k = -\frac{1}{k(2k+1)}c_{k-2}, k=2, 3, \dots$

Por tanto: $c_3 = c_5 = \dots = 0, c_2 = -\frac{1}{2 \cdot 5}c_0, c_4 = -\frac{1}{4 \cdot 9}c_2 = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 9}c_0, \dots \rightarrow$

$$y_1 = x^{1/2} \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2 \cdot 4 \dots 2m \cdot 5 \cdot 9 \dots (4m+1)} x^{2m} \right] \text{ (eligiendo, por ejemplo, } c_0 = 1 \text{)}.$$

Para la otra raíz del $Q(r)$: $\sum_{k=0}^{\infty} 2k(k-1)b_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} k b_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{k+1} = 0 \rightarrow$

x^0 : $b_1 = 0, x^1$: $[4+2]b_2 + b_0 = 0 \rightarrow b_2 = -\frac{1}{6}b_0$.

x^{k-1} : $[2k(k-1) + k]b_k + b_{k-2} = 0 \rightarrow b_k = -\frac{1}{k(2k-1)}b_{k-2}, k=2, 3, \dots \rightarrow$

$b_3 = b_5 = \dots = 0, b_4 = -\frac{1}{4 \cdot 7}b_2 = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 7}b_0, \dots \rightarrow y_2 = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2 \cdot 4 \dots 2m \cdot 3 \cdot 7 \dots (4m-1)} x^{2m}$

El criterio del cociente prueba que, como debían, las series convergen $\forall x$.

La y_2 vale $\forall x$, pero y_1 sólo para $x > 0$ (en $x=0$ no es derivable).

Una y_1 válida $\forall x \neq 0$ es $y_1 = |x|^{1/2} [1 + \sum]$.

Ej 5. $x^2 y'' + (\frac{1}{4} - 4x^2)y = 0$ Hallemos algunos términos de sus series solución.

$\alpha^*(x) = 0$, $b^*(x) = \frac{1}{4} - 4x^2$ son analíticas con $R = \infty$. Es $x = 0$ singular regular con $r^2 - r + \frac{1}{4} = 0$, $r = \frac{1}{2}$ doble $\rightarrow y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1/2} \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} [k^2 c_k x^{k+1/2} - 4c_k x^{k+5/2}] = 0 \rightarrow$

$$x^{1/2}: 0 \cdot c_0 = 0, c_0 \text{ cualquiera}; x^{3/2}: c_1 = 0;$$

$$x^{k+1/2}: k^2 c_k - 4c_{k-2} = 0; c_k = \frac{4}{k^2} c_{k-2} \text{ regla de recurrencia}$$

$$\rightarrow c_3 = c_5 = \dots = 0, c_2 = c_0, c_4 = \frac{4}{16} c_2 = \frac{1}{4} c_0, c_6 = \frac{1}{9} c_4 = \frac{1}{36} c_0, \dots,$$

$$y_1 = x^{1/2} [1 + x^2 + \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{36} x^6 + \dots] \rightarrow y_1' = \frac{1}{2} x^{-1/2} + \frac{5}{2} x^{3/2} + \frac{9}{8} x^{7/2} + \dots$$

Como es raíz doble, seguro que la otra solución contiene un logaritmo:

$$y_2 = x^{3/2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k + y_1 \ln x \rightarrow y_2' = \sum_{k=0}^{\infty} (k + \frac{3}{2}) b_k x^{k+1/2} + \frac{1}{x} y_1 + y_1' \ln x,$$

$$y_2'' = \sum_{k=0}^{\infty} (k + \frac{3}{2})(k + \frac{1}{2}) b_k x^{k-1/2} - \frac{1}{x^2} y_1 + \frac{2}{x} y_1' + y_1'' \ln x \rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k+1)^2 b_k x^{k+3/2} - 4b_k x^{k+7/2}] - y_1 + 2xy_1' + \ln x [x^2 y_1'' + (\frac{1}{4} - 4x^2)y_1] = 0.$$

El último $[\dots] = 0$ por ser y_1 solución (**lo que acompaña a $\ln x$ siempre se anula**).

Operamos como siempre, utilizando los desarrollos de y_1 e y_1' dados arriba:

$$\rightarrow x^{3/2}: b_0 = 0; x^{5/2}: 4b_1 + 4 = 0, b_1 = -1; x^{7/2}: 9b_2 - 4b_0 = 0, b_2 = 0;$$

$$x^{9/2}: 16b_3 - 4b_1 + 2 = 0, b_3 = -\frac{3}{8}; \dots \rightarrow y_2 = -x^{5/2} - \frac{3}{8} x^{9/2} + \dots + y_1 \ln x.$$

[Observemos que, desde que hallamos las raíces del polinomio inicial, sabíamos ya mucho sobre sus soluciones. Por ejemplo, que ninguna (salvo la trivial) era analítica. O que todas las soluciones tienden a 0 cuando $x \rightarrow 0^+$, pues recordemos que $x^a \ln x \rightarrow 0$, si $a > 0$].

Como se ha visto en el ejemplo anterior, son más largas las cuentas para el cálculo de la y_2 en el caso **b**] del teorema que en el **a**]. Y también son más complicadas las del **c**], caso al que pertenecen los dos siguientes ejemplos. Para distinguir en este caso si aparecen logaritmos o no (es decir, si es o no $d \neq 0$) no es necesario hallar la expresión del término general, bastan con los primeros términos de la y_1 .

Ej 6. $xy'' + 2e^x y' = 0$. Se puede resolver sin utilizar series, pero acudamos a Frobenius:

$x = 0$ es singular regular [$\alpha^*(x) = 2e^x$ y $b^*(x) \equiv 0$ analíticas en todo \mathbf{R}]. $r_1 = 0$, $r_2 = -1$.

La $y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ se ve (¡a ojo!) que es $y_1 \equiv 1$. La otra es: $y_2 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{k-1} + d \ln x \rightarrow$

$$y_2' = \sum_{k=0}^{\infty} (k-1) b_k x^{k-2} + \frac{d}{x}, y_2'' = \sum_{k=0}^{\infty} (k-1)(k-2) b_k x^{k-3} - \frac{d}{x^2} \rightarrow$$

$$2b_0 x^{-2} + 2b_3 x + \dots - dx^{-1} + [2 + 2x + x^2 + \frac{1}{3} x^3 + \dots] [dx^{-1} - b_0 x^{-2} + b_2 + 2b_3 x + \dots] = 0 \rightarrow$$

$$x^{-2}: 2b_0 - 2b_0 = 0 \rightarrow b_0 \text{ indeterminado como debía.}$$

$$x^{-1}: -d + 2d - 2b_0 = 0 \rightarrow d = 2b_0 \text{ (aparecen, pues, logaritmos).}$$

$$x^0: 2d - b_0 + 2b_2 = 0 \rightarrow b_2 = \frac{1}{2} b_0 - d = -\frac{3}{2} b_0.$$

$$x^1: 2b_3 + d - \frac{1}{3} b_0 + 2b_2 + 4b_3 = 0 \rightarrow b_3 = \frac{2}{9} b_0.$$

.....

$$\rightarrow y_2 = 2 \ln x + \frac{1}{x} - \frac{3}{2} x + \frac{2}{9} x^2 + \dots$$

[No podemos, desde luego, dar el término general de esta solución].

Resolvamos la ecuación ahora sin series: $y' = v \rightarrow v' = -\frac{2e^x}{x} v \rightarrow$

$$v = C e^{-\int 2x^{-1} e^x dx} = C e^{\int (-2/x - 2 - x - x^2/3 + \dots) dx} = C x^{-2} e^{-2x - x^2/2 - x^3/9 + \dots} =$$

$$= C x^{-2} [1 + (-2x - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{9} x^3 - \dots) + \frac{1}{2} (-2x - \frac{1}{2} x^2 - \dots)^2 + \frac{1}{6} (-2x - \dots)^3 + \dots] \rightarrow$$

$$y = K + C \int [x^{-2} - 2x^{-1} + \frac{3}{2} - \frac{4}{9} x + \dots] dx = K - C [2 \ln x + \frac{1}{x} - \frac{3}{2} x + \frac{2}{9} x^2 + \dots].$$

Ej 7. $x^2y'' + 2x^2y' - 2y = 0$ $x=0$ singular regular; $a^*(x)=2x$, $b^*(x)=-2$ con $R=\infty$.

El polinomio indicial $r(r-1)+0r-2$ tiene por raíces $r_1=2$ y $r_2=-1$. Así pues:

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+2}, c_0 \neq 0 \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)c_k x^{k+2} + \sum_{k=0}^{\infty} 2(k+2)c_k x^{k+3} - \sum_{k=0}^{\infty} 2c_k x^{k+2} = 0$$

$$\rightarrow c_0 \text{ indeterminado, } c_k = -\frac{2(k+1)}{k(k+3)}c_{k-1}, k=1, 2, \dots$$

$$\rightarrow c_1 = -c_0, c_2 = \frac{3}{5}c_0, c_3 = -\frac{4}{15}c_0, \dots,$$

$$c_k = (-1)^k \frac{2(k+1)}{k(k+3)} \frac{2k}{(k-1)(k+2)} \frac{2(k-1)}{(k-2)(k+1)} \dots c_0 = \frac{(-2)^k (k+1)}{(k+3)!} 6c_0$$

$$\text{Por tanto, eligiendo } c_0 = \frac{1}{6}, y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k (k+1)}{(k+3)!} x^{k+2} \rightarrow y_1' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k (k+1)(k+2)}{(k+3)!} x^{k+1}$$

La segunda solución (caso **c**) del teorema) es

$$y_2 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{k-1} + dy_1 \ln x, b_0 \neq 0, d \text{ constante (quizás nula)} \rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k-1)(k-2)b_k x^{k-1} + 2(k-1)b_k x^k - 2b_k x^{k-1}] + d[(-1+2x)y_1 + 2xy_1'] + d \ln x [x^2y_1'' + 2x^2y_1' - 2y_1] = 0$$

Como siempre, el tercer corchete se anula, por ser y_1 solución. Sustituyendo las series de y_1 y y_1' escritas arriba en el segundo corchete y agrupando potencias de x :

$$-2b_0 - 2b_1 - 2b_2x + [2b_3 + 2b_2 - 2b_3 - \frac{d}{6} + \frac{2d}{3}]x^2 + \dots = 0 \rightarrow$$

$$b_1 = -b_0, b_2 = 0, d = 0; b_0, b_3 \text{ indeterminados.}$$

Como $d=0$, en la expresión de y_2 no aparece el $\ln x$. Sabíamos que debía ser $b_0 \neq 0$. El hecho de que también b_3 quede indeterminado se debe a que proporciona potencias x^2 , comienzo de la serie de y_1 . Elegimos $b_0 = 1$ y $b_3 = 0$ (para no volver a calcular y_1). Como en la regla de recurrencia cada b_k depende de b_{k-1} es $b_4 = b_5 = \dots = 0$.

Concluimos que: $y_2 = \frac{1}{x}(1-x) = \frac{1}{x} - 1$ [es fácil comprobar que satisface la ecuación].

[De la solución y_2 sacaríamos otra con: $y_1^* = \frac{1-x}{x} \int \frac{x^2 e^{-2x}}{(1-x)^2} dx$. La primitiva no parece calculable, pero esto no impide desarrollar e integrar para obtener una serie solución:

Lo más corto para desarrollar el integrando (se podría hacer un cociente) es:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} \rightarrow x^2 [1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \dots] [1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots] = x^2 + x^4 + \frac{2}{3}x^5 + \dots$$

$$\rightarrow y_1^* = [\frac{1}{x} - 1] [\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{9}x^6 + \dots] = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^4 - \frac{4}{45}x^5 + \dots$$

Aunque no lo pareciese, la primitiva sí se puede hallar: $u = x^2 e^{-2x}$, $dv = \frac{1}{(1-x)^2} \rightarrow$

$$\int \frac{x^2 e^{-2x}}{(1-x)^2} dx = \frac{x^2 e^{-2x}}{1-x} - \int 2x e^{-2x} dx = \frac{1}{2} \frac{1+x}{1-x} e^{-2x} \rightarrow y_1^* = (1 + \frac{1}{x}) e^{-2x}.$$

y_1 no es exactamente ni y_1^* ni y_1' (es $3y_1^*$ y una combinación lineal de y_2 e y_1').

[En este ejemplo, si, en vez de partir de la raíz mayor de la ecuación indicial, hubiésemos sustituido la y_2 , habríamos obtenido las dos series de un tirón; pero esto ocurriría porque casualmente resulta ser $d=0$; si fuera $d \neq 0$ sólo obtendríamos la solución trivial $y=0$ y deberíamos empezar de nuevo desde el principio].

2.3 Ecuaciones de Legendre, Hermite y Bessel

La ecuación de **Legendre** es [L] $(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0$, $p \geq 0$.

Resolvemos primero en torno a $x=0$ que es regular. Como $a(x) = -2x/(1-x^2)$ y $b(x) = p(p+1)/(1-x^2)$ son analíticas en $|x| < 1$ la ecuación tiene series solución que convergen al menos en ese intervalo. Probamos pues:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} [k(k-1)c_k x^{k-2} - k(k-1)c_k x^k] - \sum_{k=1}^{\infty} 2k c_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} p(p+1)c_k x^k = 0 \rightarrow$$

$$c_k = -\frac{(p-k+2)(p+k-1)}{k(k-1)} c_{k-2}, \quad k=2, 3, \dots \rightarrow c_2 = -\frac{p(p+1)}{2 \cdot 1} c_0,$$

$$c_3 = -\frac{(p-1)(p+2)}{3 \cdot 2} c_1, \quad c_4 = \frac{p(p-2)(p+1)(p+3)}{4!} c_0, \quad c_5 = \frac{(p-1)(p-3)(p+2)(p+4)}{5!} c_1, \dots \rightarrow$$

$$y_1 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^n \frac{p(p-2) \dots (p-2n+2)(p+1)(p+3) \dots (p+2n-1)}{(2n)!} x^{2n}$$

$$y_2 = x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(p-1)(p-3) \dots (p-2n+1)(p+2)(p+4) \dots (p+2n)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Si p es un entero par positivo, $p=2m$, y_1 se reduce a un polinomio de grado $2m$:

$$p=0 \rightarrow y_1=1, \quad p=2 \rightarrow y_1=1-3x^2, \quad p=4 \rightarrow y_1=1-10x^2+\frac{35}{3}x^4, \dots$$

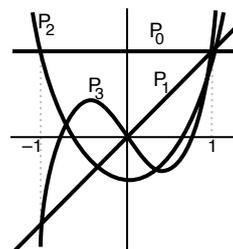
Si p impar, $p=2m+1$, es y_2 quien se convierte en un polinomio de grado $2m+1$:

$$p=1 \rightarrow y_2=x, \quad p=3 \rightarrow y_2=x-\frac{5}{3}x^3, \quad p=5 \rightarrow y_2=x-\frac{14}{3}x^3+\frac{21}{5}x^5, \dots$$

Se llama **polinomio de Legendre de grado n** al polinomio P_n solución de [L] con $p=n \in \mathbf{N}$, $P_n(1)=1$, es decir:

$$P_0=1, \quad P_1=x, \quad P_2=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}, \quad P_3=\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x,$$

$$P_4=\frac{35}{8}x^4-\frac{15}{4}x^2+\frac{3}{8}, \quad P_5=\frac{63}{8}x^5-\frac{35}{4}x^3+\frac{15}{8}x, \dots$$



Los P_{2m} tienen simetría par y los P_{2m+1} impar. P_{2m+1} y P'_{2m} se anulan en 0. Se pueden probar además las propiedades:

P_n tiene n ceros reales, todos en $(-1, 1)$. $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$ fórmula de **Rodrigues**

Los P_n son **ortogonales**: $\int_{-1}^1 P_n P_m dx = 0$, si $m \neq n$; $\int_{-1}^1 P_n^2 dx = \frac{2}{2n+1}$.

Los P_n son las únicas soluciones de [L] **acotadas a la vez en $x=1$ y $x=-1$** .

Para intentar comprobar lo último resolvemos en torno a $x=1$, haciendo $s=x-1$:

$$[L_1] s(s+2)y'' + 2(s+1)y' - p(p+1)y = 0, \quad a^*(s) = \frac{2(s+1)}{s+2}, \quad b^*(s) = -\frac{p(p+1)s}{s+2} \quad \text{analíticas para } |s| < 2$$

$s=0$ es singular regular, y es $r=0$ doble $\forall p$. Por tanto sus soluciones son:

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k \quad \text{y} \quad y_2 = |s| \sum_{k=0}^{\infty} b_k s^k + y_1 \ln |s|, \quad c_0=1$$

y las series convergen al menos si $|s| < 2$. Sin hallar ningún coeficiente podemos ya afirmar que y_1 está acotada $\forall p$ en $s=0$ ($x=1$), mientras que y_2 no lo está ($\rightarrow -\infty$ si $s \rightarrow 0$).

Calculemos y_1 y comprobemos que si $p=n$ obtenemos los P_n [pues $y_1(1)=1$]. Debe ser:

$$\sum_{k=2}^{\infty} [k(k-1)c_k s^k + 2k(k-1)c_k s^{k-1}] + \sum_{k=1}^{\infty} [2k c_k s^k + 2k c_k s^{k-1}] - \sum_{k=0}^{\infty} p(p+1)c_k s^k = 0$$

$$\rightarrow c_k = \frac{(p+1)p-k(k-1)}{2k^2} c_{k-1}, \quad k=1, 2, \dots \rightarrow y_1(s) = 1 + \frac{(p+1)p}{2} s + \frac{(p+1)p[(p+1)p-2]}{16} s^2 + \dots$$

Si $p=n$ la regla de recurrencia nos dice que c_{n+1} y lo siguientes se anulan. En particular:

$$p=0 \rightarrow y_1=1; \quad p=1 \rightarrow y_1=1+s=x; \quad p=2 \rightarrow y_1=1+3s+\frac{6[6-2]}{16}s^2 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}; \dots$$

Faltaría probar (es difícil) que si $p \neq n$ la y_1 no está acotada cuando $s \rightarrow -2$ ($x \rightarrow -1$) para comprobar que no hay más soluciones de [L] acotadas en $x=\pm 1$ que los P_n .

Otra ecuación ligada a problemas físicos es la de **Hermite**: [H] $y'' - 2xy' + 2py = 0$.

Tiene solución analítica ($x=0$ regular), convergente en todo **R**. Resolvemos:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} - \sum_{k=1}^{\infty} 2kc_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} 2pc_k x^k = 0 \rightarrow c_k = 2 \frac{k-2-p}{k(k-1)} c_{k-2}, k=2, 3, \dots$$

$$\rightarrow y = c_1 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{(-p)(2-p)\dots(2n-2-p)}{(2n)!} x^{2n} \right] + c_2 \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{(1-p)(3-p)\dots(2n-1-p)}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right]$$

Como para Legendre, [H] posee solución polinómica cuando $p=n \in \mathbb{N}$. Si $p=2m$, la primera solución y_1 pasa a ser un polinomio de grado $2m$, y si $p=2m+1$ es la otra y_2 la que se convierte en un polinomio de ese mismo grado:

$$p=0 \rightarrow y_1=1; p=1 \rightarrow y_2=x; p=2 \rightarrow y_1=1-2x^2; p=3 \rightarrow y_2=x-\frac{2}{3}x^3; \dots$$

Los **polinomios de Hermite** $H_n(x)$ son las soluciones polinómicas de [H] tales que los términos con potencias más altas de x son de la forma $2^n x^n$, es decir:

$$H_0=1; H_1=2x; H_2=4x^2-2; H_3=8x^3-12x; \dots$$

Citemos, también sin prueba, algunas propiedades de los H_n que serán útiles, por ejemplo, cuando aparezcan en física cuántica. Una forma de generarlos todos es:

$$e^{2xs-s^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x) s^n \quad (\text{a esa exponencial se le llama **función generatriz** de los } H_n).$$

[Nos limitamos a comprobarlo para los 4 que ya hemos calculado:

$$(1+2xs+2x^2s^2+\frac{4x^3}{3}s^3+\dots)(1-s^2+\frac{1}{2}s^4-\dots) = 1+2xs+(2x^2-1)s^2+(\frac{4x^3}{3}-2x)s^3+\dots]$$

De la función generatriz sale otra fórmula de **Rodrigues**: $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$.

$$[\text{Pues } H_n(x) = \frac{\partial e^{2xs-s^2}}{\partial s^n} \Big|_{s=0} = e^{x^2} \frac{\partial e^{-(x-s)^2}}{\partial s^n} \Big|_{s=0} = (x-s=z, \frac{\partial}{\partial s} = -\frac{\partial}{\partial z}) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2} \Big|_{z=x}].$$

En cuántica no aparece [H], sino $u'' + (2p+1-x^2)u=0$. Haciendo $u=ye^{-x^2/2}$ en ella se llega a [H]. Se prueba (no es fácil hacerlo), que las **únicas soluciones u de la inicial que $\rightarrow 0$ si $|x| \rightarrow \infty$** son las de la forma $u_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x)$, llamadas **funciones de Hermite** de orden n . Sólo estas u_n interesan físicamente.

Como los P_n , se puede ver que también las u_n son **ortogonales**, ahora en $(-\infty, \infty)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_n u_m dx = \int_{-\infty}^{\infty} H_n H_m e^{-x^2} dx = 0, \text{ si } m \neq n; \int_{-\infty}^{\infty} u_n^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} H_n^2 e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

[Lo comprobamos exclusivamente cuando $n=0, 1$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_0 u_1 = \int_{-\infty}^{\infty} 2xe^{-x^2} = 0, \int_{-\infty}^{\infty} u_0^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}, \int_{-\infty}^{\infty} u_1^2 = \int_{-\infty}^{\infty} -2xe^{-x^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} 2e^{-x^2} = 2\sqrt{\pi}].$$

Para expresar en forma compacta las soluciones de la última ecuación de interés físico que vamos a tratar (la de Bessel) utilizaremos las propiedades de la **función gamma** (función que generaliza el factorial para números no enteros) definida por la siguiente integral impropia convergente:

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \text{ si } s > 0,$$

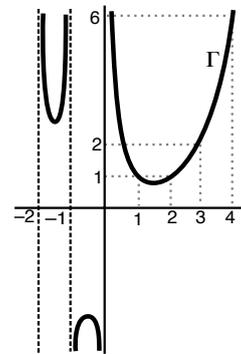
y extendida a $s < 0$ mediante:

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+n)}{(s+n-1)\dots(s+1)s} \text{ si } -n < s < -n+1, n \in \mathbb{N}.$$

Se cumplen para la Γ las siguientes igualdades:

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1; \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}; \Gamma(s+1) = -e^{-x} x^s \Big|_0^{\infty} + s\Gamma(s) = s\Gamma(s)$$

$$\rightarrow \Gamma(s+n) = (s+n-1)\dots(s+1)s\Gamma(s) \rightarrow \Gamma(n+1) = n!, n \in \mathbb{N}$$



La ecuación de **Bessel** es: [B] $x^2 y'' + xy' + [x^2 - \rho^2]y = 0$, $\rho \geq 0$.

$x=0$ es singular regular con polinomio indicial $r^2 - \rho^2$, $r_1 = \rho$, $r_2 = -\rho$. Entonces

$$y_1 = x^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad x > 0, \quad (\text{acotada en } x=0 \forall \rho)$$

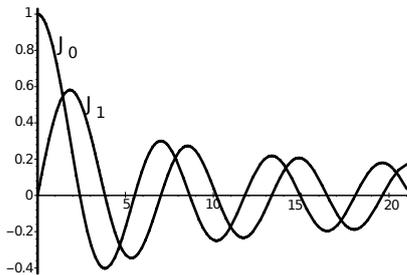
es una solución definida por una serie que converge en todo \mathbf{R} . Llevándola a [B]:

$$\sum_{k=0}^{\infty} [k(2\rho+k)c_k x^{\rho+k} + c_k x^{\rho+k+2}] = 0; \quad c_k = -\frac{c_{k-2}}{k(2\rho+k)}, \quad k=2, 3, \dots; \quad c_1 = 0 \rightarrow c_3 = \dots = 0$$

$$c_2 = -\frac{c_0}{2^2(\rho+1)}; \quad c_4 = \frac{c_0}{2^4 2(\rho+1)(\rho+2)}; \dots \rightarrow y_1 = c_0 x^\rho \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m} m! (\rho+1) \dots (\rho+m)} \right]$$

Eligiendo $c_0 = \frac{1}{2^\rho \Gamma(\rho+1)} \rightarrow J_\rho(x) \equiv \left[\frac{x}{2} \right]^\rho \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(\rho+m+1)} \left[\frac{x}{2} \right]^{2m}$ **[función de Bessel de primera especie y orden ρ]**

En particular son: $J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left[\frac{x}{2} \right]^{2m}$, $J_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+1)!} \left[\frac{x}{2} \right]^{2m+1}$,



cuyas gráficas son las de la izquierda. Se prueba que, al igual que J_0 y J_1 , todas las J_ρ son oscilatorias y que para x grande se parecen a:

$$J_\rho \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left[x - (2\rho+1) \frac{\pi}{4} \right]$$

Cada J_ρ tiene un infinitos ceros en $(0, \infty)$ [que deben conocerse para resolver algunas EDPs]:

los de J_0 son: 2.4048, 5.5201, 8.6532, ... ;
los de J_1 : 3.8317, 7.0156, 10.1735,

Para hallar una solución linealmente independiente (no acotada seguro en $x=0$), Frobenius nos dice que si $r_1 - r_2 = 2\rho \neq 0, 1, \dots$ la y_2 es de la forma:

$$y_2 = x^{-\rho} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k, \quad x > 0 \quad (\text{llevándola a [B] se tiene } J_{-\rho}(x) \equiv \left[\frac{x}{2} \right]^{-\rho} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(\rho+m+1)} \left[\frac{x}{2} \right]^{2m}).$$

Si $\rho \notin \mathbf{N}$, pero $2\rho \in \mathbf{N}$ ($\rho = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$), podría y_2 contener un $\ln x$ pero no es así (caso **c**) de Frobenius con $d=0$. De hecho, haciendo $\rho = \frac{1}{2}$ en $J_{\pm\rho}$ se tiene:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{x}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{2^{2m+1} m! (m+\frac{1}{2}) \dots \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2})} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \quad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \dots = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x,$$

que son linealmente independientes (la expresión asintótica es exacta para $\rho = \frac{1}{2}$).

Como será $J_{\rho+1} = \frac{2\rho}{x} J_\rho - J_{\rho-1}$, todas las $J_{\frac{2n+1}{2}}$, $n \in \mathbf{Z}$, son funciones elementales.

Para $\rho = n \in \mathbf{N}$ el atajo anterior no sirve, pues cambiando n por $-n$ la J_{-n} que aparece no es independiente de J_n [es $J_{-n} = (-1)^n J_n$]. Tendríamos que hallar las y_2 de Frobenius (y obtendríamos un $\ln x$ en su larga expresión). Por ejemplo, para $\rho=0$ (que seguro contiene logaritmos) se acaba obteniendo:

$$y_2(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(m!)^2} \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} \right] \left[\frac{x}{2} \right]^{2m} + J_0(x) \ln x \equiv K_0(x), \quad x > 0$$

[función de Bessel de segunda especie y orden 0]

Pero en muchos problemas físicos en los que surge la ecuación [B] es necesario que las soluciones estén acotadas, y para ellos no servirá de nada el conocimiento de estas complicadas segundas soluciones.

Lo que sí será útil en el futuro será conocer estas propiedades de las derivadas:

$$\frac{d}{dx} [x^\rho J_\rho(x)] = x^\rho J_{\rho-1}(x), \quad \frac{d}{dx} [x^{-\rho} J_\rho(x)] = -x^{-\rho} J_{\rho+1}(x) \quad (\text{En particular, } [xJ_1]' = J_0, [J_0]' = -J_1).$$

(Son inmediatas: $\frac{d}{dx} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+2\rho}}{2^{2m+\rho} m! \Gamma(\rho+m+1)} = x^\rho \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+2\rho-1}}{2^{2m+\rho-1} m! \Gamma(\rho+m+1)}$ y similar la otra).

Derivándolas y despejando J'_ρ : $J'_\rho = J_{\rho-1} - \frac{\rho}{x} J_\rho = -J_{\rho+1} + \frac{\rho}{x} J_\rho \Rightarrow J_{\rho+1} = \frac{2\rho}{x} J_\rho - J_{\rho-1}$,

relación de recurrencia citada, que expresa cada $J_{\rho+1}$ en función de las anteriores.

2.4 El punto del infinito

Nos preocupamos por el comportamiento de las soluciones de una lineal de segundo orden para grandes valores de x . Pocas ecuaciones son resolubles elementalmente. Por otra parte, las soluciones en forma de serie (salvo que se puedan identificar con funciones elementales) no dan ninguna información para grandes x , incluso aunque converjan $\forall x$. Si queremos ver qué sucede cuando $x \rightarrow \infty$, la idea natural es efectuar el **cambio de variable** $x = 1/s$ y estudiar el comportamiento de las soluciones de la nueva ecuación cuando $s \rightarrow 0^+$, que será fácil de precisar si $s = 0$, llamado **punto del infinito** de la ecuación inicial, es punto regular o singular regular de esta ecuación.

A diferencia del cambio $s = x - x_0$ que no modifica las derivadas, hacer $x = 1/s$ exige usar la regla de la cadena. Denotando las derivadas respecto a s con puntos:

$$x = \frac{1}{s} \rightarrow y' = \dot{y} \frac{ds}{dx} = -\frac{1}{x^2} \dot{y}; \quad y'' = \frac{1}{x^4} \ddot{y} + \frac{2}{x^3} \dot{y} \rightarrow \boxed{y' = -s^2 \dot{y}, \quad y'' = s^4 \ddot{y} + 2s^3 \dot{y}}$$

Ej 1. $\boxed{(1+x^2)y'' + xy' - y = 0}$. Estudiemos su comportamiento para grandes x :

$$t = \frac{1}{s} \rightarrow (1 + \frac{1}{s^2})s^4 \ddot{y} + (1 + \frac{1}{s^2})2s^3 \dot{y} - \frac{s^2}{s} \dot{y} - y = s^2(1+s^2)\ddot{y} + s(1+2s^2)\dot{y} - y = 0.$$

Para esta ecuación $s=0$ es singular regular, con $r = \pm 1$. Sus soluciones para $s > 0$ son:

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^{k+1} = c_0 s + c_1 s^2 + \dots, \quad c_0 \neq 0; \quad y_2 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k s^{k-1} + d y_1 \ln s, \quad b_0 \neq 0.$$

Si $s \rightarrow 0^+$, la solución $y_1 \rightarrow 0$, mientras que la $y_2 \rightarrow \infty$ (si $b_0 > 0$, sea $d=0$ ó $d \neq 0$), con lo que deducimos, sin necesidad de resolver nada, que hay soluciones de la ecuación inicial que, cuando $x \rightarrow \infty$, tienden a 0, mientras que otras tienden a ∞ .

Como la ecuación es resoluble elementalmente pues $y_1 = x$ es solución que salta a la vista, podemos en este caso concreto hallar su solución general y comprobar:

$$y_2 = x \int x^{-2} e^{-\int a dx} dx = x \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}} = -\sqrt{1+x^2} \rightarrow y = c_1 x + c_2 \sqrt{1+x^2}.$$

Hay soluciones que claramente $\rightarrow \infty$ y las de la forma $C(x - \sqrt{1+x^2}) = \frac{-C}{x + \sqrt{1+x^2}} \rightarrow 0$.

De paso observemos que $y_1 = x = \frac{1}{s}$ es la y_2 que obtendríamos arriba (es $d=0$).

Para Hermite y Bessel este camino parece adecuado para estudiar sus soluciones para x gordo, pero por desgracia, se comprueba que $s=0$ en ambos casos es singular no regular. Aunque para **Legendre** lo interesante físicamente es lo que sucede en $[-1, 1]$, vamos a analizar su punto del infinito. En 2.3 obtuvimos sus series solución en torno a $x=0$ [que hablan sólo de lo que ocurre en $|x| < 1$] y en torno a $x=1$ [hablan de $x \in (-1, 3)$].

$$[L] (1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0 \xrightarrow{x=1/s} [L_{\infty}] s^2(s^2-1)\ddot{y} + 2s^3\dot{y} + p(p+1)y = 0.$$

Para $[L_{\infty}]$ es $s=0$ singular regular, con $a^*(s) = 2s^2/(s^2-1)$, $b^*(s) = p(p+1)/(s^2-1)$ analíticas en $|s| < 1$. Las series solución de $[L_{\infty}]$ convergerán al menos en ese intervalo y de ellas podremos extraer información, por tanto, sobre las soluciones de $[L]$ para $|x| > 1$. Como el polinomio indicial de $[L_{\infty}]$ tiene por raíces $1+p$ y $-p$ y como para todo $p \geq 0$ es $r_1 = 1+p > 0$ deducimos, por ejemplo, que siempre hay soluciones de $[L]$ que tienden a 0 si $x \rightarrow \infty$.

$$[\text{Pues } y_1(s) = s^{1+p} \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k \rightarrow 0 \text{ si } s \rightarrow 0^+; \text{ o sea, } y_1(x) = x^{-(1+p)} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{-k} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0].$$

Resolvamos por series $[L_{\infty}]$ si $p=0$ (único p para el que $s=0$ es regular): $y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k \rightarrow$

$$c_k = \frac{k-2}{k} c_{k-2}, \quad k=2, 3, \dots \rightarrow y = c_0 + c_1 [s + \frac{1}{3}s^3 + \frac{1}{5}s^5 + \dots] = c_0 + c_1 [x^{-1} + \frac{1}{3}x^{-3} + \frac{1}{5}x^{-5} + \dots],$$

serie (no de potencias) que describe las soluciones para $|x| > 1$, que es donde converge.

De otro modo: $(1-x^2)y'' + 2xy' = 0 \rightarrow y' = \frac{c_1}{1-x^2} \rightarrow y = c_0 + c_1 \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| = c_0 + c_1 \ln \left| \frac{1+s}{1-s} \right|$, $x, s \neq \pm 1$.

3. Problemas de contorno para EDOs

Un problema de valores iniciales para una ecuación ordinaria con coeficientes continuos tenía solución única. En concreto, la solución de una ecuación lineal de segundo orden queda determinada fijando el valor de la solución y de su derivada en un punto dado. Las cosas cambian si imponemos las condiciones en los dos extremos de un intervalo $[a, b]$. Estos **problemas de contorno** presentan propiedades muy diferentes. Por ejemplo, un problema tan sencillo y regular como

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = 0 \\ y(0) = 0, y(\pi) = 0 \end{cases}$$

tiene infinitas soluciones: $y = C \sin x$, con C constante arbitraria.

Los problemas de contorno que nos aparecerán al utilizar el método de **separación de variables** del capítulo 3 dependerán de un parámetro λ . Para analizar sus propiedades convendrá escribir la ecuación de la siguiente forma:

$$(P) \begin{cases} (py')' - qy + \lambda ry = 0 \\ \alpha y(a) - \alpha' y'(a) = 0 \\ \beta y(b) + \beta' y'(b) = 0 \end{cases}$$

Ante un problema como (P) nuestro objetivo será **hallar los valores de λ para los que hay soluciones no triviales (autovalores de (P))** y esas **soluciones no triviales** correspondientes a cada λ (**autofunciones de (P)** asociadas a λ). Observemos que $y = 0$ es siempre solución trivial de (P) y que, por ser lineales y homogéneas la ecuación y las condiciones de contorno, si $y(x)$ es solución de (P) también lo es $Cy(x)$ para cualquier C .

Comenzaremos en 3.1 estudiando varios ejemplos para la ecuación $y'' + \lambda y = 0$ (la más sencilla y la que más veces aparece separando variables). En ellos existirá una sucesión infinita de autovalores y las autofunciones asociadas a λ distintos serán **ortogonales** entre sí. Después precisaremos para qué tipo de problemas de contorno (P) se mantienen esas propiedades. Serán los que se llaman **problemas de Sturm-Liouville separados**. Hablaremos también brevemente de los problemas **periódicos** y de los **singulares**.

En la sección 3.2 veremos que cualquier función f continua y derivable a trozos se puede escribir como una **serie de autofunciones** de un problema de Sturm-Liouville, lo que será muy útil en la resolución de EDPs. Este resultado generaliza los desarrollos de Fourier en **series de senos y cosenos**, cuyas propiedades básicas también veremos. Aunque la convergencia natural de estas series sea la llamada 'convergencia en media', nosotros nos limitaremos a tratar la convergencia puntual y uniforme.

Separando variables en la ecuación de Laplace y similares aparecerán, además de problemas de Sturm-Liouville homogéneos, otros problemas de contorno con la ecuación o alguna condición de contorno no homogéneas. Por eso, estudiaremos en 3.3 problemas de ese tipo. Para ellos, ni $y = 0$ es solución, ni lo son los múltiplos de una solución dada. La existencia de soluciones dependerá de si existen o no soluciones no triviales del homogéneo. Tendrán solución única en el último caso, e infinitas o ninguno si el homogéneo tiene infinitas.

La notación en todo este capítulo será $y(x)$, pero en separación de variables las funciones de nuestros problemas de contorno serán $X(x), Y(y), R(r), \Theta(\theta), \dots$

3.1. Problemas de Sturm-Liouville homogéneos

Antes de dar la teoría general, hallemos los **autovalores** y **autofunciones** de dos problemas de contorno homogéneos para la sencilla EDO lineal $y'' + \lambda y = 0$.

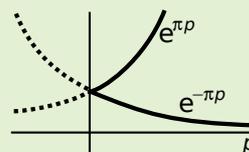
Como su polinomio característico es $\mu^2 + \lambda = 0 \rightarrow \mu = \pm \sqrt{-\lambda}$, la solución general de la ecuación será diferente según λ sea menor, igual ó mayor que 0.

Ej 1. $(P_1) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0, y(\pi) = 0 \end{cases}$ Imponemos las condiciones de contorno en cada caso:

Si $\lambda < 0$ la solución general es $y = c_1 e^{px} + c_2 e^{-px}$, con $p = \sqrt{-\lambda} > 0$.

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 = 0 \\ y(\pi) = c_1 e^{\pi p} + c_2 e^{-\pi p} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_2 = -c_1 \\ c_1 [e^{\pi p} - e^{-\pi p}] = 0 \end{cases}$$

Por tanto $c_1 = c_2 = 0$ (pues $e^{\pi p} \neq e^{-\pi p}$ si $p > 0$). Para ningún p hay soluciones no triviales y ningún $\lambda < 0$ es autovalor.



Si $\lambda = 0$ es $y = c_1 + c_2 x \rightarrow \begin{cases} y(0) = c_1 = 0 \\ y(\pi) = c_1 + c_2 \pi = 0 \end{cases} \rightarrow y \equiv 0$. $\lambda = 0$ tampoco es autovalor.

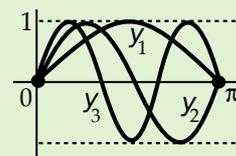
Y para $\lambda > 0$ es $y = c_1 \cos wx + c_2 \sin wx$, con $w = \sqrt{\lambda} > 0 \rightarrow \begin{cases} y(0) = c_1 = 0 \\ y(\pi) = c_2 \sin w\pi = 0 \end{cases}$

Para tener solución no trivial debe ser $c_2 \neq 0$.

Para ello, $w\pi = \pi\sqrt{\lambda} = n\pi \rightarrow \lambda_n = n^2, n = 1, 2, \dots$

Para cada uno de estos λ_n hay soluciones no triviales

$$y_n = c_2 \sin nx \equiv \{\sin nx\}.$$



Observemos que se cumple si $m \neq n$: $\int_0^\pi \sin nx \sin mx \, dx = 0$,

$$\text{pues } \frac{1}{2} \int_0^\pi [\cos(n-m)x - \cos(n+m)x] \, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n-m)x}{n-m} - \frac{\sin(n+m)x}{n+m} \right]_0^\pi = 0.$$

(P_1) tiene una **sucesión infinita de autovalores** $\lambda_n = n^2, n = 1, 2, \dots$. Las **autofunciones** $y_n = \{\sin nx\}$ asociadas a cada λ_n forman un **espacio vectorial de dimensión 1**. La n -sima autofunción posee $n-1$ ceros en $(0, \pi)$. **Autofunciones distintas son ortogonales en $[0, \pi]$** [respecto del producto escalar $\langle u, v \rangle = \int_0^\pi u v \, dx$].

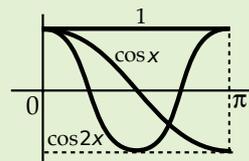
Ej 2. $(P_2) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = 0, y'(\pi) = 0 \end{cases}$ Imponemos estas nuevas condiciones:

$$\lambda < 0 \rightarrow \begin{cases} y'(0) = p[c_1 - c_2] = 0 \\ y'(\pi) = p[c_1 e^{\pi p} - c_2 e^{-\pi p}] = 0 \end{cases} \rightarrow c_2 = c_1 \rightarrow c_1 [e^{\pi p} - e^{-\pi p}] = 0 \rightarrow y \equiv 0.$$

$$\lambda = 0 \rightarrow \begin{cases} y'(0) = c_2 = 0 \\ y'(\pi) = c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda = 0 \text{ autovalor con autofunción } y_0 = c_1 = \{1\}.$$

$$\lambda > 0 \rightarrow \begin{cases} y'(0) = wc_2 = 0 \\ y'(\pi) = -wc_1 \sin w\pi = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = n^2, y_n = c_1 \cos nx.$$

Los $\lambda_n = n^2$ y las $y_n = \{\cos nx\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ (se suelen escribir así, poniendo $\{1\}$ como el caso particular $\{\cos 0\}$) tienen las mismas propiedades resaltadas para el problema anterior. Por ejemplo, la autofunción que ocupa el lugar n se anula $n-1$ veces y sigue habiendo ortogonalidad:



$$\int_0^\pi \cos nx \cos mx \, dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi [\cos(n-m)x + \cos(n+m)x] \, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n-m)x}{n-m} + \frac{\sin(n+m)x}{n+m} \right]_0^\pi = 0.$$

Pasemos a tratar ya el problema general. Sea la ecuación lineal de segundo orden dependiente de un parámetro real λ :

$$y'' + a(x)y' + b(x)y + \lambda c(x)y = 0, \text{ con } a, b, c \in C[a, b], \text{ } c(x) > 0 \text{ en } [a, b].$$

La reescribimos de otra forma, que se suele denominar '**autoadjunta**' o '**Sturm-Liouville**'. Multiplicando por $e^{\int a}$ se tiene

$$[e^{\int a} y']' + b e^{\int a} y + \lambda c e^{\int a} y \equiv [p y']' - q y + \lambda r y = 0, \text{ con } p \in C^1, q, r \in C, p, r > 0.$$

Las condiciones que más nos van a interesar son las condiciones **separadas** (cada una afecta a los valores de y o de y' sólo en uno de los extremos del intervalo):

Se llama **problema de Sturm-Liouville separado regular** a uno del tipo:

$$(P_s) \begin{cases} [p y']' - q y + \lambda r y = 0 \\ \alpha y(a) - \alpha' y'(a) = 0, \beta y(b) + \beta' y'(b) = 0 \end{cases} \text{ (condiciones separadas)}$$

donde $p \in C^1[a, b], q, r \in C[a, b], p, r > 0$ en $[a, b], |\alpha| + |\alpha'|, |\beta| + |\beta'| \neq 0$.

[Las últimas condiciones lo que dicen es que α y $|\alpha'|, |\beta|$ y $|\beta'|$ no se anulan a la vez].

Los ejemplos 1 y 2 eran unos (P_s) . Este teorema generaliza sus propiedades:

Teor 1.

Los autovalores de (P_s) son una sucesión infinita $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$ que tiende a ∞ . Las autofunciones $\{y_n\}$ son un espacio vectorial de dimensión 1 para cada n y cada y_n posee exactamente $n-1$ ceros en (a, b) . Las autofunciones asociadas a autovalores diferentes son ortogonales en $[a, b]$ respecto al peso r , es decir:

$$\langle y_n, y_m \rangle \equiv \int_a^b r y_n y_m dx = 0, \text{ si } y_n, y_m \text{ están asociadas a } \lambda_n \neq \lambda_m.$$

Si $\alpha \alpha' \geq 0, \beta \beta' \geq 0$ y $q(x) \geq 0$ en $[a, b]$ entonces todos los $\lambda_n \geq 0$. En particular, para $y(a) = y(b) = 0$ [o sea, si $\alpha' = \beta' = 0$] todos los $\lambda_n > 0$.

No probamos la primera afirmación y la de los ceros que son difíciles. Sí el resto.

Si y cumple (P_s) : $y'(a) = \frac{\alpha}{\alpha'} y(a), \alpha' \neq 0; y'(b) = -\frac{\beta}{\beta'} y(b), \beta' \neq 0$

[y es $y(a) = 0$, si $\alpha' = 0$; $y(b) = 0$, si $\beta' = 0$].

Si y, y^* están asociadas al mismo λ , se deduce que dependen linealmente, pues su wronskiano se anula en a (o también en b):

$$|W|(y, y^*)(a) = y y^{*'} - y' y^* \Big|_{x=a} = 0, \text{ si } \alpha' = 0 \text{ o si } \alpha' \neq 0.$$

Sean ahora y_n, y_m asociadas, respectivamente, a λ_n y λ_m :

$$\begin{cases} \lambda_n r y_n = -[p y_n']' + q y_n \\ \lambda_m r y_m = -[p y_m']' + q y_m \end{cases} \begin{array}{l} \text{Multiplicando por } y_m \text{ e } y_n, \\ \text{restando e integrando:} \end{array}$$

$$[\lambda_n - \lambda_m] \int_a^b r y_n y_m dx = \int_a^b [y_n (p y_m')' - y_m (p y_n')'] dx \stackrel{\text{partes}}{=} [p (y_n y_m' - y_m y_n')]_a^b = 0$$

pues $|W|(y_n, y_m) = 0$ en a y en b . Por tanto, si $\lambda_n \neq \lambda_m$ se tiene que $\langle y_n, y_m \rangle = 0$.

Si y es la autofunción asociada a λ y $\alpha \alpha' \geq 0, \beta \beta' \geq 0, q \geq 0$ entonces

$$\lambda \int_a^b r y^2 dx = \int_a^b [-y (p y')' + q y^2] dx = \int_a^b [p (y')^2 + q y^2] dx - [p y y']_a^b \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq 0,$$

pues $\int_a^b r y^2 dx > 0 (r > 0), \int_a^b [p (y')^2 + q y^2] dx \geq 0 (p > 0, q \geq 0),$

$$-[p y y']_a^b = \begin{cases} \frac{\beta}{\beta'} p(b) [y(b)]^2 \geq 0 \text{ si } \beta' \neq 0 \\ 0 \text{ si } \beta' = 0 \end{cases}, [p y y']_a^b = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha'} p(a) [y(a)]^2 \geq 0 \text{ si } \alpha' \neq 0 \\ 0 \text{ si } \alpha' = 0 \end{cases}.$$

Si $y(a) = y(b) = 0, y = \{1\}$ no es autofunción $\Rightarrow y' \neq 0 \Rightarrow \int_a^b p (y')^2 > 0 \Rightarrow \lambda > 0$.

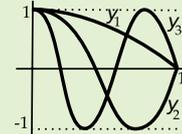
Ej 3. $(P_3) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = y(1) = 0 \end{cases}$ (casi en forma autoadjunta: $[y']' + \lambda y = 0$; es $r \equiv 1$).

Tendrá las propiedades del teorema 1. Hallemos sus λ_n . Como $\alpha\alpha' = \beta\beta' = 0$, $q \equiv 0$, nos limitamos a los $\lambda \geq 0$. [Ahora sabemos que podíamos haber hecho esto en el ejemplo 2, y que en el 1 hubieran bastado los $\lambda > 0$; que conste que **hay problemas con $\lambda < 0$**].

$\lambda = 0$: $y = c_1 + c_2 x \rightarrow \begin{cases} y'(0) = c_2 = 0 \\ y(1) = c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow y \equiv 0$. $\lambda = 0$ no es autovalor.

$\lambda > 0$: $y = c_1 \cos wx + c_2 \sin wx$. $y'(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0 \rightarrow y(1) = c_1 \cos w = 0$
 $\rightarrow w_n = \frac{2n-1}{2}\pi$, $\lambda_n = \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4}$, $y_n = \left\{ \cos \frac{2n-1}{2} \pi x \right\}$, $n = 1, 2, \dots$

El teorema asegura que las $\{y_n\}$ son ortogonales: $\int_0^1 y_n y_m dx = 0$, $n \neq m$ (sería fácil comprobarlo), y que la autofunción n -sima (como le ocurre a las tres dibujadas) tiene $n-1$ ceros en $(0, 1)$.



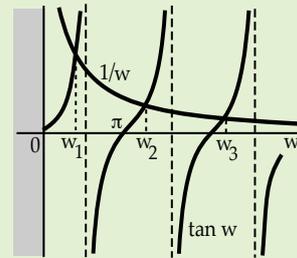
Ej 4. $(P_4) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = y'(1) + y(1) = 0 \end{cases}$ Como $\alpha\alpha' = 0$, $\beta\beta' > 0$, $q \equiv 0$, volvemos mirar sólo los $\lambda \geq 0$.

$\lambda = 0$: $y = c_1 + c_2 x \rightarrow \begin{cases} y'(0) = c_2 = 0 \\ y'(1) + y(1) = c_1 + 2c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow y \equiv 0$. $\lambda = 0$ no autovalor.

$\lambda > 0$: $y = c_1 \cos wx + c_2 \sin wx$. $y'(0) = wc_2 = 0 \rightarrow y'(1) + y(1) = c_1 [\cos w - w \sin w] = 0$.

No podemos hallar exactamente los λ_n , pero tan $w_n = \frac{1}{w_n}$ lo cumplen infinitos w_n (anulan el corchete infinitos w_n), que sólo se pueden hallar aproximadamente. La y_n para cada $\lambda_n = w_n^2$ es $\{\cos w_n x\}$. Estas y_n serán ortogonales.

[La mayoría de los problemas de S-L no son resolubles, pues pocas lineales de segundo orden lo son elementalmente (las de coeficientes constantes y pocas más), y aunque lo sean puede ocurrir lo que en este ejemplo].



Ej 5. $(P_5) \begin{cases} y'' - 2y' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = y'(1) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mu^2 - 2\mu + \lambda = 0, \\ \mu = 1 \pm \sqrt{1 - \lambda} \end{cases} \quad [e^{-2x}y']' + \lambda e^{-2x}y = 0$

Sabemos que los $\lambda \geq 0$, pero esto no ahorra cálculos, pues y hay que mirar $\lambda <, =, > 1$:

$\lambda < 1$: $y = c_1 e^{(1+p)x} + c_2 e^{(1-p)x}$, $y' = c_1(1+p)e^{(1+p)x} + c_2(1-p)e^{(1-p)x}$, $p = \sqrt{1-\lambda} \rightarrow$
 $\begin{cases} c_1[1+p] + c_2[1-p] = 0 \\ c_1[1+p]e^{1+p} + c_2[1-p]e^{1-p} = 0 \end{cases} \rightarrow c_2(1-p)e[e^{-p} - e^p] = 0 \rightarrow p = 1$ ($\lambda = 0$), $y_0 = \{1\}$.

$\lambda = 1$: $y = [c_1 + c_2 x]e^x$, $y' = [c_1 + c_2 + c_2 x]e^x \rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + 2c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow y \equiv 0$. $\lambda = 1$ no autovalor.

$\lambda > 1$: $y = [c_1 \cos wx + c_2 \sin wx]e^x$, $w = \sqrt{\lambda - 1}$
 $y' = [(c_1 + c_2 w) \cos wx + (c_2 - c_1 w) \sin wx]e^x \rightarrow \begin{cases} y'(0) = c_1 + c_2 w = 0 \\ y'(1) = c_2 e(1 + w^2) \sin w = 0 \end{cases} \rightarrow$
 $w = n\pi$, $n = 1, 2, \dots \rightarrow \lambda_n = 1 + n^2 \pi^2$, $y_n = \{e^x [\sin n\pi x - n\pi \cos n\pi x]\}$, $n = 1, 2, \dots$

Las autofunciones serán ortogonales respecto al peso $r(x) = e^{-2x}$:

$$\int_0^1 e^{-x} [\sin n\pi x - n\pi \cos n\pi x] dx = 0$$

$$\int_0^1 [\sin n\pi x - n\pi \cos n\pi x] [\sin m\pi x - m\pi \cos m\pi x] dx = 0 \quad (m \neq n)$$

Ej 6. $(P_6) \begin{cases} x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0 \\ y(1) = y(e) = 0 \end{cases} \quad p(x) = e^{\int \frac{dx}{x}} = x \rightarrow [xy']' + \lambda \frac{y}{x} = 0$. Es $r(x) = \frac{1}{x}$.
 Es problema separado regular ($p, r > 0$ en $[1, e]$).

Ecuación de Euler: $r(r-1) + r + \lambda = 0 \rightarrow r = \pm \sqrt{-\lambda}$. Basta mirar los $\lambda > 0$:

$y = c_1 \cos(w \ln x) + c_2 \sin(w \ln x)$, $\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 \sin w = 0 \end{cases} \lambda_n = n^2 \pi^2$, $y_n = \{\sin(n\pi \ln x)\}$, $n = 1, 2, \dots$

Como siempre, las autofunciones son ortogonales: $\int_1^e \frac{\sin(n\pi \ln x) \sin(m\pi \ln x)}{x} dx = 0$, $m \neq n$.

Separando variables nos aparecerán también problemas de contorno como el siguiente, que no es separado, pues sus condiciones de contorno mezclan valores en los dos extremos del intervalo. En concreto, este es un **problema periódico**:

Ej 7. $(P_7) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(-\pi) = y(\pi), y'(-\pi) = y'(\pi) \end{cases}$ [Estas condiciones equivalen a pedir que y sea 2π -periódica].

$\lambda < 0 \rightarrow \begin{cases} c_1[e^{\pi\rho} - e^{-\pi\rho}] - c_2[e^{\pi\rho} - e^{-\pi\rho}] = 0 \\ c_1[e^{\pi\rho} - e^{-\pi\rho}] + c_2[e^{\pi\rho} - e^{-\pi\rho}] = 0 \end{cases}$ Como el determinante de los coeficientes

$$\begin{vmatrix} e^{\pi\rho} - e^{-\pi\rho} & e^{-\pi\rho} - e^{\pi\rho} \\ e^{\pi\rho} - e^{-\pi\rho} & e^{\pi\rho} - e^{-\pi\rho} \end{vmatrix} = 2(e^{\pi\rho} - e^{-\pi\rho})^2 \neq 0 \text{ si } \rho > 0,$$

el sistema sólo tiene la solución trivial $c_1 = c_2 = 0$. No hay autovalores negativos.

$\lambda = 0 \rightarrow \begin{cases} c_1 - c_2\pi = c_1 + c_2\pi \\ c_2 = c_2 \end{cases}$ se satisface para $c_2 = 0$ y cualquier c_1 : $y_0 = c_1 = \{1\}$.

$\lambda > 0 \rightarrow \begin{cases} 2c_2 \sin \pi w = 0 \\ 2c_1 w \sin \pi w = 0 \end{cases} \rightarrow \sin \pi w = 0 \rightarrow \lambda_n = n^2, n = 1, 2, \dots$

Para esos λ_n las condiciones de contorno se cumplen para todo c_1 y todo c_2 . Las autofunciones son, pues: $y_n = c_1 \cos nx + c_2 \sin nx \equiv \{\cos nx, \sin nx\}$.

[Es claro que exigir simplemente que y sea 2π -periódica lleva directamente a los mismos autovalores y autofunciones].

Las propiedades de (P_7) son algo distintas de las los problemas separados: sigue habiendo una **sucesión infinita de autovalores** $\lambda_n = n^2, n = 1, 2, \dots$ tendiendo a ∞ , pero **las autofunciones** $y_0 = \{1\}, y_n = \{\cos nx, \sin nx\}$ **forman**, si $n > 0$, **un espacio vectorial de dimensión 2**. Utilizando $\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$ (y las relaciones ya vistas para $\sin a \sin b$ y $\cos a \cos b$ y las fórmulas del ángulo doble) se comprueba que sigue siendo cierto que **autofunciones diferentes son ortogonales** entre sí.

Los problemas de Sturm-Liouville pueden generalizarse. En la demostración del teorema se aprecia que lo esencial para la ortogonalidad es que $[\rho|W|(y_n, y_m)]_a^b = 0$; esto sucede para otros tipos de condiciones de contorno (y para otros muchos no) además de las separadas.

Por ejemplo ocurre en los llamados problemas **periódicos** que generalizan el (P_7) :

$$(P_p) \begin{cases} [py']' - qy + \lambda ry = 0, \text{ con } p(a) = p(b), p \in C^1[a, b], q, r \in C[a, b], p, r > 0 \text{ en } [a, b] \\ y(a) = y(b), y'(a) = y'(b) \text{ (condiciones periódicas)} \end{cases}$$

Para (P_p) no se anula el wronskiano de dos soluciones ni en a ni en b (y por eso hay espacios de autofunciones de dimensión 2), pero es claro que $[\rho|W|(y_n, y_m)](b) = [\rho|W|(y_n, y_m)](a)$.

Más en general, se llaman problemas **autoadjuntos** aquellos tales que $[\rho|W|(u, v)]_a^b = 0$ para todo par de funciones u, v que cumplan sus condiciones de contorno.

Las y_n de problemas autoadjuntos (que en libros avanzados se ve que tienen propiedades similares a las vistas) son, pues, ortogonales. Pero no nos ocupamos más de ellos, pues los problemas que nos aparecerán en el capítulo 4 serán todos separados (o el (P_7) de arriba).

[El término 'autoadjunto' se debe a que si llamamos $L[y] = -[py']' + qy$, con lo que la ecuación adopta el aspecto algebraico $L[y] = \lambda ry$, y denotamos $(u, v) = \int_a^b uv dx$, se tiene que $(L[u], v) = (u, L[v])$ para todo par de funciones u, v que cumplen los datos de contorno: el operador L es 'autoadjunto' en ese conjunto de funciones].

Ej 8. $(P_8) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(\pi), y'(0) = -y'(\pi) \end{cases}$ Se tiene $[\rho|W|(u, v)](\pi) = -[\rho|W|(u, v)](0)$.

El problema, pues, no es autoadjunto. Operando como en el ejemplo 7 es fácil ver que las cosas son muy diferentes: cualquier λ (menor, igual o mayor que 0) es autovalor

(asociado, respectivamente, a $\{\operatorname{ch}[p(x - \frac{\pi}{2})]\}, \{1\}$ ó $\{\cos[w(x - \frac{\pi}{2})]\}$)

y en general es falso que las autofunciones asociadas a λ distintos sean ortogonales.

Resolviendo algunas EDPs aparecerán **problemas singulares** de Sturm-Liouville que no reúnen todas las condiciones de los regulares: p ó r se anulan o no son continuas en algún extremo del intervalo, el intervalo es infinito... Resolvamos tres de ellos (el 9 surge, por ejemplo, tratando ondas o calor en el espacio, el 10 si esas ecuaciones son en el plano y el 11 para Laplace en la esfera), en los que en uno o ambos extremos es $p=0$. En esos extremos las condiciones de contorno de un (P_s) son demasiado fuertes para tener autovalores y autofunciones como en los regulares y se sustituyen por **acotación**, de forma que siga habiendo ortogonalidad, es decir, según vimos en la demostración del teorema 1, que se cumpla:

$$0 = [p(y_n y'_m - y_m y'_n)]_a^b = (\lambda_n - \lambda_m) \langle y_n, y_m \rangle .$$

Ej 9. $(P_9) \begin{cases} xy'' + 2y' + \lambda xy = 0 \\ y \text{ acotada en } x=0, y(1)=0 \end{cases} \quad y'' + \frac{2}{x}y' + \lambda y = 0 \xrightarrow{e^{\int a=x^2}} [x^2 y']' + \lambda x^2 y = 0 .$

Haciendo el cambio $u = xy$ la ecuación se convierte en la conocida $u'' + \lambda u = 0 \rightarrow$ la solución general de la inicial para $\lambda > 0$ es $y = c_1 \frac{\cos wx}{x} + c_2 \frac{\sen wx}{x}$.

y acotada en $x=0 \rightarrow c_1=0$ (pues $\frac{\cos wx}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \infty$, mientras que $\frac{\sen wx}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} w$).

$$y(1)=0 \rightarrow \sen w=0 \rightarrow \lambda_n = n^2 \pi^2, n=1, 2, \dots, y_n = \left\{ \frac{\sen n\pi x}{x} \right\}$$

[que son ortogonales, como es fácil comprobar, respecto al peso $r(x)=x^2$].

Es fácil ver directamente que no hay $\lambda \leq 0$, o podemos evitar las cuentas pues la prueba de esa parte del teorema se puede adaptar a este problema singular, con lo que $\lambda > 0$.

[También se podría haber observado que las condiciones que quedan tras el cambio son $u(0)=0 \cdot y(0)=0$, $u(1)=1 \cdot 0=0 \rightarrow u_n = \{\sen n\pi x\}$, y haber deshecho el cambio].

[Si hubiésemos impuesto $y(0)=0, y(1)=0$ la única solución sería $y \equiv 0 \forall \lambda$; las condiciones para este problema singular habrían sido demasiado fuertes].

Ej 10. $(P_{10}) \begin{cases} xy'' + y' + \lambda xy = 0 \\ y \text{ acotada en } x=0, y(1)=0 \end{cases} \rightarrow [xy']' + \lambda xy = 0 .$

Se puede probar que $\lambda > 0$. Haciendo el cambio de variable independiente $s = \sqrt{\lambda} x = wx$ [$y' = w \frac{dy}{ds}$, $y'' = w^2 \frac{d^2 y}{ds^2}$], la ecuación se convierte en la de Bessel de orden 0:

$$s \frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{dy}{ds} + sy = 0 \rightarrow y = c_1 J_0(s) + c_2 K_0(s) = c_1 J_0(wx) + c_2 K_0(wx) .$$

La primera condición de contorno impone que $c_2 = 0$ (K_0 no está acotada en $x=0$). De la otra se deduce que $c_1 J_0(w) = 0$. Así pues, los autovalores son los $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ cuyas raíces son los infinitos ceros de J_0

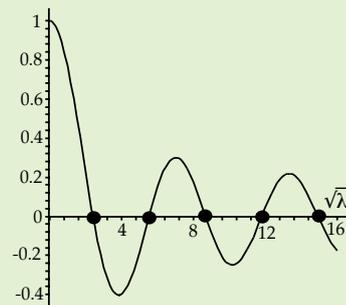
$$[w_1 \approx 2.40, w_2 \approx 5.52, w_3 \approx 8.65, \dots$$

$$\text{y si } n \text{ grande es } w_n = \sqrt{\lambda_n} \approx (n - \frac{1}{4})\pi .]$$

Para esos $\lambda_n = w_n^2$ las autofunciones asociadas son

$$y_n = \{J_0(w_n x)\} ,$$

que son ortogonales respecto al peso $r(x)=x$.



Ej 11. $(P_{11}) \begin{cases} [(1-x^2)y']' + \lambda y = 0 \\ y \text{ acotada en } x=\pm 1 \end{cases} \quad \text{La ecuación es la de Legendre si } \lambda = p(p+1) .$

Sabemos que sus únicas soluciones acotadas a la vez en 1 y en -1 son los polinomios de Legendre $P_n(x)$, que aparecen cuando $p=n$, $n=0, 1, 2, \dots$

$$P_0 = 1, P_1 = x, P_2 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, P_3 = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x, \dots$$

Los autovalores son $\lambda_n = n(n+1)$, $n=0, 1, 2, \dots$ y las autofunciones son los $\{P_n\}$, que cumplen, como dijimos en 2.3: $\int_{-1}^1 P_n P_m dx = 0$ si $m \neq n$, $\int_{-1}^1 P_n^2 dx = \frac{2}{2n+1}$ [$r(x)=1$].

3.2. Series de Fourier

Consideremos el problema de Sturm-Liouville separado regular:

$$(P_s) \begin{cases} [py']' - qy + \lambda ry = 0 \\ \alpha y(a) - \alpha' y'(a) = 0, \beta y(b) + \beta' y'(b) = 0 \end{cases}$$

y sean $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ sus autofunciones asociadas a los $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$

La importante propiedad que veremos en esta sección es que **cualquier función f suficientemente regular en $[a, b]$ puede ser desarrollada en serie de dichas autofunciones**, es decir:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x)$$

Supongamos que este desarrollo es válido y que la serie puede ser integrada término a término. Entonces, por ser las y_n ortogonales:

$$\int_a^b r f y_m dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b r y_n y_m dx = c_m \int_a^b r y_m y_m dx$$

Así pues, representando como en 3.1 el producto escalar respecto al peso $r(x)$ por:

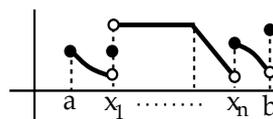
$$\langle u, v \rangle = \int_a^b r u v dx \quad \text{debe ser} \quad c_n = \frac{\langle f, y_n \rangle}{\langle y_n, y_n \rangle}, \quad n=1, 2, \dots$$

[El r es el de la ecuación en forma autoadjunta; en la mayoría de los problemas que aparecerán separando variables en el capítulo 4 dicho peso será 1, pero no siempre].

El problema (nada elemental) reside en precisar para qué funciones f la serie con esos coeficientes (**serie de Fourier de f**) converge realmente hacia f en $[a, b]$. Aunque se le pueden exigir condiciones más débiles, nosotros pediremos a f que sea C^1 a trozos, condición que será satisfecha por las funciones que aparecerán en problemas prácticos.

[Se dice que una f es C^1 a trozos en $[a, b]$ si podemos dividir el intervalo en subintervalos $[a, b] = [a, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_n, b]$ de modo que:

- i. f y f' son continuas en cada (x_k, x_{k+1}) ,
- ii. los límites laterales de f, f' en cada x_k existen (son finitos)].



Teor 1.

Si f es C^1 a trozos en $[a, b]$ entonces su serie de Fourier:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, y_n \rangle}{\langle y_n, y_n \rangle} y_n(x)$$

converge hacia $f(x)$ en los $x \in (a, b)$ en que f es continua y hacia $\frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)]$ en los $x \in (a, b)$ en que es discontinua.

El teorema no dice nada sobre la convergencia en los extremos a y b .

[La demostración es difícil y la omitimos. En lenguaje de 'análisis funcional', las $\{y_n\}$ son una 'base de Fourier' del espacio de funciones de dimensión infinita (similar a una base ortonormal de uno de dimensión finita). La cuestión principal es ver que la base es 'completa', es decir, que no hay otras funciones ortogonales a las $\{y_n\}$. El espacio 'natural' para estudiar las series de Fourier es L^2 (funciones de cuadrado integrable) y la convergencia más ligada a ellas es la 'convergencia en media cuadrática':

$$\int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=1}^n c_k y_k(x) \right|^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Caso particular de los desarrollos en serie de Fourier son los **desarrollos en series trigonométricas**, que, al ser los que más utilizaremos, estudiamos con detalle.

Los autovalores y autofunciones de:

$$(P_1) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(L) = 0 \end{cases} \quad \text{son } \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \quad \text{e } y_n = \left\{ \sin \frac{n\pi x}{L} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

[Sale fácil directamente, o podemos hacer $s = \frac{\pi x}{L} \rightarrow y'' + \frac{L^2}{\pi^2} \lambda y = 0, y(0) = y(\pi) = 0$ en la variable s , que es casi el ejemplo 1 de 3.1; también se trasladaría haciendo $s = x - a$ un problema en $[a, b]$ al (P_1) (con $L = b - a$), sin necesidad de estudiarlo desde el principio].

Llamaremos **serie de Fourier en senos** en $[0, L]$ de f al desarrollo en estas y_n :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad \text{con } b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad [s]$$

Pues el peso $r(x) \equiv 1$ y es $\langle y_n, y_n \rangle = \int_0^L \left[\sin \frac{n\pi x}{L} \right]^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L [1 - \cos \frac{2n\pi x}{L}] dx = \frac{L}{2}$.

[Hemos escrito impropriadamente $f = \Sigma$; la igualdad sólo se da en los $x \in (0, L)$ en que f es continua; en 0 y L aún no sabemos, pero pronto lo sabremos].

Se llamará **serie de Fourier en cosenos** en $[0, L]$ de una f dada al desarrollo en las autofunciones de este segundo problema de contorno:

$$(P_2) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = y'(L) = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad y_n = \left\{ \cos \frac{n\pi x}{L} \right\}, \quad n = 0, 1, \dots \quad [y_0 = \{1\}]$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad \text{con } a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad [c]$$

Pues $\langle y_0, y_0 \rangle = \int_0^L 1^2 dx = L$ e $\langle y_n, y_n \rangle = \int_0^L \left[\cos \frac{n\pi x}{L} \right]^2 dx = \frac{L}{2}$, si $n \geq 1$.

[Poniendo $\frac{a_0}{2}$ en la serie, la fórmula del a_n vale también para a_0].

Otras dos familias de autofunciones sencillas en las que muchas veces vamos a desarrollar funciones son las de estos problemas fáciles de resolver:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y'(L) = 0 \end{cases} \quad \text{con } \lambda_n = \frac{[2n-1]^2 \pi^2}{2^2 L^2}, \quad y_n = \left\{ \sin \frac{[2n-1]\pi x}{2L} \right\}, \quad \langle y_n, y_n \rangle = \frac{L}{2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = y(L) = 0 \end{cases} \quad \text{con } \lambda_n = \frac{[2n-1]^2 \pi^2}{2^2 L^2}, \quad y_n = \left\{ \cos \frac{[2n-1]\pi x}{2L} \right\}, \quad \langle y_n, y_n \rangle = \frac{L}{2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

A los desarrollos en estas autofunciones los llamaremos, respectivamente, series en **senos impares** y en **cosenos impares** en $[0, L]$.

Observemos que **en estos cuatro casos** la fórmula para el coeficiente c_n de la serie de Fourier (que se deduce de la general $\langle f, y_n \rangle / \langle y_n, y_n \rangle$) adopta la forma:

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) y_n(x) dx$$

[No olvidando poner $a_0/2$ para las series en cosenos, que son las únicas que tienen ese término, ya que para las otras tres las sumas empiezan desde $n = 1$].

Ej 1. Desarrollemos $f(x) = x, x \in [0, 1]$ en senos, cosenos y cosenos impares:

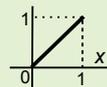
$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\pi x, \quad \text{pues } b_n = 2 \int_0^1 x \sin n\pi x dx = -\frac{2 \cos n\pi}{n\pi}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \cos n\pi x = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} \cos(2m-1)\pi x,$$

$$\text{ya que } a_0 = 2 \int_0^1 x dx = 1, \quad a_n = 2 \int_0^1 x \cos n\pi x dx = \frac{2}{n^2 \pi^2} [\cos n\pi - 1], \quad n = 1, 2, \dots$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(2n-1)} - \frac{8}{\pi^2(2n-1)^2} \right] \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2}, \quad \text{pues } c_n = 2 \int_0^1 x \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2} dx = \dots$$

Las tres series, por el teorema 1, convergen hacia $f(x)$ para todo $x \in (0, 1)$. Lo mismo haría el desarrollo en autofunciones de cualquier otro problema de Sturm-Liouville.



La teoría de series de Fourier también incluye los problemas periódicos. Para:

$$(P_p) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(-L) = y(L), y'(-L) = y'(L) \end{cases}, \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, y_0 = \{1\}, y_n = \left\{ \cos \frac{n\pi x}{L}, \sin \frac{n\pi x}{L} \right\} \\ n=0, 1, \dots$$

se deduce la siguiente **serie de Fourier en senos y cosenos** en $[-L, L]$:

$$[p] \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right], \text{ con coeficientes:}$$

$$[1] \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad \text{y} \quad [2] \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \\ n=0, 1, 2, \dots \qquad \qquad \qquad n=1, 2, \dots$$

ya que: $\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 0$ para todo m y n ; $\int_{-L}^L 1^2 dx = 2L$;

$$\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ L & m = n \end{cases}; \quad \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ L & m = n \end{cases}.$$

[Las fórmulas [1]-[2] también valen para desarrollar una f definida inicialmente en cualquier otro intervalo $[a, a+2L]$ (cambiando los límites a la integral) pues

$$\int_a^{a+2L} \cos^2 = \int_a^{a+2L} \sin^2 = L].$$

Como en el teorema 1, se prueba que la serie [p] converge hacia $f(x)$ para los x en los que f es continua. Pero además **se puede decir lo que pasa en los extremos** $-L$ y L (pues, al ser sus sumandos de ese periodo, [p] define una función en todo \mathbf{R} que es $2L$ -periódica). Podemos hablar también sobre **convergencia uniforme** de [p] (sin demostrar nada, como en toda la sección):

Teor 2.

Supongamos que f es C^1 a trozos en $[-L, L]$ y extendamos f fuera de $[-L, L]$ de forma $2L$ -periódica. Entonces la serie [p] con a_n y b_n dados por [1] y [2] converge hacia $f(x)$ en todos los puntos en que su extensión es continua (y en los puntos de discontinuidad hacia $\frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)]$). Además [p] converge uniformemente en cualquier intervalo cerrado sin discontinuidades de la f extendida. Por tanto, si $f(-L) = f(L)$ y f es continua, [p] tiende uniformemente hacia f en todo el intervalo $[-L, L]$.

Las fórmulas [s] y [c] de los coeficientes de las series en senos y en cosenos se pueden ver como casos particulares de [1] y [2].

Dada una f inicialmente definida en $[0, L]$ se puede extender de forma **impar** o **par** a $[-L, L]$. En el primer caso es impar $f(x) \cos(n\pi x/L)$ y par $f(x) \sin(n\pi x/L)$. En el segundo, es par $f(x) \cos(n\pi x/L)$ e impar $f(x) \sin(n\pi x/L)$. Así, $a_n = 0$ y [1] se convierte en [s] en el primero, y en el otro $b_n = 0$ y [2] pasa a ser [c].

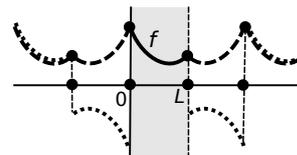
[Si definiésemos la f de cualquier otra forma en $[-L, 0)$, la serie en senos y cosenos también convergería hacia $f(x)$ en los x de $(0, L)$ en que fuese continua].

Como consecuencia de lo anterior y del teorema 2 se tiene que:

La serie de cosenos de una f continua en $[0, L]$, con f' continua a trozos, converge uniformemente hacia f en todo $[0, L]$.
Si f cumple además que $f(0) = f(L) = 0$, también lo hará su serie de senos.

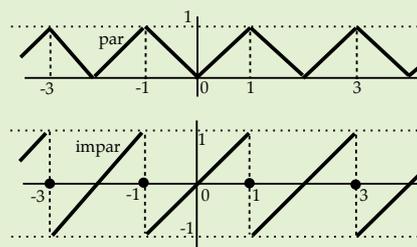
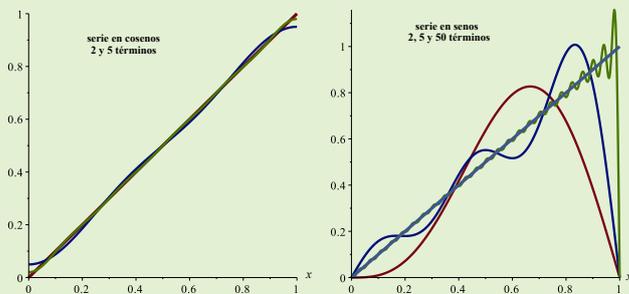
[Si no fuese $f(0) = 0$ ó $f(L) = 0$ la f extendida primero de forma impar a $[-L, L]$ y luego de forma $2L$ -periódica no sería continua en 0 o en L ; además está claro que todas las series en senos se anulan en 0 y L , pues lo hace cada sumando].

[Aunque la convergencia de las series en cosenos sea mejor que la de los senos, resolviendo EDPs no podremos elegir el tipo de series en que desarrollar las funciones: las impondrán las condiciones de contorno del problema].



Ej 1*. Ya podemos saber hacia qué convergen las dos primeras series del ejemplo 1 en los extremos del intervalo.

En particular, la serie de senos no converge hacia f en todo $[0, 1]$ (en $x=1$ la suma será 0) y lo hace uniformemente en todo intervalo $[0, b]$, $b < 1$. La serie de cosenos converge uniformemente en $[0, 1]$.



Lo comprobamos con ordenador. La serie en cosenos, sumando 2 y 5 términos ya da una buena aproximación. Para la de senos, en cambio, se ve que cerca de $x=1$, aun sumando 50 términos, no se ajusta bien al valor real.

[Cerca de las discontinuidades van a aparecer siempre 'picos'. Es el llamado 'fenómeno de Gibbs'].

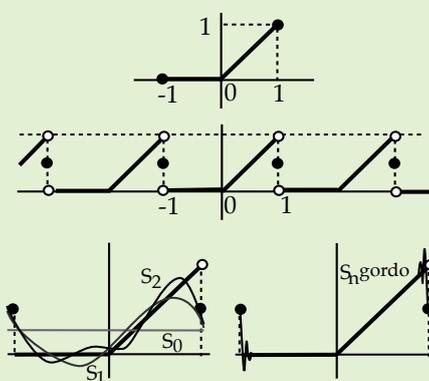
Ahora hacemos un desarrollo en serie de senos y cosenos:

Ej 2. Sea $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$.

Su serie en senos y cosenos está casi calculada:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \cos n\pi x - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin n\pi x.$$

Viendo su extensión 2-periódica deducimos que la suma de la serie es 0 en $(-1, 0]$, x en $[0, 1)$ y $1/2$ en -1 y 1 . En todo cerrado que no contenga estos puntos la convergencia es uniforme. Cerca de ellos la convergencia es mala y lenta como en el ejemplo anterior.



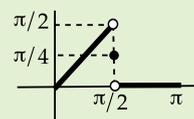
Desarrollamos ahora una función 'rota':

Ej 3. Desarrollemos $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$ en serie de autofunciones de $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = y'(\pi) = 0$.

Autofunciones conocidas: $\lambda_n = \frac{(2n-1)^2}{2^2}$, $y_n = \{\sin \frac{(2n-1)x}{2}\}$, $n = 1, 2, \dots$. $\langle y_n, y_n \rangle = \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} \rightarrow c_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin \frac{(2n-1)x}{2} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} x \sin \frac{(2n-1)x}{2} dx \\ &= -\frac{4x \cos \frac{(2n-1)x}{2}}{\pi(2n-1)} \Big|_0^{\pi/2} + \frac{4}{\pi(2n-1)} \int_0^{\pi/2} \cos \frac{(2n-1)x}{2} dx = \frac{8 \sin \frac{(2n-1)\pi}{4}}{\pi(2n-1)^2} - \frac{2 \cos \frac{(2n-1)\pi}{4}}{2n-1}. \end{aligned}$$

La serie converge hacia f en los $x \in (0, \pi)$ en que es continua, y hacia $\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$ en los que es discontinua. En particular, para $x = \frac{\pi}{2}$ la suma ha de ser $\frac{\pi}{4}$. Por tanto, se tiene que:



$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{(2n-1)\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{8 \sin^2(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4})}{\pi(2n-1)^2} - \frac{\sin \frac{(2n-1)\pi}{4}}{2n-1} \right] = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{\pi}{4},$$

puesto que $\sin^2(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}[1 - \cos(n\pi - \frac{\pi}{2})] = 1$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

Deducimos de la igualdad de arriba el valor de la suma de esta serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

[No es raro obtener sumas de series desconocidas a partir de un desarrollo de Fourier].

[Los teoremas vistos no nos dicen nada de la convergencia de esta serie en los extremos, aunque no sería complicado ver también lo que sucede con las series en cosenos y senos impares (los extremos con $y=0$ llevan a extensiones impares y los de $y'=0$ a pares)].

Calculemos desarrollos en autofunciones más complicadas que las 4+1 citadas hasta ahora. Debemos ocuparnos en ellos del peso r , del cálculo de los $\langle y_n, y_n \rangle \dots$

Ej 4. Desarrollemos $f(x)=x, x \in [0,1]$ en las autofunciones del ejemplo 4 de 3.1: $\{\cos w_n x\}$ con $\tan w_n = \frac{1}{w_n}$ [$r(x)=1$].

$$\langle \cos w_n x, \cos w_n x \rangle = \int_0^1 \cos^2 w_n x \, dx = \frac{1}{2} + \frac{\sin w_n \cos w_n}{2w_n} = \frac{w_n^2 + \cos^2 w_n}{2w_n^2} = \frac{2 + w_n^2}{2(1 + w_n^2)},$$

$$\langle x, \cos w_n x \rangle = \int_0^1 x \cos w_n x \, dx = \frac{\sin w_n}{w_n} + \frac{\cos w_n - 1}{w_n^2} = \frac{2 \cos w_n - 1}{w_n^2} \rightarrow$$

$$\text{Por tanto: } x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(2 \cos w_n - 1)}{w_n^2 + \cos^2 w_n} \cos w_n x.$$

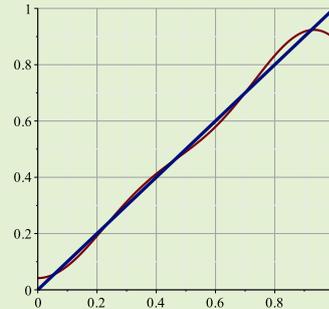
[Vamos a usar el ordenador (en concreto el programa Maple) para hallar varios coeficientes y dibujar algunas sumas parciales de esta serie. Lo primero será aproximar los w_n :

$$w_1 \approx 0.8603, w_2 \approx 3.4256, w_3 \approx 6.4373, w_4 \approx 9.5293 \dots$$

De ellos deducimos los c_n :

$$c_1 \approx 0.5223, c_2 \approx -0.4614, c_3 \approx 0.0460, c_4 \approx -0.0651 \dots$$

A la derecha están dibujadas x y la cuarta suma parcial. Parece también converger en los extremos, cosa que no sabíamos].



Ej 5. Otro desarrollo de $f(x)=x$, ahora en $[1, e]$, en las autofunciones del Ej 6 de 3.1.

Esta vez el peso no es 1, sino $r(x) = \frac{1}{x}$. Como $\int_1^e \frac{\sin^2(n\pi \ln x) dx}{x} = \int_0^1 \sin^2(n\pi s) ds = \frac{1}{2}$,

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi \ln x), \text{ si } c_n = 2 \int_1^e \sin(n\pi \ln x) dx = 2 \int_0^1 e^s \sin(n\pi s) ds = \frac{2n\pi [1 - e(-1)^n]}{1 + n^2\pi^2}.$$

Observemos para acabar que también se pueden hacer desarrollos de Fourier en serie de autofunciones de diversos problemas de Sturm-Liouville singulares, en particular en las de los tres que vimos al final de la sección anterior.

Ej 6. Desarrollemos una $f (C^1$ a trozos) en las autofunciones del (P_{10}) de esa sección:

$$(P_{10}) \begin{cases} xy'' + y' + \lambda xy = 0 \\ y \text{ acotada en } x=0, y(1)=0 \end{cases} \rightarrow f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_n J_0(w_n x), \text{ peso } r(x)=x.$$

$$\rightarrow c_n = \frac{\int_0^1 x f(x) J_0(w_n x) dx}{\int_0^1 x J_0^2(w_n x) dx} = \frac{2}{J_1^2(w_n)} \int_0^1 x f(x) J_0(w_n x) dx$$

$$\text{pues } \int_0^1 x J_0^2(w_n x) dx = \frac{1}{w_n^2} \int_0^{w_n} u J_0^2(u) du = \frac{1}{2w_n^2} [u^2 (J_0^2(u) + J_1^2(u))]_0^{w_n} = \frac{1}{2} J_1^2(w_n)$$

$$\text{ya que las } J_n \text{ satisfacen } [x^n J_n]' = x^n J_{n-1} \rightarrow [x J_1]' = x J_0, J_0' = -J_1$$

$$\rightarrow \int u J_0^2 du = \frac{u^2}{2} J_0^2 + \int u J_0 u J_1 du = \frac{u^2}{2} J_0^2 + \frac{1}{2} [u J_1]^2$$

3.3. Problemas no homogéneos

Ej 1. Discutamos cuántas soluciones tiene $\begin{cases} y'' = x-d \\ y(1)=y(2)+by'(2)=0 \end{cases}$, d, b constantes.

La solución general es: $y = c_1 + c_2x + \frac{x^3}{6} - \frac{dx^2}{2}$ (con $y' = c_2 + \frac{x^2}{2} - dx$). Imponiendo datos:

$$\begin{cases} y(1) = c_1 + c_2 + \frac{1}{6} - \frac{d}{2} = 0 \\ y(2) + by'(2) = c_1 + 2c_2 + \frac{4}{3} - 2d + bc_2 + 2b - 2bd = 0 \end{cases}, \text{ es decir: } \begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{d}{2} - \frac{1}{6} \\ c_1 + (2+b)c_2 = 2bd + 2d - 2b - \frac{4}{3} \end{cases}$$

Este sistema lineal tiene solución única en c_1 y c_2 si el homogéneo tiene sólo la trivial (si el determinante de los coeficientes es no nulo). Cuando el homogéneo tenga infinitas soluciones, el no homogéneo tendrá infinitas o ninguna. Por tanto, si $b \neq -1$, podemos despejar de forma única c_1 y c_2 , y la solución queda determinada $\forall d$. Pero si $b = -1$:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{d}{2} - \frac{1}{6} \\ c_1 + c_2 = \frac{2}{3} \end{cases}, \text{ este sistema sólo tiene solución cuando } \frac{d}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow d = \frac{5}{3},$$

y en ese caso una de las dos constantes queda libre. Si $b = -1$, $d \neq \frac{5}{3}$, no hay solución.

Demos un teorema que generalice el ejemplo anterior. Consideremos el problema para la **ecuación no homogénea** con condiciones separadas homogéneas:

$$(P_f) \begin{cases} [p(x)y']' + g(x)y = f(x) \\ \alpha y(a) - \alpha' y'(a) = \beta y(b) + \beta' y'(b) = 0 \end{cases}, p \in C^1, g, f \in C, p > 0 \text{ en } [a, b].$$

y llamemos (P_h) al problema homogéneo asociado ($f \equiv 0$). Entonces:

Teor 1. El problema (P_f) tiene solución única si y sólo si (P_h) tiene sólo la solución $y \equiv 0$. Si (P_h) tiene soluciones no triviales $\{y_h\}$ entonces según sea $\int_a^b f(x)y_h(x) dx \stackrel{!}{=} 0$, (P_f) tiene $\begin{matrix} \text{infinitas soluciones} \\ \text{ninguna solución} \end{matrix}$.

$$\begin{matrix} 1 \rightarrow 1 \\ \infty \rightarrow \infty \\ 0 \end{matrix}$$

Gran parte del teorema sale de imponer las condiciones de contorno a la solución general de la ecuación $y = c_1y_1 + c_2y_2 + y_p$, usando las propiedades de los sistemas algebraicos lineales: tienen solución única si y sólo si el sistema homogéneo tiene sólo la trivial. Además si hay soluciones y de (P_f) debe ser (y esto se ve que también es suficiente):

$$\int_a^b f y_h = \int_a^b [(py')' + gy]y_h = [p(y_h y' - y y_h')]_a^b + \int_a^b [(py_h)'] + g y_h y = 0$$

Ej 1*. Para el Ej 1, (P_h) tiene sólo la solución $y \equiv 0$ si $b \neq -1$. Y si $b = -1$ es $y_h = \{1-x\}$.

El (P_f) [para $[y']' = x-d$], tendrá entonces solución única si $b \neq -1$, e infinitas ó 0, para $b = -1$, según se anule o no la integral: $\int_1^2 (x-d)(1-x) dx = \frac{d}{2} - \frac{5}{6} \Leftrightarrow d = \frac{5}{3}$.

Si en vez de la $x-d$ dada tuviésemos una $f(x)$ general, el teorema daría rápidamente:

única solución si $b \neq -1$, e $\begin{matrix} \text{infinitas} \\ \text{ninguna} \end{matrix}$, según $\int_1^2 f(x)(1-x) dx \stackrel{!}{=} 0$, para $b = -1$.

[Costaría bastante más decirlo a partir de la solución: $c_1 + c_2x + x \int_1^x f(s)ds - \int_1^x s f(s)ds$].

Ej 2. $\begin{cases} xy'' + 2y' = 3x-4 \\ 2y(1) + y'(1) = y(2) = 0 \end{cases}$ Determinemos cuántas soluciones tiene el problema. Para ello empezamos analizando el homogéneo (P_h) :

$$xy'' + 2y' = 0 \xrightarrow{\text{Euler o } y'=v} y = c_1 + \frac{c_2}{x}, y' = -\frac{c_2}{x^2} \rightarrow \begin{cases} 2c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + \frac{c_2}{2} = 0 \end{cases} \cdot \text{El homogéneo tiene infinitas soluciones } \left\{1 - \frac{2}{x}\right\}.$$

En forma S-L: $[x^2 y']' = 3x^2 - 4x$. $\int_1^2 (3x^2 - 4x)(1 - \frac{2}{x}) dx = \int_1^2 (3x^2 - 10x + 8) dx = 0$.

\Rightarrow el problema no homogéneo tiene **infinitas soluciones**.

[O directamente, hallando la solución general de la no homogénea:

$$y = c_1 + \frac{c_2}{x} + \frac{x^2}{2} - 2x, y' = -\frac{c_2}{x^2} + x - 2 \rightarrow \begin{cases} 2y(1) + y'(1) = 2c_1 + c_2 - 4 = 0 \\ y(2) = c_1 + \frac{c_2}{2} - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} c_2 = 4 - 2c_1, \\ c_1 \text{ cualquiera} \end{matrix}]$$

Ej 3. $\begin{cases} y''+y'-2y=1-2x \\ y(0)-y'(0)=y(1)=0 \end{cases}$ Estudiemos también cuántas soluciones tiene. Y volvemos a analizar primero el homogéneo (P_h):

$$y''+y'-2y=0 \rightarrow y=c_1e^x+c_2e^{-2x}, y'=c_1e^x-2c_2e^{-2x}, \begin{cases} 3c_2=0 \\ c_1+c_2e^{-2}=0 \end{cases} \rightarrow c_1=c_2=0.$$

Como el problema homogéneo tiene únicamente la solución $y \equiv 0$, nuestro problema no homogéneo **tiene una sola solución**.

[Imponiendo los datos en la solución de la no homogénea $y=c_1e^x+c_2e^{-2x}+x$ podemos obtener esa solución única: $y = \frac{1}{3}e^{-2x} - \frac{1+3e^2}{3e^3}e^x + x$].

Sea ahora el problema con **condiciones de contorno no homogéneas**:

$$(P_{AB}) \begin{cases} [p(x)y']' + g(x)y = f(x) \\ \alpha y(a) - \alpha' y'(a) = A, \beta y(b) + \beta' y'(b) = B \end{cases}, p \in C^1, g, f \in C, p > 0 \text{ en } [a, b],$$

y sea (P_h) el homogéneo con $f(x) \equiv 0, A=B=0$ (el de antes). Hallando una función v que satisfaga sus condiciones de contorno y haciendo $w=y-v$ el (P_{AB}) se reduce a otro del tipo (P_f) ya discutido en el teorema 1:

$$(P_w) \begin{cases} [p(x)w']' + g(x)w = f(x) - [p(x)v']' - g(x)v \\ \alpha w(a) - \alpha' w'(a) = 0, \beta w(b) + \beta' w'(b) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Teor 2. (P_{AB}) tiene solución única $\Leftrightarrow (P_h)$ tiene sólo la solución $y \equiv 0$

[y si (P_h) tiene infinitas soluciones, (P_{AB}) puede tener infinitas o ninguna].

La idea de hallar una v que cumpla las condiciones de contorno para hacerlas homogéneas se utiliza a menudo en las EDPs. Para encontrar la v normalmente se trabaja por tanteo. Si no es una constante, se prueba una recta; si no vale, funciones más complicadas... Aunque en (P_{AB}) sea $f(x) \equiv 0$, **si (al menos) una condición de contorno es no homogénea, las propiedades son las típicas de uno no homogéneo**. Como en el siguiente ejemplo.

Ej 4. Discutamos cuántas soluciones tiene: $(P_a) \begin{cases} xy'' - y' = 0 \\ y'(1) + ay(1) = 0, y(2) = 1 \end{cases}$

Comenzamos analizando cuántas soluciones tiene el homogéneo: $y = c_1 + c_2x^2 \rightarrow$

$$\begin{cases} y'(1) + ay(1) = 2c_2 + ac_1 + ac_2 = 0 & [2-3a]c_2 = 0 \\ y(2) = c_1 + 4c_2 = 0 & \rightarrow c_1 = -4c_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \equiv 0 & \text{si } a \neq \frac{2}{3} \\ y = x^2 - 4 & \text{si } a = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Si $a \neq \frac{2}{3}$, (P_a) tiene solución única. Para $a = \frac{2}{3}$ vemos lo que sucede directamente:

$$\begin{cases} y'(1) + \frac{2}{3}y(1) = \frac{2}{3}[c_1 + 4c_2] = 0 \\ y(2) = c_1 + 4c_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \text{no existe solución de } (P_{2/3}).$$

Aunque también podríamos (más largo) convertirlo en un (P_f) y aplicar el teorema 1. Para ello buscamos una v de la forma $v = Mx + N$ que satisfaga las condiciones:

$$\begin{cases} v'(1) + \frac{2}{3}v(1) = \frac{1}{3}[5M + 2N] = 0 \\ v(2) = 2M + N = 1 \end{cases} \rightarrow v = 5 - 2x, w = y - v \rightarrow (P_w) \begin{cases} xw'' - w' = -2 \\ w'(1) + \frac{2}{3}w(1) = w(2) = 0 \end{cases}$$

La f del teorema 1 es, desde luego, la de la ecuación escrita **en forma autoadjunta**,

con lo que, para aplicarlo, tenemos que reescribir nuestra ecuación: $[\frac{w'}{x}]' = -\frac{2}{x^2}$:

$$\int_1^2 [-\frac{2}{x^2}][x^2 - 4] dt = 2 \neq 0 \Rightarrow (P_w) \text{ [y por tanto } (P_{2/3}) \text{] no tiene solución.}$$

Consideremos ahora una tercera situación, el **problema de S-L no homogéneo**:

$$(P_\lambda) \begin{cases} [py']' - qy + \lambda ry = f(x) \\ \alpha y(a) - \alpha' y'(a) = \beta y(b) + \beta' y'(b) = 0 \end{cases}$$

Sea (P_s) el problema separado de Sturm-Liouville homogéneo (el de $f \equiv 0$). Para cada λ aparece un problema de los ya vistos (con $g = -q + \lambda r$). Se tiene por tanto:

Teor 3. (P_λ) tiene solución única $\Leftrightarrow \lambda$ no es autovalor de (P_s).
Si λ_n es autovalor con autofunción $\{y_n\}$,
 (P_{λ_n}) no tiene solución según sea $\int_a^b f y_n dx \neq 0$.
tiene infinitas $= 0$.

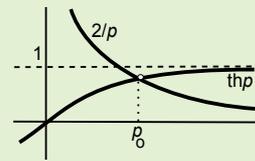
Ej 5. $(P_\lambda) \begin{cases} y'' + \lambda y = 1 \\ y'(0) = y'(1) - 2y(1) = 0 \end{cases}$ Estudiemos, según λ , cuántas soluciones tiene.

Hallemos los λ_n del homogéneo. Como $\beta\beta' < 0$ pueden aparecer autovalores negativos.

$$\lambda < 0: y = c_1 e^{p_0 x} + c_2 e^{-p_0 x} \rightarrow \begin{cases} c_2 = c_1 \\ c_1(p_0[e^{p_0} - e^{-p_0}] - 2[e^{p_0} + e^{-p_0}]) = 0 \end{cases}$$

Hay autovalor $\lambda_0 = -p_0^2$ si $\text{th } p_0 = \frac{2}{p_0}$, con $y_0 = \{\text{ch}(p_0 x)\}$

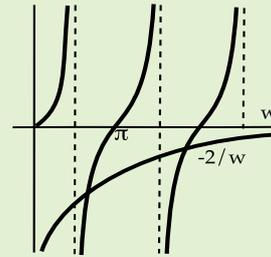
[Utilizando el método de Newton o uno similar: $p_0 \approx 2.07$, $\lambda_0 \approx -4.27$].



$$\lambda = 0: y = c_1 + c_2 x \rightarrow \begin{cases} c_2 = 0 \\ -2c_1 - c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda = 0 \text{ no es autovalor.}$$

$$\lambda > 0: y = c_1 \cos wx + c_2 \sin wx \rightarrow \begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1(w \sin w + 2 \cos w) = 0 \end{cases}$$

Hay infinitos $\lambda_n = w_n^2$ si $\tan w_n = -\frac{2}{w_n}$, con $y_n = \{\cos(w_n x)\}$.



Por tanto (la ecuación está ya en forma autoadjunta):

Si $\lambda \neq \lambda_n$ hay solución única de (P_λ) .

Si $\lambda = \lambda_0$, como $\int_0^1 \text{ch}(p_0 x) dx \neq 0$, (P_λ) no tiene solución.

Si $\lambda = \lambda_n$, $n = 1, 2, \dots$, $\int_0^1 \cos(w_n x) dx = \frac{\sin w_n}{w_n} \neq 0$, (P_λ) tampoco tiene solución.

Ej 6. $\begin{cases} x^2 y'' + x y' + \lambda y = x^2 - a \\ y(1) - y'(1) = y(2) - 2y'(2) = 0 \end{cases}$ Veamos si $\lambda = -1$ y $\lambda = 0$ son o no autovalores del problema homogéneo y discutamos cuántas soluciones tiene el no homogéneo.

$$\mu(\mu-1) + \mu + \lambda = 0, \mu = \pm \sqrt{-\lambda} \rightarrow \mu = \pm 1, \text{ si } \lambda = -1; \mu = 0, \text{ doble } \lambda = 0.$$

$$\lambda = -1: y = c_1 x + c_2 x^{-1} \rightarrow \begin{cases} 2c_2 = 0 \\ \frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{2}c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow c_2 = 0 \text{ y cualquier } c_1. \text{ Es autovalor con autofunción } \{x\}.$$

$$\lambda = 0: y = c_1 + c_2 \ln x \rightarrow \begin{cases} c_1 - c_2 = 0 \\ c_1 + c_2 \ln 2 - c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow c_1 = c_2 = 0. \text{ No es autovalor.}$$

Por tanto, para $\lambda = 0$ el homogéneo tiene sólo la solución trivial y el no homogéneo **tiene solución única** $\forall a$.

Para $\lambda = -1$ tendrá infinitas o ninguna. Para precisarlo debemos poner la ecuación en forma autoadjunta:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \lambda \frac{1}{x^2}y = 1 - \frac{a}{x^2}, e^{\int 1/x} = x, [xy']' + \lambda \frac{1}{x}y = x - \frac{a}{x}.$$

Tendrá infinitas o ninguna solución dependiendo del valor de:

$$\int_1^2 (x - \frac{a}{x}) x dx = \int_1^2 (x^2 - a) dx = \frac{7}{3} - a. \quad \text{Tiene infinitas soluciones si } a = \frac{7}{3}. \\ \text{Ninguna si } a \neq \frac{7}{3}.$$

[Bastante más largo sería hallar la solución particular de la no homogénea e imponer los datos].

4. Separación de variables

Este amplio capítulo se dedica a uno de los más antiguos métodos de resolución de EDPs lineales (el de separación de variables) que nos permitirá dar la solución (en forma de **serie de Fourier**) de gran parte de los problemas clásicos citados en el capítulo 1, en concreto de los planteados en un **intervalo finito** en una de las variables. Resolveremos la ecuación del calor con varias condiciones de contorno, la de la cuerda acotada, la de Laplace en rectángulos, círculos y esferas... Ello será posible porque las ecuaciones serán 'separables' y los recintos que consideraremos son simples, pero hay muchos problemas no resolubles por este método.

En la sección 4.1 resolveremos problemas para la ecuación del **calor** en 2 variables. Empezaremos con **problemas homogéneos** (aquellos en que son homogéneas ecuación y condiciones de contorno; si estas no lo son, primero haremos un cambio de variable). Básicamente esta será la técnica utilizada: buscaremos soluciones de la EDP que sean productos de funciones de cada variable $[u(x, t) = X(x)T(t)]$ y que cumplan todas las condiciones homogéneas; obtendremos infinitas soluciones de ese tipo resolviendo un problema de Sturm-Liouville (casi siempre para $X'' + \lambda X = 0$) y otra EDO; construiremos una serie a partir de ellas $[u(x, t) = \sum c_n X_n(x) T_n(t)]$, cuyos coeficientes c_n se fijarán imponiendo la condición inicial aún no utilizada (basta hacer un desarrollo de Fourier). La presencia de series exigiría justificar las cuestiones de convergencia, pero no entraremos en ello. Después trataremos los **problemas no homogéneos**, buscando también una serie solución. Probaremos en la ecuación una serie cuyos términos serán **productos de las autofunciones del problema homogéneo por funciones a determinar de la otra variable**. Resolviendo la familia infinita resultante de EDOs lineales no homogéneas con las condiciones que se deducen de las condiciones iniciales, se obtendrá la solución.

En 4.2 haremos lo mismo para la ecuación de **ondas**, aprovechando para comparar resultados con los obtenidos en 1.4 a través de extensiones y de la fórmula de D'Alembert. Veremos también un ejemplo para ondas en el espacio.

En la sección 4.3 utilizaremos la separación de variables para resolver problemas para la ecuación de **Laplace** (homogénea y no homogénea) tanto en coordenadas rectangulares como en polares y tanto para problemas de Dirichlet, como de Neumann, como mixtos. En cartesianas el problema de Sturm-Liouville a resolver será en x o en y según convenga, pero en polares será en la θ (preferible al de la ecuación de Euler que aparecería para la r). Las condiciones adicionales a imponer a la otra variable serán aquí de contorno (que en polares bastantes veces no están escritas explícitamente como hasta ahora). De las soluciones en forma de serie deduciremos fórmulas como la integral de Poisson, que da la solución del problema de Dirichlet en el círculo (otra forma de llegar a ella se verá en 4.5).

En 4.4 extenderemos el método de separación de variables a algunos problemas con **tres variables**. La técnica será muy parecida una vez definidas las **series de Fourier dobles**. Simplemente habrá que resolver dos (en vez de uno) problemas de Sturm-Liouville. Veremos ejemplos en que aparecen de forma natural las funciones que estudiamos en el capítulo 2: los polinomios de **Legendre** (para Laplace en la esfera) y las funciones de **Bessel** (estudiando la vibración de un tambor).

En 4.5 veremos brevemente las **funciones de Green**, primero en **problemas de contorno para EDOs**. Se escribirá la solución del problema **no homogéneo** en términos de una integral con el término no homogéneo f y la función de Green $G(x, s)$, construida con las soluciones del homogéneo. Luego se generalizará G para dar las soluciones en términos de integrales de la ecuación de **Laplace** en recintos sencillos, introduciendo el concepto de **solución fundamental** (función v tal que $\Delta v = \delta$) y utilizando el llamado **método de las imágenes**,

4.1. Separación de variables para el calor

Resolvamos varios problemas para la **ecuación del calor**. En el primero, con ecuación y datos homogéneos, los extremos de la varilla se mantienen a 0 grados y los datos iniciales vienen dados por una f que suponemos C^1 a trozos en $[0, L]$:

$$\text{Sea } [P_1] \begin{cases} u_t - k u_{xx} = 0, & x \in (0, L), t > 0 & [1] \\ u(x, 0) = f(x) & & [2] \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & & [3] \end{cases}$$

Busquemos soluciones de la forma $u(x, t) = X(x)T(t)$. Debe ser entonces:

$$X T' - k X'' T = 0, \text{ es decir, } \frac{X''}{X} = \frac{T'}{k T} \quad (\text{mejor que } \frac{k X''}{X} = \frac{T'}{T}).$$

Como el primer miembro es función sólo de x y el segundo lo es sólo de t ambos deben ser iguales a una constante:

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{k} \frac{T'}{T} = -\lambda \quad (\text{ponemos } -\lambda \text{ para que nos quede la ecuación habitual}).$$

Así obtenemos una EDO para $X(x)$ y otra para $T(t)$: $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 & [4] \\ T' + \lambda k T = 0 & [5] \end{cases}$.

El producto de una solución de [4] por una de [5] es entonces una solución de [1], cualquiera que sea λ . Sin embargo, aquí nos interesan sólo las soluciones que satisfacen las condiciones de contorno:

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

(si fuese $T(t) \equiv 0$ tendríamos $u \equiv 0$ y no se cumpliría la condición inicial).

$$\text{Análogamente, debe ser } X(L) = 0.$$

Nos interesan, pues, las soluciones (no triviales) del problema de Sturm-Liouville:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad X_n = \left\{ \sin \frac{n \pi x}{L} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

[Si el intervalo para la x fuese no acotado, no saldría un problema de contorno de los de 3.1; se utiliza entonces la transformada de Fourier de 1.5].

Llevando estos valores de λ a la ecuación [5] obtenemos:

$$T' = -\frac{k n^2 \pi^2}{L^2} T \rightarrow T_n = \left\{ e^{-k n^2 \pi^2 t / L^2} \right\}.$$

Hemos deducido hasta ahora que para cada n las funciones

$$u_n(x, t) = \left\{ e^{-k n^2 \pi^2 t / L^2} \sin \frac{n \pi x}{L} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

son soluciones de [1] que satisfacen también las condiciones de contorno [3]. Por la linealidad de la ecuación y de las condiciones, sabemos que una combinación lineal finita de estas u_n también cumple [1] y [3]. Pero consideremos la serie infinita:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-k n^2 \pi^2 t / L^2} \sin \frac{n \pi x}{L} \quad [6]$$

y supongamos que converge y que satisface también [1] y [3]. Si queremos que además se cumpla la condición inicial [2] debe ser:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n \pi x}{L} = f(x) \Rightarrow c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n \pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad [7]$$

pues la serie es precisamente la serie de Fourier en senos en $[0, L]$ de f . Hemos hallado la solución única de $[P_1]$: la serie [6] con coeficientes dados por [7].

Pero deberíamos comprobar que la convergencia es suficientemente buena para asegurar que realmente cumple el problema (una suma infinita de funciones derivables podría ser no derivable). Si f es C^1 a trozos, se prueba que la serie converge en $[0, L] \times (0, \infty)$, que define una función C^∞ en esa región y que u_t y u_{xx} se pueden hallar derivando término a término (y así se satisface la ecuación). En $x=0$ y $x=L$ es claro que u se anula. Y la condición inicial se cumple en este sentido: la $u(x, t)$ definida por la serie para $t > 0$ y por $u(x, 0)=f(x)$ es una función continua salvo en los puntos de $t=0$ en que f es discontinua. Aunque f sea discontinua, la solución es C^∞ para cualquier $t > 0$ arbitrariamente pequeño: a diferencia de lo que ocurre con las ondas, las discontinuidades desaparecen en el calor instantáneamente, como ya dijimos al resolverla con la \mathcal{F} en la recta infinita.

Como cada $u_n \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ y es buena la convergencia, se tiene: $u(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \quad \forall x \in [0, L]$

(la varilla tiende a ponerse a 0 grados, como era de esperar).

Suponemos ahora que las **condiciones de contorno son no homogéneas**:

$$[P_2] \begin{cases} u_t - k u_{xx} = 0, & x \in (0, L), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u(0, t) = T_1, u(L, t) = T_2, & T_1, T_2 \text{ constantes} \end{cases}$$

Comenzaremos siempre haciendo cero las condiciones de contorno si no lo son.

[Si separásemos variables directamente en $[P_2]$ llegaríamos a $X(0)T(t) = T_1$ (y otra análoga para $x=L$), expresión de la que no deduciríamos nada].

Una $v(x)$ que las satisface es la recta: $v = [1 - \frac{x}{L}]T_1 + \frac{x}{L}T_2$.

Haciendo $w = u - v$, nuestro problema se convierte en otro como el $[P_1]$:

$$\begin{cases} w_t - k w_{xx} = 0, & x \in (0, L), t > 0 \\ w(x, 0) = f(x) - v(x) \\ w(0, t) = w(L, t) = 0 \end{cases} \quad \text{. Por tanto:}$$

$$u(x, t) = [1 - \frac{x}{L}]T_1 + \frac{x}{L}T_2 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-kn^2\pi^2 t/L^2} \text{sen} \frac{n\pi x}{L} = v + w,$$

$$\text{con } c_n = \frac{2}{L} \int_0^L [f(x) - v(x)] \text{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n=1, 2, \dots$$

Esta $v(x)$ tiene un significado físico claro: como $w \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, $v(x)$ es la **distribución estacionaria** de temperaturas hacia la que tienden las temperaturas en la varilla, independientemente de las condiciones iniciales.

[Si T_1 y T_2 fuesen funciones de t , la $v(x, t)$ definida arriba (la misma que citamos resolviendo la cuerda finita por D'Alembert) seguiría cumpliendo las condiciones de contorno. Pero la ecuación para la w obtenida haciendo el cambio sería, en general, no homogénea, es decir, del tipo de las que vamos a resolver a continuación. Dicha v , función de t , pierde además su significado físico.

No perdamos de vista que para otros datos de contorno diferentes habrá que hallar $v(x, t)$ diferentes. Algunas veces no dependerán de x , otras serán rectas como aquí, quizás haya que probar parábolas o mejor otras funciones...].

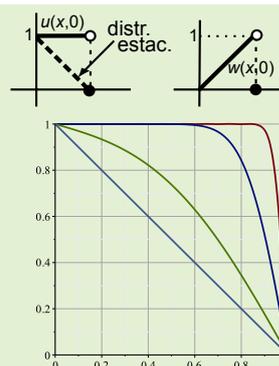
Ej 1.

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = 1, u(0, t) = 1, u(1, t) = 0 \end{cases}$$

Operando se llega a: $u = 1 - x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-n^2\pi^2 t} \text{sen}(n\pi x)$
que tiende hacia la distribución estacionaria $v(x) = 1 - x$.

[No nos importa que para $t=0$ sea incoherente el dato inicial con el de contorno en $x = 1$; la solución será, como hemos dicho, una función continua para $t > 0$ y para el cálculo de las integrales el valor en un punto no influye].

[A la derecha, el dibujo (hecho con Maple) de la solución para $t = 0.001, 0.01, 0.1, 1$ (utilizando 20 sumandos de la serie)].



Veamos cómo resolver el **problema no homogéneo** con datos homogéneos:

$$[P_3] \begin{cases} u_t - ku_{xx} = F(x, t), & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

(Tomamos $L = \pi$ para abreviar las expresiones, pero no se pierde generalidad pues un sencillo cambio de variable lleva $[0, L]$ a $[0, \pi]$).

[Si las condiciones de contorno de $[P_3]$ fuesen no homogéneas empezariamos como en $[P_2]$ con un cambio $w = u - v$ para conseguir que lo fuesen].

Las autofunciones del $[P_1]$ eran $\{\sin nx\}$, $n = 1, 2, \dots$. Probamos en $[P_3]$ la siguiente serie (relacionada con la ecuación) que ya satisface las condiciones de contorno:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin nx \quad \text{con las } T_n(t) \text{ funciones a determinar.}$$

[Si no se hubiesen hallado antes las autofunciones del homogéneo, se comenzaría calculándolas. En un problema no homogéneo siempre se prueba una **serie de autofunciones del homogéneo**].

[Si tomásemos $T_n = c_n e^{-kn^2 t}$, funciones que aparecieron resolviendo el $[P_1]$, la u satisfaría la ecuación con $F \equiv 0$; así que debemos darle más libertad a las T_n para conseguir, al meter la serie en la ecuación, una $F \neq 0$].

Suponiendo que la serie se puede derivar término a término:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [T'_n(t) + kn^2 T_n(t)] \sin nx = F(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \sin nx$$

$$\text{con } B_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(x, t) \sin nx \, dx \quad (\text{desarrollo de } F \text{ en senos para } t \text{ fijo}).$$

Entonces para cada n debe ser: $T'_n + kn^2 T_n = B_n(t)$.

Y del dato inicial deducimos, desarrollando en serie:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin nx = f(x) \Rightarrow T_n(0) = c_n, \text{ con } c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

Hallando la solución única de esta familia de problemas con la EDO lineal para T_n :

$$\begin{cases} T'_n + kn^2 T_n = B_n(t) \\ T_n(0) = c_n \end{cases}$$

(utilizando la fórmula de las lineales de primer orden o, a veces, mejor por tanteo), obtenemos la $T_n(t)$ y, con ello, la solución de $[P_3]$.

[Como siempre faltaría comprobar (justificando la convergencia) que esta serie es solución de verdad, que es realmente lo que sucede si f y F son decentes].

Otra posibilidad de resolver $[P_3]$ sería descomponerlo en dos subproblemas algo más sencillos $[P_1]$ y $[P_F]$, el primero con $F = 0$ (ya resuelto) y el otro con $f = 0$:

$$[P_1] \begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

$$[P_F] \begin{cases} u_t - ku_{xx} = F(x, t) \\ u(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

La solución u_F de $[P_F]$ se hallaría como arriba, simplemente sustituyendo los datos iniciales $T_n(0) = c_n$ por los homogéneos $T_n(0) = 0$.

La solución u de $[P_3]$ (gracias a la linealidad de la ecuación y de las condiciones iniciales y de contorno) sería la suma de esta u_F y de la serie solución de $[P_1]$ que obtuvimos anteriormente.

[Normalmente descomponer en subproblemas es una pérdida de tiempo. Quizás sólo pueda ser útil si alguno de ellos estuviese ya resuelto, como es nuestro caso].

Resolvemos ahora el problema homogéneo para la varilla con **extremos aislados**:

$$[P_4] \begin{cases} u_t - k u_{xx} = 0, & x \in (0, L), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0 \end{cases}$$

Separando variables (es la misma ecuación) aparecen, claro, las mismas EDOs del problema [P₁]. Pero ahora cambian las condiciones de contorno de la X:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(L) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad n=0, 1, 2, \dots, \quad X_n = \left\{ \cos \frac{n\pi x}{L} \right\} [X_0 = \{1\}].$$

Para estos valores de λ se tienen las $T_n = \{e^{-kn^2 \pi^2 t / L^2}\} [T_0 = \{1\}]$.

Así pues, probamos la serie:
$$u(x, t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-kn^2 \pi^2 t / L^2} \cos \frac{n\pi x}{L}$$

Queremos que se satisfaga la condición inicial: $u(x, 0) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{L} = f(x)$.

Los c_n desconocidos serán los coeficientes de la serie de Fourier en cosenos de f :

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Observemos que de nuevo la solución se puede interpretar como la suma de una distribución de temperaturas estacionaria [$c_0/2$] y una distribución transitoria que tiende a 0 cuando $t \rightarrow \infty$. Era esperable que toda la varilla (aislada) tendiese a la misma temperatura y que esta fuese el valor medio de las temperaturas iniciales:

$$\frac{c_0}{2} = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx$$

Si los datos de contorno hubiesen sido $u_x(0, t) = F_0(t)$, $u_x(L, t) = F_L(t)$ (flujo dado en los extremos), en general, no se puede encontrar una $v(x, t)$ que sea una recta y, al hacer $w = u - v$, la ecuación en w que resulta es no homogénea.

Para resolver un problema no homogéneo con estas condiciones en la u_x , probaríamos la serie con las **autofunciones del homogéneo** que hemos hallado:

$$u(x, t) = T_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cos \frac{n\pi x}{L},$$

y resolveríamos las EDOs que surgirían, con los datos iniciales deducidas del dato inicial de la EDP.

Ej 2.
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u_x(0, t) = 0, u_x(1, t) = 2 \end{cases}$$

Tanteando con $v = Ax^2 + Bx$ obtenemos que $v = x^2$ cumple las condiciones de contorno. Y haciendo $w = u - x^2$ se tiene el problema:

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} = 2 \\ w(x, 0) = -x^2 \\ w_x(0, t) = w_x(1, t) = 0 \end{cases} \rightarrow w = T_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cos n\pi x \rightarrow T_0' + \sum_{n=1}^{\infty} [T_n' + n^2 \pi^2 T_n] \cos n\pi x = 2$$

[función que ya está desarrollada en cosenos].

$$T_0(0) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \cos n\pi x = -x^2 = -\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x, \quad \text{con } a_n = -2 \int_0^1 x^2 \cos n\pi x dx$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T_0' = 2 \\ T_0(0) = -\frac{1}{3} \end{cases}, \quad \begin{cases} T_n' + n^2 \pi^2 T_n = 0 \\ T_n(0) = a_n \end{cases}. \quad \text{Resolviendo y deshaciendo el cambio se llega a}$$

$$u(x, t) = 2t + x^2 - \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{-n^2 \pi^2 t} \cos n\pi x$$

[$u \rightarrow \infty$ pues por el extremo derecho estamos constantemente metiendo calor: su flujo va en sentido opuesto al gradiente de temperaturas].

Más ejemplos de separación de variables para el calor o EDPs similares. El primero es no homogéneo. Y sus condiciones de contorno no nos han aparecido aquí todavía:

Ej 3.
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = t \operatorname{sen} x, & x \in (0, \frac{\pi}{2}), t > 0 \\ u(x, 0) = u(0, t) = u_x(\frac{\pi}{2}, t) = 0 \end{cases}$$
 Para saber qué solución probar, necesitamos las autofunciones del homogéneo. Al separar variables en $u_t - u_{xx} = 0$ vimos que aparecía:

$X'' + \lambda X = 0$ (además de $T' + \lambda T = 0$ que ahora no nos importa). Esto, con las condiciones $X(0) = X'(\frac{\pi}{2}) = 0$ que salen de los datos de contorno nos da (problema conocido en 3.2) dichas autofunciones: $X_n = \{\operatorname{sen}(2n-1)x\}$, $n=1, 2, \dots$. Llevamos, pues, a la ecuación:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \operatorname{sen}(2n-1)x \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} [T'_n + (2n-1)^2 T_n] \operatorname{sen}(2n-1)x = t \operatorname{sen} x.$$

La $F(x, t)$ de la derecha ya está desarrollada en esas autofunciones (no hay que integrar). Hemos obtenido las ecuaciones ordinarias: $T'_1 + T_1 = t$ y $T'_n + (2n-1)^2 T_n = 0$, $n > 1$.

Del dato inicial deducimos: $u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \operatorname{sen}(2n-1)x = 0 \rightarrow T_n(0) = 0 \forall n$.

La única $T_n \neq 0$ saldrá de: $\begin{cases} T'_1 + T_1 = t \\ T_1(0) = 0 \end{cases} \rightarrow T_1 = Ce^{-t} + e^{-t} \int e^t t dt = Ce^{-t} + t - 1$
[O más corto: $T_{np} = At + B \rightarrow A + At + B = t$].

Imponiendo $T_1(0) = 0$, hallamos T_1 y la solución única: $u(x, t) = (e^{-t} + t - 1) \operatorname{sen} x$.

[La 'serie solución' sólo tiene un término y no hemos necesitado integrales para dar los c_n y B_n . Esto ocurrirá si las f o F son autofunciones o sumas finitas de ellas].

El siguiente nos sirve para reflexionar sobre las v que hacen cero las condiciones de contorno (siempre necesario).

Ej 4.
$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = 1 \\ u_x(0, t) = 0, u(\pi, t) = e^{-4t} \end{cases}$$
 Tenemos también probada (en 1.3) su unicidad. Una v que cumple las condiciones de contorno salta a la vista: $v(t) = e^{-4t}$. Haciendo $w = u - v$:

$$\begin{cases} w_t - 4w_{xx} = [u_t - 4u_{xx}] - [v_t - 4v_{xx}] = 4e^{-4t} \\ w(x, 0) = w_x(0, t) = w(\pi, t) = 0 \end{cases}$$
 [problema no homogéneo].

Aquí las autofunciones las da $X'' + \lambda X = 0$ con $X'(0) = X(\pi) = 0$, lo que nos lleva a:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cos \frac{(2n-1)x}{2} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} [T'_n + (2n-1)^2 T_n] \cos \frac{(2n-1)x}{2} = 4e^{-4t} \rightarrow$$

$$\begin{cases} T'_n + (2n-1)^2 T_n = B_n e^{-4t} \\ T_n(0) = 0 \text{ (del dato inicial)} \end{cases}, \text{ con } B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 4 \cos \frac{(2n-1)x}{2} dx = \frac{16(-1)^{n+1}}{\pi(2n-1)}.$$

Resolvemos la EDO lineal utilizando coeficientes indeterminados: $T_{np} = Ae^{-4t} \rightarrow$

$$T_n = Ce^{-(2n-1)^2 t} + \frac{B_n e^{-4t}}{(2n-1)^2 - 4} \xrightarrow{T_n(0)=0} T_n(t) = \frac{16(-1)^{n+1}}{\pi(2n-3)(2n-1)(2n+1)} [e^{-4t} - e^{-(2n-1)^2 t}].$$

¿Podríamos encontrar una v mejor que no estropee la homogeneidad de la ecuación? Buscamos $v(x, t)$ que también la cumpla. Al separar variables vimos que es solución, para todo λ , el producto de soluciones de $X'' + \lambda X = 0$ y de $T' + 4\lambda T = 0$. En particular, $\forall A, B$ lo es: $v = e^{-4t}(A \cos x + B \operatorname{sen} x)$. Imponiendo a esta v los datos de contorno:

$$v = -e^{-4t} \cos x \xrightarrow{u=v+w} \begin{cases} w_t - 4w_{xx} = 0 \\ w(x, 0) = 1 + \cos x \\ w_x(0, t) = w(\pi, t) = 0 \end{cases}$$
 [problema homogéneo y, por tanto, más sencillo] \rightarrow

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(2n-1)^2 t} \cos \frac{(2n-1)x}{2} \rightarrow w(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{(2n-1)x}{2} = 1 + \cos x \rightarrow$$

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1 + \cos x) \cos \frac{(2n-1)x}{2} dx = \frac{2(-1)^n}{\pi} \left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n-3} - \frac{2}{2n-1} \right].$$

Evidentemente, deben coincidir las soluciones halladas por los dos caminos:

$$u = e^{-4t} + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cos \frac{(2n-1)x}{2} \text{ y } u = -e^{-4t} \cos x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(2n-1)^2 t} \cos \frac{(2n-1)x}{2}.$$

[Observemos que las soluciones tienden a 0 cuando $t \rightarrow \infty$. Esto era esperable, pues uno de los extremos está aislado y al otro le obligamos a tener una temperatura que tiende a 0].

En este, la condición de $x=0$ representa la radiación libre hacia un medio a 0° (el flujo de calor es proporcional a la temperatura: si es positiva el calor sale y entra si es negativa). En $x=1$ fijamos el flujo de calor que sale de la varilla (al ser $u_x > 0$, es hacia la izquierda).

Ej 5.
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = x \\ u_x(0, t) - au(0, t) = 0, & a > 0 \\ u_x(1, t) = 1 \end{cases}$$
 Vimos en 1.3 que tiene solución única. Lo primero, como siempre, es hacer homogéneas las condiciones de contorno. Tanteando con rectas $v = Mx + N$, se llega a que las satisface:

$$v = x + \frac{1}{a}, \quad w = u - v \rightarrow \begin{cases} w_t - w_{xx} = 0 \\ w(x, 0) = -\frac{1}{a}, \quad w_x(0, t) - aw(0, t) = w_x(1, t) = 0 \end{cases}$$

Separando variables se llega a $T' + \lambda T = 0$ y al problema de contorno:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) - aX(0) = X'(1) = 0 \end{cases} \quad \text{que sabemos que no tiene autovalores } < 0.$$

Si $\lambda = 0$: $X = c_1 + c_2 x \rightarrow \begin{cases} c_2 - ac_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda = 0$ no autovalor.

Si $\lambda > 0$: $X = c_1 \cos wx + c_2 \sin wx$, $w = \sqrt{\lambda} \rightarrow$

$$\begin{cases} c_2 w - ac_1 = 0 \\ c_2 \cos w - c_1 \sin w = 0 \end{cases} \rightarrow c_2 = \frac{a}{w} c_1 \rightarrow$$

$$c_1 (a \cos w - w \sin w) = 0 \rightarrow \tan w = \frac{a}{w}.$$

Esta ecuación trascendente nos da los infinitos $\lambda_n = w_n^2 > 0$ (aproximables numéricamente).

Las autofunciones son: $\left\{ \cos w_n x + \frac{a}{w_n} \sin w_n x \right\}$,

aunque quedan más compactas escritas en la forma: $X_n = \left\{ \cos w_n (x-1) \right\}$.

Yendo a la ecuación en T : $T_n = \{e^{-\lambda_n t}\} \rightarrow w = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n t} X_n(x)$.

Imponiendo el dato inicial se determinan los c_n [serían aproximados al ser los λ_n]:

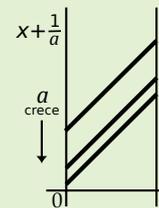
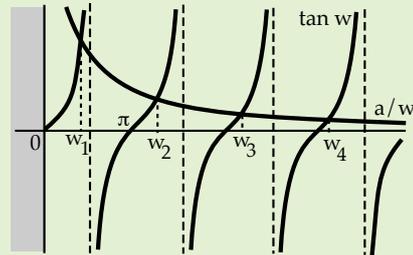
$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x) = -\frac{1}{a} \rightarrow c_n = -\frac{1}{(X_n, X_n)} \int_0^1 \frac{1}{a} X_n(x) dx = -\frac{4 \sin w_n}{a(2w_n + \sin 2w_n)},$$

$$\text{pues } \int_0^1 [X_n(x)]^2 dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{4w_n} [\sin 2w_n (x-1)]_0^1.$$

Sí es calculable exactamente la distribución estacionaria hacia la que tienden las temperaturas en la varilla:

$$u(x, t) = w(x, t) + x + \frac{1}{a} \rightarrow x + \frac{1}{a} \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty$$

[La temperatura final de la varilla, como era esperable, es menor cuanto mayor sea el a , es decir, cuanto más fuertemente irradie su extremo].



En los últimos ejemplos que tratamos vemos que se puede aplicar el método de separación de variables para otras ecuaciones separables (y no sólo para la del calor).

Ej 6.
$$\begin{cases} u_t - 4(1+2t)u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = 1, \quad u(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 \end{cases}$$
 Problema homogéneo. Primero separamos variables $u = XT$ en la nueva ecuación:

$$XT' = (4+8t)X''T, \quad \frac{X''}{X} = \frac{T'}{(4+8t)T} = -\lambda \rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases}, \quad \lambda_n = \frac{(2n-1)^2}{4}, \quad X_n = \left\{ \sin \frac{(2n-1)x}{2} \right\},$$

$n = 1, 2, \dots$

Y además: $T' + 4\lambda_n(1+2t)T = T' + (2n-1)^2(1+2t)T = 0 \rightarrow T_n = \left\{ e^{-(2n-1)^2(t+t^2)} \right\}$.

Probamos entonces la solución: $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(2n-1)^2(t+t^2)} \sin \frac{(2n-1)x}{2}$.

Para determinar los c_n imponemos el dato inicial: $u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{(2n-1)x}{2} = 1 \rightarrow$

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin \frac{(2n-1)x}{2} x dx = -\frac{4}{\pi(2n-1)} \left[\cos \frac{(2n-1)x}{2} \right]_0^\pi = \frac{4}{\pi(2n-1)}.$$

Por tanto, la solución el problema es: $u(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} e^{-(2n-1)^2(t+t^2)} \sin \frac{(2n-1)x}{2}$.

[Para ser serios habría que probar su unicidad siguiendo la demostración del calor].

[Ya hemos dicho que la ecuación del calor (y similares) admiten datos discontinuos].

Ej 7.
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + 3u = F(x), & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

[El término $+3u$ representa una pérdida de calor al medio a lo largo de la varilla].

Hallemos: a) Su solución si $F(x) = 4 \sin x$.
b) 2 términos de la serie solución si $F(x) = \pi$.

Busquemos las X_n del homogéneo:

Separando variables: $u(x, t) = X(x)T(t) \rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} + 3 = -\lambda$ [damos el 3 mejor a la T] \rightarrow

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = n^2, n = 1, 2, \dots, X_n = \{\sin nx\}.$$

[Y además $T' + (3 + \lambda)T = 0$, que aquí no se utiliza por ser problema no homogéneo].

Llevamos $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin nx$ a la EDP y al dato inicial para calcular los T_n :

$$\sum_{n=1}^{\infty} [T'_n + (n^2 + 3)T_n] \sin nx = F(x),$$

a desarrollar en $\sin nx$ para igualar las expresiones.

Además: $u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin nx = 0 \rightarrow T_n(0) = 0 \forall n$. Nos queda en cada caso:

a) $T'_1 + 4T_1 = 4 \rightarrow T_1 = 1 - e^{-4t}$, y los demás $T_n = 0$. La solución es $u = (1 - e^{-4t}) \sin x$.

b) El desarrollo es $\pi = 4 \sin x + \frac{4}{3} \sin 3x + \dots$, pues $c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \pi \sin nx \, dx = 2 \frac{1 - (-1)^n}{n}$.

A la vista de este desarrollo, es no nulo T_1 [el de a)] y el siguiente no nulo lo da:

$$\frac{T'_3 + 12T_3}{T_3(0) = 0} = \frac{4}{3} \rightarrow T_3 = \frac{1}{9}(1 - e^{-12t}) \rightarrow u = (1 - e^{-4t}) \sin x + \frac{1}{9}(1 - e^{-12t}) \sin 3x + \dots$$

[Se puede ver casi igual que para el calor que la solución es única; o bien, haciendo $u = e^{-3t}w$ se obtiene un problema para el calor con esos datos, cuya unicidad ya demostramos].

Hasta ahora la EDO del problema de Sturm-Liouville siempre ha sido $X'' + \lambda X = 0$, y, por eso, las series de Fourier eran todas con peso $r(x) = 1$. Resolvamos un ejemplo para una EDP parecida a la del calor en el que aparece otra ecuación ordinaria para la que es necesario utilizar la teoría más general del capítulo 3.

Ej 8.
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - 4u_x - 4u = 0, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = e^{-2x}, & u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

$u = XT \rightarrow \frac{T'}{T} = \frac{X'' + 4X'}{X} + 4 = -\lambda$ más corto ahora aquí \rightarrow

$$\begin{cases} X'' + 4X' + (4 + \lambda)X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

(en forma autoadjunta $[e^{4x}X']' + 4e^{4x}X + \lambda e^{4x}X = 0$) y $T' + \lambda T = 0$.

Hay que resolver el problema de contorno (y debemos tratar los $\lambda < 0$). $\mu = -2 \pm \sqrt{-\lambda}$.

$\lambda < 0$: $X = c_1 e^{(-2+\rho)x} + c_2 e^{(-2-\rho)x} \stackrel{CC}{\rightarrow} X \equiv 0$. $\lambda = 0$: $X = (c_1 + c_2 x) e^{-2x} \stackrel{CC}{\rightarrow} X \equiv 0$.

$\lambda > 0$: $X = (c_1 \cos wx + c_2 \sin wx) e^{-2x}$, $c_1 = 0$, $c_2 e^{-2\pi} \sin w\pi = 0$, $\lambda_n = n^2$, $X_n = \{e^{-2x} \sin nx\}$
 $n = 1, 2, \dots$

Probamos pues la solución: $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} e^{-2x} \sin nx$. Falta el dato inicial:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-2x} \sin nx = e^{-2x}.$$

Aunque hay atajos seguimos con la teoría general:

Para calcular los c_n necesitamos hallar $\langle X_n, X_n \rangle = \int_0^{\pi} e^{4x} e^{-4x} \sin^2 nx \, dx = \frac{\pi}{2}$,

y además: $\langle e^{-2x}, X_n \rangle = \int_0^{\pi} e^{4x} e^{-2x} e^{-2x} \sin nx \, dx = -\frac{1}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} = \frac{1 - (-1)^n}{n}$.

Por tanto, la solución es: $u(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-(2m-1)^2 t}}{2m-1} e^{-2x} \sin(2m-1)x$.

Veamos ahora los atajos. El primero es observar que la igualdad de $u(x, 0)$ equivale a:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx = 1 \text{ (desarrollo de 1 en senos)} \rightarrow c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx \text{ (calculado arriba).}$$

El segundo viene de recordar (1.2) que cambios $u = e^{pt+qx} w$ simplifican la ecuación. Podríamos tantear, pero en este caso todo pide hacer:

$$u = e^{-2x} w \rightarrow u_t = e^{-2x} w_t, u_x = e^{-2x} [w_x - 2w], u_{xx} = e^{-2x} [w_{xx} - 4w_x + 4w] \rightarrow$$

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} = 0 \\ w(x, 0) = 1, w(0, t) = w(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

, problema cuya solución ya calculamos (pág. 54).

4.2. Separación de variables para ondas

Resolvamos el problema para la **cuerda vibrante** con **extremos fijos** (en 1.4 lo resolvimos extendiendo los datos y aplicando la fórmula de D'Alembert):

$$[P_1] \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x \in [0, L], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x) \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \end{cases}$$

Separando variables $u = X(x)T(t)$ e imponiendo los datos de contorno obtenemos:

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} = -\lambda \rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & X(0) = X(L) = 0 \\ T'' + \lambda c^2 T = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, X_n = \left\{ \sin \frac{n\pi x}{L} \right\}_{n=1, 2, \dots}$$

Las T_n correspondientes son combinaciones lineales de $\sin \frac{n\pi ct}{L}$ y $\cos \frac{n\pi ct}{L}$.

Así, funciones de la forma: $u_n(x, t) = \left[k_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + c_n \sin \frac{n\pi ct}{L} \right] \sin \frac{n\pi x}{L}$, $n = 1, 2, \dots$

satisfacen la EDP y las condiciones de contorno. Probamos, pues:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[k_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + c_n \sin \frac{n\pi ct}{L} \right] \sin \frac{n\pi x}{L}$$

con k_n y c_n constantes. Para que se cumplan las condiciones iniciales:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \sin \frac{n\pi x}{L} = f(x) \rightarrow k_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, n = 1, 2, \dots$$

y suponiendo que la serie se puede derivar término a término:

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} = g(x) \rightarrow c_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, n = 1, 2, \dots$$

pues $\frac{n\pi c}{L} c_n$ son los coeficientes del desarrollo de g en senos.

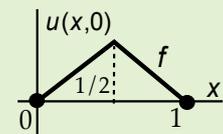
Tenemos una solución, formal en principio, aunque se prueba que las series convergen y satisfacen realmente el problema si f y g cumplen las condiciones que pedimos en 1.4: si sus extensiones impares respecto a 0 y L son C^2 y C^1 , respectivamente (si f ó g no son tan regulares la serie solución representará lo que llamamos una solución débil; en las ondas no desaparecen las discontinuidades).

Para algunas cuestiones (valores concretos, dibujos, ...) será mejor usar D'Alembert, pero se ven mejor otras propiedades en la serie. Por ejemplo, como cada u_n es $2L/c$ -periódica en t , también u tiene este periodo. Observemos además que la solución aparece como combinación infinita de 'modos naturales de vibración' [$\sin(n\pi x/L)$] cada uno de los cuales vibra con una frecuencia $n\pi c/L$ ('frecuencias naturales' de la cuerda). En términos acústicos u_1 da el tono fundamental (su frecuencia es $\pi c/L$) y los demás son los 'armónicos' (de frecuencia múltiplo de la anterior).

Como siempre, para empezar a resolver por separación de variables, han de ser las condiciones de contorno homogéneas. Y para los problemas no homogéneos se prueban series de autofunciones del homogéneo.

Ej 1.
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in [0, 1], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1-x, & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \\ u_t(x, 0) = u(0, t) = u(1, t) = 0 \end{cases}$$

(Ejemplo 7 de 1.4 que podía representar la pulsación de la cuerda de una guitarra).



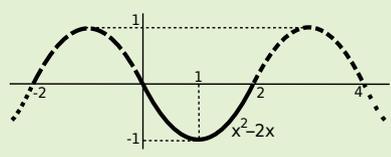
Basta copiar de arriba: $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \cos n\pi t \sin n\pi x$ (2-periódica),
 con $k_n = 2 \int_0^{1/2} x \sin n\pi x dx + 2 \int_{1/2}^1 (1-x) \sin n\pi x dx = \frac{4}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}$ (=0 si n par).
 (Pulsando la cuerda en el centro desaparecen los armónicos pares).

Ej 2.
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in [0, 2], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = x^2, & u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = 0, & u(2, t) = 4 \end{cases}$$

Hallemos $u(1, 2)$ y $u(x, 1)$, con D'Alembert y separando variables. En ambos casos, lo primero es hacer las condiciones de contorno homogéneas.

La $v(x, t) = [1 - \frac{x}{L}]h_0(t) + \frac{x}{L}h_L(t)$ citada en 1.4 (y en la sección anterior) es adecuada:

$$v = 2x, w = u - 2x \rightarrow \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0, & x \in [0, 2] \\ w(x, 0) = x^2 - 2x, & w_t(x, 0) = 0 \\ w(0, t) = w(2, t) = 0 \end{cases}$$



Para D'Alembert ebemos extender f de forma impar y 4-periódica a f^* definida en \mathbf{R} :

$$\dots, -x(x+2) \text{ en } [-2, 0], x(x-2) \text{ en } [0, 2], -(x-4)(x-2) \text{ en } [2, 4], \dots$$

La solución viene dada por $w = \frac{1}{2}[f^*(x+t) + f^*(x-t)]$. Por tanto:

$$w(1, 2) = \frac{1}{2}[f^*(3) + f^*(-1)] \underset{4\text{per}}{=} \frac{1}{2}[f^*(-1) + f^*(-1)] \underset{\text{impar}}{=} -f(1) = 1 \rightarrow u(1, 2) = 3.$$

Para hallar $w(x, 1)$ aparecen dos casos (se podría ver con los dominios de dependencia):

$$w(x, 1) = \frac{1}{2}[f^*(x+1) + f^*(x-1)] = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1, & \frac{1}{2}[-(x-1)(x+1) + (x+1)(x-1)] = 0 \\ 1 \leq x \leq 2, & \frac{1}{2}[-(x-1)(x-3) + (x-3)(x-1)] = 0 \end{cases} \rightarrow u(x, 1) = 2x.$$

[Es claro que llevando f^* una unidad a izquierda y derecha y sumando todo se cancela].

Para resolver el problema en w separando variables copiamos de la página anterior:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \cos \frac{n\pi t}{2} \sin \frac{n\pi x}{2} \text{ con } k_n = \int_0^2 (x^2 - 2x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{16}{n^3 \pi^3} [\cos n\pi - 1]$$

$$\rightarrow w(x, t) = -\frac{32}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^3} \cos \frac{(2m-1)\pi t}{2} \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2}.$$

Para $t=1$ todos los cosenos se anulan, con lo que $w(x, 1) = 0$ (como por D'Alembert).

Además $w(1, 2) = \frac{32}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)^3} [= 1; \text{ deducimos que } 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots = \frac{\pi^3}{32}]$.

Ej 3.
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = x, & x \in [0, \pi], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin nx$$

Esta serie ya se anula en $x=0$ y $x=\pi$. Además debe cumplirse:

$$T_n'' + n^2 T_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = \frac{2[-1]^{n+1}}{n} \rightarrow T_n = c_1 \cos nt + c_2 \sin nt + \frac{2[-1]^{n+1}}{n^3}$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \rightarrow T_n(0) = T_n'(0) = 0 \rightarrow u(x, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[-1]^{n+1}}{n^3} [1 - \cos nt] \sin nx.$$

De otra forma: podríamos conseguir un problema homogéneo hallando una solución de la ecuación $v(x)$ que cumpla las condiciones de contorno:

$$-v'' = x \rightarrow v = c_1 + c_2 x - \frac{1}{6} x^3 \xrightarrow{v(0)=v(\pi)=0} v = \frac{1}{6} (\pi^2 x - x^3).$$

Con $w = u - v$, acabamos en $[P_1]$, con $f(x) = -v(x)$ y $g(x) = 0$, con lo que:

$$u = \frac{1}{6} (\pi^2 x - x^3) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[-1]^n}{n^3} \cos nt \sin nx, \text{ pues } \frac{1}{3\pi} \int_0^{\pi} (x^3 - \pi^2 x) \sin nx dx = \frac{2[-1]^n}{n^3}.$$

Aunque las series anteriores dan la solución $\forall(x, t)$, el problema es obtener (sin ordenador) información sobre ellas. Por ejemplo, ¿qué aspecto tendrá:

$$u(x, \pi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{(2m-1)^3} \sin(2m-1)x = \frac{1}{6} (\pi^2 x - x^3) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3} \sin nx?$$

Esto es fácil decirlo con D'Alembert en este caso. La solución del problema en w es:

$$w(x, \pi) = \frac{1}{2}[f^*(x + \pi) + f^*(x - \pi)], \text{ con } f^* \text{ extensión impar y } 2\pi\text{-periódica de } -v.$$

Por la periodicidad y mantener la expresión f^* en $[-\pi, 0]$ por ser v impar:

$$w(x, \pi) = f^*(x - \pi) = -v(x - \pi), \text{ si } x \in [0, \pi] \Rightarrow$$

$$u(x, \pi) = v(x) - v(x - \pi) = \frac{x(\pi+x)(\pi-x)}{6} - \frac{(x-\pi)x(2\pi-x)}{6} = \frac{\pi}{2} x(\pi - x),$$

parábola invertida con su máximo en $x = \frac{\pi}{2}$ fácil de dibujar.

Se pueden imponer otros tipos de condiciones de contorno (como las del calor) a la cuerda vibrante, que también dan lugar a problemas resolubles separando variables. La condición $u_x=0$ significa que el extremo de la cuerda se mueve con libertad verticalmente (se puede imaginar una anilla engrasada al final de la cuerda rodeando una varilla vertical) y $u_x-au=0$ ó $u_x+bu=0$ indican que el extremo está unido por un muelle al punto de anclaje.

Ya dijimos en 1.4 que las condiciones $u_x=0$ llevan a extensiones **pares**.

[Separando variables salen las autofunciones $\sin \frac{n\pi x}{L}$ con condiciones $u=0$ y $\cos \frac{n\pi x}{L}$ si son $u_x=0$: la periodicidad y paridades de las soluciones son las mismas, faltaría más, resolviendo el problema por uno y otro método].

Ej 4.
$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, & x \in [0, 2\pi], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0)=0, & u_t(x, 0)=\begin{cases} \sin x, & x \in [0, \pi] \\ 0, & x \in [\pi, 2\pi] \end{cases} \\ u_x(0, t)=u_x(2\pi, t)=0 \end{cases}$$

Hallemos $u(x, 2\pi)$, por D'Alembert y separando variables.

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, & x, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0)=0, & u_t(x, 0)=g^*(x) \end{cases}$$
 con g^* par y 4π -periódica.

$$u(x, 2\pi) = \frac{1}{2} \int_{x-2\pi}^{x+2\pi} g^* = \frac{1}{2} \int_{-2\pi}^{2\pi} g^* = \int_0^\pi \sin s ds = 2$$

[la integral en un periodo de una función periódica no depende del intervalo].

Separando variables: $X'' + \lambda X = 0, X'(0) = X'(2\pi) = 0 \rightarrow \lambda_n = \frac{n^2}{4}, X_n = \{\cos \frac{nx}{2}\}, n=0, 1, \dots$

$$\begin{cases} T'' + \lambda_n T = 0 \\ T(0) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T_0 = \{t\} \\ T_n = \{\sin \frac{nt}{2}\}, n \geq 1 \end{cases} \rightarrow u(x, t) = \frac{a_0}{2} t + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{nt}{2} \cos \frac{nx}{2} \rightarrow$$

$u(x, 2\pi) = a_0 \pi$. Basta hallar este coeficiente. $u_t(x, 0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{n}{2} \cos \frac{nx}{2} = g(x)$

$$\rightarrow a_0 = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} g = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x dx = \frac{2}{\pi} \rightarrow u(x, 2\pi) = 2.$$

[Obsérvese que la solución tiende a ∞ cuando $t \rightarrow \infty$. Como está subiendo inicialmente y los extremos están libres, la cuerda asciende indefinidamente].

En el siguiente ejemplo, consideramos una ecuación con un término más añadido a la de ondas (que podría representar un rozamiento con el medio):

Ej 5.
$$\begin{cases} u_{tt} + 4u_t - u_{xx} = 0, & x \in [0, \pi], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = \sin 2x \\ u_t(x, 0) = u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

Como la ecuación es nueva, debemos comenzar separando variables:

$$u = XT \rightarrow X[T'' + 4T'] - X''T = 0 \rightarrow \frac{T'' + 4T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda \rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$\lambda_n = n^2, n=1, 2, \dots, X_n = \{\sin nx\} \rightarrow T'' + 4T' + n^2 T = 0, r = -2 \pm \sqrt{4-n^2} \rightarrow$

$T_1 = c_1 e^{(-2+\sqrt{3})t} + c_2 e^{(-2-\sqrt{3})t}, T_2 = (c_1 + c_2 t) e^{-2t},$

$T_{n \geq 3} = e^{-2t} (c_1 \cos \sqrt{n^2-4} t + c_2 \sin \sqrt{n^2-4} t).$

Probamos, pues, $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin nx$. Sólo faltan las condiciones iniciales:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin nx = \sin 2x$$

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} T'_n(0) \sin nx = 0 \rightarrow T_n(t) \equiv 0, \text{ si } n \neq 2 \quad \left[\begin{array}{l} \text{ecuación homogénea} \\ \text{con datos nulos} \end{array} \right].$$

Sólo es no nula T_2 , para la que $T_2(0) = c_1 = 1$
 $T'_2(0) = c_2 - 2c_1 = 0 \rightarrow u = (1+2t) e^{-2t} \sin 2x.$

[La cuerda con rozamiento tiende a pararse].

Para la ecuación de ondas en el plano o el espacio y coordenadas no cartesianas (y también para la del calor), aparecen ecuaciones que no son $X'' + \lambda X = 0$ y se debe (como en el ejemplo 7 de 4.1) manejar la teoría general del capítulo 3. Los problemas en más variables se verán en 4.4, pero podemos resolver ya alguno si se reduce a uno de 2 variables.

Por ejemplo, la ecuación de ondas $u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$ en recintos esféricos lleva, en general, a una EDP en 4 variables (el tiempo t y las variables esféricas r, θ, ϕ), cuyas soluciones quedarían determinadas (como en la recta) fijando unos datos de contorno y un par de condiciones iniciales. Pero si buscamos sólo sus soluciones independientes de los ángulos aparece la **ecuación de ondas en el espacio con simetría radial** (en 2 variables y ya citada en 1.4). En concreto, vamos a resolver el siguiente problema homogéneo (vibraciones entre dos superficies esféricas):

$$[P_2] \begin{cases} u_{tt} - u_{rr} - \frac{2}{r}u_r = 0, & 1 \leq r \leq 2, t \in \mathbf{R} \\ u(r, 0) = f(r), \quad u_t(r, 0) = g(r) \\ u(1, t) = u(2, t) = 0 \end{cases}$$

Separando variables: $u(r, t) = R(r)T(t) \rightarrow \frac{R'' + \frac{2R'}{r}}{R} = \frac{T''}{T} = -\lambda \rightarrow \begin{cases} rR'' + 2R' + \lambda rR = 0 \\ T'' + \lambda T = 0 \end{cases}$

Las condiciones de contorno imponen: $R(1) = R(2) = 0$.

Vimos la ecuación de R en 3.1 (allí asociada a un problema singular, aquí es regular pues estamos en el intervalo $[1, 2]$). Se resolvía haciendo el cambio de variable:

$$S = rR \rightarrow \begin{cases} S'' + \lambda S = 0 \\ S(1) = S(2) = 0 \end{cases} \xrightarrow{r=s+1} \begin{cases} S'' + \lambda S = 0 \\ S(0) = S(1) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda_n = n^2 \pi^2, n=1, 2, \dots \\ S_n = \{\sin n\pi s\} \end{cases} \rightarrow R_n = \left\{ \frac{\sin n\pi r}{r} \right\}$$

Y para esos valores de λ las soluciones para T son $T_n = \{\cos n\pi t, \sin n\pi t\}$.

Probamos, pues:
$$u = \sum_{n=1}^{\infty} [k_n \cos n\pi t + c_n \sin n\pi t] \frac{\sin n\pi r}{r} .$$

Las condiciones iniciales imponen: $\sum_{n=1}^{\infty} k_n \frac{\sin n\pi r}{r} = f(r)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} n\pi c_n \frac{\sin n\pi r}{r} = g(r)$.

Para hallar los coeficientes del desarrollo de una función en las autofunciones $R_n(r)$ debemos utilizar el peso del problema de Sturm-Liouville: $[r^2 R']' + \lambda r^2 R = 0$.

Como $\langle R_n, R_n \rangle = \int_1^2 r^2 \frac{\sin^2 n\pi r}{r^2} dr = \frac{1}{2}$ y $\langle f, R_n \rangle = \int_1^2 r^2 f(r) \frac{\sin n\pi r}{r} dr$, concluimos que:

$$k_n = 2 \int_1^2 r f(r) \sin n\pi r dr \quad \text{y} \quad c_n = \frac{2}{n\pi} \int_1^2 r g(r) \sin n\pi r dr .$$

Evidentemente se llegaría a lo mismo (aquí es mucho más corto, pero otras veces no podremos hacer estos atajos) observando que las condiciones deducidas de las iniciales se podrían haber reescrito así:

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_n \sin n\pi r = r f(r) \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n\pi c_n \sin n\pi r = r g(r) .$$

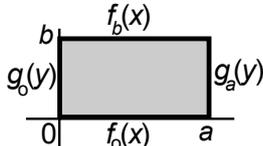
De hecho, todo el problema se hubiera simplificado notablemente si hubiéramos utilizado inicialmente el cambio de variable que hicimos en 1.4:

$$u = \frac{v}{r} \rightarrow \begin{cases} v_{tt} - v_{rr} = 0 \\ v(r, 0) = r f(r), \quad v_t(r, 0) = r g(r) \\ v(1, t) = v(2, t) = 0 \end{cases} , \text{ problema casi igual al de la página 57.}$$

[Las ondas en **plano** con simetría radial satisfacen $u_{tt} - u_{rr} - \frac{1}{r}u_r = 0$ y la ecuación en R es $rR'' + R' + \lambda rR = 0$, que (lo vimos en 3.1) está asociada a las funciones de **Bessel**].

4.3. Separación de variables para Laplace

Resolvamos utilizando el método de separación de variables diversos problemas para la ecuación de Laplace en recintos especialmente simples. Comenzamos por el **problema de Dirichlet en un rectángulo**, es decir:

$$[P_1] \begin{cases} \Delta u = F(x, y), \text{ en } (0, a) \times (0, b) \\ u(x, 0) = f_0(x), u(x, b) = f_b(x) \\ u(0, y) = g_0(y), u(a, y) = g_a(y) \end{cases}$$


Por ser lineales la ecuación y las condiciones, basta resolver los 5 subproblemas que se obtienen al hacer 4 de las 5 funciones que aparecen igual a 0 y sumar las 5 soluciones (de hecho, conviene descomponer en menos o hacer cambios que anulen alguno de los términos no homogéneos). Comencemos resolviendo, por ejemplo, uno de los 4 problemas para la **ecuación homogénea**:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \text{ en } (0, a) \times (0, b) \\ u(x, 0) = f_0(x) \\ u(x, b) = u(0, y) = u(a, y) = 0 \end{cases} \quad u(x, y) = X(x)Y(y) \rightarrow X''Y + XY'' = 0 \rightarrow -\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = \lambda \rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ Y'' - \lambda Y = 0 \end{cases}$$

De $u(0, y) = u(a, y) = 0$ se deduce que $X(0) = X(a) = 0$, con lo que el problema de contorno para la X tiene solución no trivial si

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{a^2}, \quad X_n = \left\{ \sin \frac{n\pi x}{a} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Para esos λ_n es $Y_n = c_1 e^{n\pi y/a} + c_2 e^{-n\pi y/a}$. La condición homogénea aún no aplicada $u(x, b) = 0$ impone $Y(b) = 0$. Nos interesan las Y_n que la cumplen:

$$c_2 = -c_1 e^{2n\pi b/a} \rightarrow Y_n = c_1 e^{n\pi b/a} (e^{n\pi[y-b]/a} - e^{n\pi[b-y]/a}) \rightarrow Y_n = \left\{ \text{sh} \frac{n\pi[b-y]}{a} \right\}$$

Probamos entonces:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sh} \frac{n\pi[b-y]}{a} \sin \frac{n\pi x}{a}$$

Para satisfacer la condición de contorno no homogénea que falta:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sh} \frac{n\pi b}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} = f_0(x) \rightarrow c_n \text{sh} \frac{n\pi b}{a} = \frac{2}{a} \int_0^a f_0(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx$$

Análogamente se resuelven los otros 3 subproblemas con $F \equiv 0$ de $[P_1]$. En uno de ellos volvemos a tener las X_n de antes, y en los otros dos es Y (con condiciones de contorno homogéneas) la que proporciona las autofunciones $Y_n = \left\{ \sin \frac{n\pi y}{b} \right\}$.

[Los papeles de X e Y son intercambiables. En calor y ondas el problema de contorno siempre era para la X (las condiciones de T eran iniciales). Para Laplace en polares, aunque tanto R como Θ tendrán condiciones de contorno, la EDO de la Θ será más sencilla y la elegiremos siempre para obtener las autofunciones].

Para resolver el último subproblema, el de la **ecuación no homogénea**:

$$\begin{cases} \Delta u = F(x, y), \text{ en } (0, a) \times (0, b) \\ u(x, 0) = u(x, b) = u(0, y) = u(a, y) = 0 \end{cases}$$

como siempre se prueba una serie de autofunciones. Aquí hay dos posibilidades [elegiremos la que dé un desarrollo más fácil para F]:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \sin \frac{n\pi x}{a} \quad \text{ó} \quad u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \sin \frac{n\pi y}{b}$$

[No olvidemos que con un cambio $w = u - v$, o resolviendo menos subproblemas se puede llegar antes la solución; lo único necesario para empezar con separación de variables es que sea $u=0$ en $x=0, a$ ó en $y=0, b$].

Seguimos con Laplace en cartesianas, resolvemos un **problema de Neumann**. Suponemos la ecuación no homogénea, pero con condiciones de contorno homogéneas (si no lo fuesen, procederíamos de forma similar al problema anterior).

$$[P_2] \begin{cases} \Delta u = F(x, y), & \text{en } (0, \pi) \times (0, \pi) \\ u_y(x, 0) = u_y(x, \pi) = u_x(0, y) = u_x(\pi, y) = 0 \end{cases}$$

Separando variables en la ecuación homogénea llegamos, desde luego, a las mismas ecuaciones que en $[P_1]$: $X'' + \lambda X = 0$, $Y'' - \lambda Y = 0$. Las condiciones de contorno obligan a que $X'(0) = X'(\pi) = 0$, $Y'(0) = Y'(\pi) = 0$. Para este problema tenemos, pues, dos familias de autofunciones $\{\cos nx\}$ ó $\{\cos ny\}$, $n = 0, 1, \dots$ y podemos elegir cualquiera de ella para nuestra serie. Por ejemplo:

$$u(x, y) = X_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cos ny \rightarrow$$

$$X_0'' + \sum_{n=1}^{\infty} [X_n'' - n^2 X_n] \cos ny = \frac{B_0(x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(x) \cos ny, \quad B_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(x, y) \cos ny \, dy$$

Debemos resolver los infinitos problemas de contorno para EDOs:

$$X_0'' = \frac{1}{2} B_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} F(x, y) \, dy; \quad X_n'' - n^2 X_n = B_n, \quad n \geq 1; \quad \text{con } X_n'(0) = X_n'(\pi) = 0.$$

Las X_n con $n \geq 1$ quedan determinadas de forma única (el problema homogéneo, como sabemos desde 2.1, tiene sólo la solución trivial).

Pero $X_0'' = 0$, $X_0'(0) = X_0'(\pi) = 0$ tiene soluciones no triviales ($\{1\}$), con lo que, según 3.3, para que haya solución para X_0 es necesario que sea $\int_0^{\pi} 1 \cdot B_0(x) \, dx = 0$.

$$\text{Es decir, } [P_2] \text{ tiene solución sólo si } \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} F(x, y) \, dx \, dy = 0.$$

Y en ese caso tiene infinitas que difieren en una constante. Todo esto es coherente con lo que sabíamos sobre Neumann desde 1.3.

Ej 1. Calculemos la solución en el caso particular en que $F(x, y) = x - a$.

El problema sólo tiene solución si $\iint_{\square} F = 0$, es decir, si $a = \frac{\pi}{2}$.

Entonces nos queda $X_0'' = x - \frac{\pi}{2}$ (por suerte, la F ya está desarrollada en $\{\cos ny\}$).

Por la misma razón los B_n , y por tanto los X_n , son nulos si $n \geq 1$.

Integrando e imponiendo $X_0'(0) = X_0'(\pi) = 0$ obtenemos $u(x, y) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{\pi}{4}x^2 + C$.

[Si resolvemos probando $u = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(y) \cos nx$ hay que desarrollar en serie. Lo hacemos, aunque aquí sea una pérdida de tiempo. Los coeficientes de $F = x - \frac{\pi}{2}$ en $\cos nx$ son:

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cos nx \, dx = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 0, 2, 4, \dots \\ -\frac{4}{\pi n^2}, & \text{si } n = 1, 3, \dots \end{cases}$$

$$Y_0'' + \sum_{n=1}^{\infty} [Y_n'' - n^2 Y_n] \cos nx = \sum_{m=1}^{\infty} B_{2m-1} \cos(2m-1)x \rightarrow$$

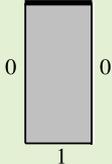
$$\begin{cases} Y_0'' = 0 \\ Y_0'(0) = Y_0'(\pi) = 0 \end{cases} \rightarrow Y_0 = C; \quad \begin{cases} Y_{2m}'' - 4m^2 Y_{2m} = 0 \\ Y_{2m}'(0) = Y_{2m}'(\pi) = 0 \end{cases} \rightarrow Y_{2m} = 0;$$

$$\begin{cases} Y_{2m-1}'' - (2m-1)^2 Y_{2m-1} = B_{2m-1} \\ Y_{2m-1}'(0) = Y_{2m-1}'(\pi) = 0 \end{cases} \rightarrow Y_{2m-1} = -\frac{B_{2m-1}}{(2m-1)^2}$$

$$\rightarrow u = C + \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2m-1)x}{(2m-1)^4}, \text{ que (salvo constante) es el desarrollo de la } u \text{ de arriba}].$$

Dos ejemplos más en cartesianas. El primero para Laplace con **condiciones mixtas** (parte Dirichlet, parte Neumann). Ya dijimos en 1.3 que todos ellos tienen solución única.

Ej 2.
$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, (x, y) \in (0, 1) \times (0, \pi) \\ u(x, 0) = u_y(x, \pi) = u(0, y) = 0, u(1, y) = 1 \end{cases} \quad u = X(x)Y(y) \rightarrow$$



$$\begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0, Y(0) = Y'(\pi) = 0 \\ X'' - \lambda X = 0, X(0) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = \left(\frac{2n-1}{2}\right)^2, Y_n = \left\{ \sin \frac{(2n-1)y}{2} \right\}.$$

Para esos λ es $X = c_1 e^{(2n-1)x/2} + c_2 e^{-(2n-1)x/2} \xrightarrow{X(0)=0} X_n = \left\{ \text{sh} \frac{(2n-1)x}{2} \right\}$.

Probamos $u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x) Y_n(y)$. Imponiendo el dato $u(1, y) = 1$ que falta:

$$c_n \text{sh} \frac{2n-1}{2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \frac{(2n-1)y}{2} dy = \frac{4}{\pi(2n-1)} \left[1 - \cos \frac{(2n-1)\pi}{2} \right] \rightarrow$$

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1) \text{sh} \frac{2n-1}{2}} \text{sh} \frac{(2n-1)x}{2} \sin \frac{(2n-1)y}{2}.$$

Si nos gustan más las condiciones de contorno para x podemos hacerlas homogéneas con un cambio de variable:

$$v = x, w = u - v \rightarrow \begin{cases} w_{xx} + w_{yy} = 0 \\ w(x, 0) = -x, w_y(x, \pi) = 0 \\ w(0, y) = w(1, y) = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, X(0) = X(1) = 0 \\ Y'' - \lambda Y = 0, Y'(\pi) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = n^2 \pi^2, X_n = \{ \sin n\pi x \}, Y_n = \{ \text{ch}[n\pi(\pi - y)] \}.$$

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} k_n X_n(x) Y_n(y) \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} k_n X_n(0) Y_n(y) = -x \rightarrow k_n = -\frac{2}{\text{ch}[n\pi^2]} \int_0^1 x \sin n\pi x dx$$

$$\rightarrow u(x, y) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\pi n \text{ch}[n\pi^2]} \text{ch}[n\pi(\pi - y)] \sin n\pi x$$

[que es otra expresión de la misma solución única].

En todos los problemas que hemos resuelto en este capítulo (excepto los de Neumann) la solución era única (todos eran problemas 'físicos'). Pero no olvidemos que la unicidad en EDPs es complicada, y que un problema nuevo del que no se ha demostrado la unicidad podría no tenerla. Eso pasa en el siguiente ejemplo (para una ecuación de 'Helmholtz' muy asociada a los problemas de más de dos variables):

Ej 3.
$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, (x, y) \in (0, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \\ u_y(x, -\frac{\pi}{4}) = u_y(x, \frac{\pi}{4}) = 0 \\ u(0, y) = 0, u(\pi, y) = \sin 2y \end{cases}$$

Como es ecuación nueva, separamos variables desde el principio:

$$u = XY \rightarrow \frac{X''}{X} + 1 = -\frac{Y''}{Y} = \lambda \rightarrow$$

$$\begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0 \\ Y'(-\frac{\pi}{4}) = Y'(\frac{\pi}{4}) = 0 \end{cases} \xrightarrow{s=y+\frac{\pi}{4}} \begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0 \\ Y'(0) = Y'(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = 4n^2, Y_n = \left\{ \cos 2n\left(y + \frac{\pi}{4}\right) \right\}, n=0, 1, \dots$$

$$X'' + (1 - \lambda_n)X = 0, X(0) = 0 \rightarrow X_0 = \{ \sin x \} \text{ y } X_n = \{ \text{sh}(\sqrt{4n^2 - 1}x) \} \text{ si } n \geq 1.$$

$$u(x, y) = c_0 \sin x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sh}(\sqrt{4n^2 - 1}x) \cos\left(2ny + \frac{n\pi}{2}\right) \Big|_{x=\pi} = \sin 2y \rightarrow \begin{matrix} c_0 \text{ indeterminado} \\ c_1 \text{sh}(\sqrt{3}\pi) = 1 \\ c_n = 0, n > 1 \end{matrix}$$

Tiene, por tanto, **infinitas soluciones**: $u = C \sin x + \frac{\text{sh}(\sqrt{3}x)}{\text{sh}(\sqrt{3}\pi)} \sin 2y$.

Evidentemente no se podrá demostrar la unicidad haciendo uso de la fórmula de Green. Operando como en 1.3, si u_1 y u_2 son soluciones del problema, su diferencia satisface:

$$u = u_1 - u_2 \rightarrow \begin{cases} \Delta u + u = 0 \\ \bullet \bullet \bullet = 0 \\ \bullet \bullet \bullet = 0 \end{cases} \rightarrow \iint_D (u \Delta u + u^2) = \iint_D u^2 - \iint_D \|\nabla u\|^2 = 0 \quad ??$$

Para resolver los problemas en círculos nos interesa expresar el **Laplaciano en polares** ($x=r \cos \theta$, $y=r \sin \theta$). Como,

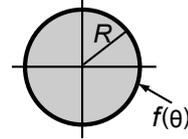
$$u_r = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta ; \quad u_{rr} = u_{xx} \cos^2 \theta + 2u_{xy} \sin \theta \cos \theta + u_{yy} \sin^2 \theta$$

$$u_{\theta\theta} = u_{xx} r^2 \sin^2 \theta - 2u_{xy} r^2 \sin \theta \cos \theta + u_{yy} r^2 \cos^2 \theta - u_x r \cos \theta - u_y r \sin \theta \rightarrow$$

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}$$

Resolvamos el **problema de Dirichlet homogéneo en un círculo**:

$$[P_3] \begin{cases} \Delta u = 0, \text{ en } r < R \\ u(R, \theta) = f(\theta), \theta \in [0, 2\pi) \end{cases}$$



$$u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta) \rightarrow \frac{r^2 R'' + rR'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda \rightarrow \begin{cases} \Theta'' + \lambda \Theta = 0 \\ r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0 \end{cases}$$

Parece que no hay condiciones para la Θ , pero está claro que la solución $u(r, \theta)$ **debe ser 2π -periódica en θ** , es decir, debe ser $\Theta(0) = \Theta(2\pi)$, $\Theta'(0) = \Theta'(2\pi)$. Este problema de Sturm-Liouville periódico tiene por autovalores y autofunciones:

$$\lambda_n = n^2, \quad n=0, 1, 2, \dots, \quad \Theta_0(\theta) = \{1\}, \quad \Theta_n(\theta) = \{\cos n\theta, \sin n\theta\}.$$

Las soluciones correspondientes de R son (ecuaciones de Euler):

$$R_0(r) = c_1 + c_2 \ln r \quad \text{y} \quad R_n(r) = c_1 r^n + c_2 r^{-n} \quad \text{si } n \geq 1.$$

Parece lógico imponer por argumentos físicos que la solución debe permanecer **acotada cuando $r \rightarrow 0$** (matemáticamente la solución también debe estarlo si debe ser de clase 2), así que debe ser $c_2 = 0$ en ambos casos. Por tanto, probamos soluciones de la forma:

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta]$$

$$\text{Debe ser: } u(R, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} R^n [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta] = f(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi) \rightarrow$$

$$a_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta, \quad n=0, 1, \dots, \quad b_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta, \quad n=1, 2, \dots$$

Sustituyendo estos coeficientes en la serie y operando formalmente:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{R^n} \cos n(\theta - \phi) \right] f(\phi) d\phi$$

Vamos a sumar la serie:

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n \cos n\alpha}{R^n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{re^{i\alpha}}{R} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{re^{-i\alpha}}{R} \right)^n = 1 + \frac{re^{i\alpha}}{R - re^{i\alpha}} + \frac{re^{-i\alpha}}{R - re^{-i\alpha}} = \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha}.$$

Por tanto, la solución de $[P_3]$ se puede expresar:

$$u(r, \theta) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\phi) d\phi}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi) + r^2} \quad \text{fórmula integral de Poisson}$$

$$\text{Haciendo aquí } r=0 \text{ (o mirando la serie) deducimos que } u(0, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) d\phi :$$

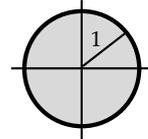
si $\Delta u = 0$, el valor de u en el centro de un círculo es el valor medio de u sobre su borde.

Habría que probar que la u de la serie (o la integral) es realmente solución de $[P_3]$. Se demuestra que si f es continua a trozos, la u tiene infinitas derivadas en $r < R$ (aunque f sea discontinua), que en ese abierto es $\Delta u = 0$ y que alcanza el valor de contorno con continuidad en los θ en que f es continua (y sigue habiendo unicidad, cosa que vimos en 1.3 sólo si f era continua). [La situación es totalmente análoga para $[P_1]$, Dirichlet en rectángulo].

[El problema exterior en $r > R$ lo veremos en 4.4, para compararlo con el del espacio].

Vamos con el problema de **Dirichlet no homogéneo en el círculo**. En vez de tratarlo en general, resolvemos un problema concreto.

$$[P_4] \begin{cases} u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2} = 4, \text{ en } r < 1 \\ u(1, \theta) = \cos 2\theta \end{cases}$$



Podríamos descomponerlo en dos (el de $\Delta u = 0$ lo acabamos de estudiar), pero lo resolvemos directamente. Como en todo problema no homogéneo probamos una serie con las autofunciones del problema homogéneo:

$$u(r, \theta) = a_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(r) \cos n\theta + b_n(r) \sin n\theta] \rightarrow$$

$$a_0'' + \frac{1}{r}a_0' + \sum_{n=1}^{\infty} \left([a_n'' + \frac{1}{r}a_n' - \frac{n^2}{r^2}a_n] \cos n\theta + [b_n'' + \frac{1}{r}b_n' - \frac{n^2}{r^2}b_n] \sin n\theta \right) = 4,$$

que, por suerte, ya está desarrollada en esta familia de autofunciones.

[Si en vez de un 4 tuviésemos una $F(r, \theta)$ cualquiera, la desarrollaríamos en senos y cosenos, mirando la r como constante e identificaríamos ambos miembros].

Habrà, pues, que resolver las ecuaciones de Euler:

$$r a_0'' + a_0' = 4r, \quad r^2 a_n'' + r a_n' - n^2 a_n = 0, \quad r^2 b_n'' + r b_n' - n^2 b_n = 0.$$

La condición $u(1, \theta) = \cos 2\theta$ (tambièn desarrollada ya) impone que:

$$b_n(1) = 0 \quad \forall n; \quad a_2(1) = 1; \quad a_n(1) = 0, \quad n \neq 2.$$

La acotación cuando $r \rightarrow 0$ será la otra condición necesaria para determinar la solución de cada EDO de segundo orden. Para la de a_0 necesitamos una solución particular, que se puede hallar con la fórmula de variación de las constantes:

$$\int_0^1 \frac{\ln r}{1/r} = \frac{1}{r}, \quad a_{0p} = \ln r \int \frac{1 \cdot 4 dr}{1/r} - \int \frac{\ln r \cdot 4 dr}{1/r} = r^2.$$

o, mejor, tanteando, pues (porque la de coeficientes constantes asociada la tiene de la forma Ae^{2s}) sabemos que tiene una $a_{0p} = Ar^2$ ($\rightarrow 2A + 2A = 4$, $A = 1$). Así:

$$a_0 = c_1 + c_2 \ln r + r^2 \xrightarrow{\text{acotada}} c_2 = 0 \xrightarrow{a_0(1)=0} c_1 = -1$$

Para a_2 :

$$a_2 = c_1 r^2 + c_2 r^{-2} \xrightarrow{\text{acotada}} c_2 = 0 \xrightarrow{a_2(1)=1} c_1 = 1$$

No necesitamos imponer los datos en la solución del resto de ecuaciones homogéneas para asegurar ya que el resto de a_n y las b_n son cero (0 es solución y no hay más por tener un problema de Dirichlet solución única). La solución de $[P_4]$ es:

$$u(r, \theta) = r^2 - 1 + r^2 \cos 2\theta$$

[Se podría escribir en cartesianas: $u = 2x^2 - 1$].

Como otras veces, un buen cambio simplifica el problema. Por ejemplo, podemos en este caso buscar una solución $v(r)$ de la ecuación no homogénea resolviendo $v'' + \frac{1}{r}v' = 4$. La solución más sencilla de esta ecuación de Euler es $v = r^2$.

$$w = u - v \rightarrow \begin{cases} \Delta w = 0, \text{ en } r < 1 \\ w(1, \theta) = \cos 2\theta - 1 \end{cases}$$

De la serie de la página anterior obtenemos, sin más que identificar coeficientes, que la solución de este problema es:

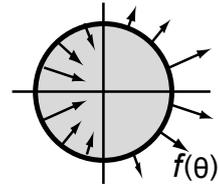
$$w(r, \theta) = r^2 \cos 2\theta - 1$$

lo que nos lleva de forma mucho más rápida a la solución de antes.

[Utilizando funciones de Green se dará en 4.5 una fórmula integral para $\begin{cases} \Delta u = F, r < R \\ u(R, \theta) = f \end{cases}$ que generalizará la fórmula de Poisson de la página anterior].

Resolvamos ahora el **problema de Neumann homogéneo en un círculo**:

$$[P_5] \begin{cases} \Delta u = 0, \text{ en } r < R \\ u_r(R, \theta) = f(\theta), \theta \in [0, 2\pi) \end{cases}$$



Como el problema de contorno y la ecuación de Euler son las mismas que en Dirichlet, la solución que probamos es:

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n [a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta] .$$

Pero ahora es diferente la condición de contorno que falta:

$$u_r(R, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} nR^{n-1} [a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta] = f(\theta), \theta \in [0, 2\pi) \rightarrow$$

$$a_n = \frac{1}{n\pi R^{n-1}} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta, \quad b_n = \frac{1}{n\pi R^{n-1}} \int_0^{2\pi} f(\theta) \operatorname{sen} n\theta d\theta, \quad n=1, 2, \dots$$

siempre que no tenga término independiente el desarrollo en senos y cosenos de $f(\theta)$; es decir, una **condición necesaria** para que el problema se pueda resolver por este método es que se cumpla:

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 0 \quad \left[\text{confirma lo visto en 1.3: debía ser } \oint_{\partial D} f ds = \iint_D F dx dy = 0 \right].$$

Además, a_0 **queda indeterminado** [Neumann siempre tiene unicidad salvo constante].

Ej 4. $\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } r < 1 \\ u_r(1, \theta) = \operatorname{sen}^3 \theta \end{cases} \quad u_r(1, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n [a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta] = \operatorname{sen}^3 \theta = \frac{3 \operatorname{sen} \theta}{4} - \frac{\operatorname{sen} 3\theta}{4} .$

No hay que hacer integrales: $b_1 = \frac{3}{4}$, $b_3 = -\frac{1}{12}$ y los demás 0, excepto a_0 sin condición.

Por tanto: $u(r, \theta) = C + \frac{3}{4} r \operatorname{sen} \theta - \frac{1}{12} r^3 \operatorname{sen} 3\theta$, C cualquiera.

Y ahora resolvemos uno de **Neumann no homogéneo en un semicírculo**:

$$[P_6] \begin{cases} \Delta u = F(r, \theta), \text{ en } r < 1, 0 < \theta < \pi \\ u_r(1, \theta) = u_\theta(r, 0) = u_\theta(r, \pi) = 0 \end{cases}$$



No hemos resuelto el homogéneo. Debemos empezar hallando sus autofunciones. Las dan la ecuación en Θ que sale al separar variables y los datos de contorno:

$$\begin{cases} \Theta'' + \lambda \Theta = 0 \\ \Theta'(0) = \Theta'(\pi) = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda_n = n^2, \quad \Theta_n(\theta) = \{\cos n\theta\}, \quad n=0, 1, 2, \dots \rightarrow$$

$$u(r, \theta) = R_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r) \cos n\theta \quad \left[\text{La serie con cosenos y senos del [P4] no cumple los datos de contorno; aquí no hay periodicidad.} \right] \rightarrow$$

$$R_0'' + \frac{1}{r} R_0' + \sum_{n=1}^{\infty} \left[R_n'' + \frac{1}{r} R_n' - \frac{n^2}{r^2} R_n \right] \cos n\theta = F(r, \theta) = B_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(r) \cos n\theta, \\ \text{con } B_0(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi F(r, \theta) d\theta \text{ y } B_n(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi F(r, \theta) \cos n\theta d\theta .$$

Basta, pues, resolver: $rR_0'' + R_0' = [rR_0']' = rB_0(r)$ y $r^2R_n'' + rR_n' - n^2R_n = r^2B_n(r)$, ambas con los datos de contorno (singulares): R_n acotada en $r=0$ y $R_n'(1)=0$.

Si $n \geq 1$ el problema homogéneo (y, por tanto, el no homogéneo) tiene solución R_n única (aunque el problema sea singular, vale lo que vimos en 3.3). Pero si $n \geq 0$:

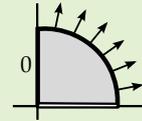
$$rR_0'' + R_0' = 0 \rightarrow R_0 = c_1 + c_2 \ln r \xrightarrow{R \text{ acotada}} R_{oh} = \{1\} \rightarrow$$

Existen infinitas soluciones R_0 del no homogéneo según sea $\int_0^1 rB_0(r) dr \neq 0$ ninguna solución $\neq 0$.

$$\left[\text{Concuerda una vez más con 1.3. Debía ser: } \int_0^1 \int_0^\pi rF(r, \theta) d\theta dr = 0 \right].$$

Resolvemos para acabar con Laplace en polares tres problemas con **condiciones mixtas** (y, por tanto, con solución única). Este primero va a ser homogéneo.

Ej 5.
$$\begin{cases} \Delta u = 0, r < 1, \theta \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ u_r(1, \theta) = 1 \\ u_\theta(r, 0) = u_\theta(r, \frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \Theta'' + \lambda \Theta = 0, \Theta'(0) = \Theta(\frac{\pi}{2}) = 0 \\ r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0 \end{cases}$$



Autovalores y autofunciones conocidos: $\lambda_n = (2n-1)^2$, $\Theta_n = \{\cos(2n-1)\theta\}$, $n=1, 2, \dots$.

Resolviendo para esos λ_n la ecuación en R y exigiendo que esté acotada en $r=0$:

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^{2n-1} \cos(2n-1)\theta \rightarrow u_r(1, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) c_n \cos(2n-1)\theta = 1$$

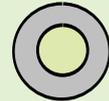
$$\rightarrow c_n = \frac{4}{(2n-1)\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(2n-1)\theta d\theta = \frac{4}{\pi(2n-1)^2} \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi}{2}.$$

[1 no era autofunción para los coseno impares y había que integrar para hallar los c_n].

Por tanto, la solución es:
$$u(r, \theta) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} r^{2n-1} \cos(2n-1)\theta.$$

Los recintos siguientes no incluyen el origen. La condición implícita de estar acotada en ese punto es sustituida por un dato explícito en $r=1$. El primero es homogéneo:

Ej 6.
$$\begin{cases} \Delta u = 0, 1 < r < 2 \\ u(1, \theta) = 0, u_r(2, \theta) = 1 + \operatorname{sen} \theta \end{cases}$$
 Sabemos que:
$$\begin{cases} \Theta'' + \lambda \Theta = 0 \\ \Theta \text{ } 2\pi\text{-per.} \end{cases} \rightarrow \lambda_n = n^2, \Theta_n = \{\cos n\theta, \operatorname{sen} n\theta\}, n=0, 1, 2, \dots$$



Para esos λ : $r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0 \rightarrow R_0 = c_1 + c_2 \ln r \xrightarrow{R(1)=0} R_0 = \{\ln r\} \rightarrow R_n = c_1 r^n + c_2 r^{-n} \rightarrow R_n = \{r^n - r^{-n}\}$

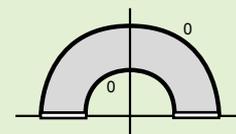
$$u(r, \theta) = a_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (r^n - r^{-n}) [a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta]$$

$$u_r(2, \theta) = a_0 2^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n(2^{n-1} + 2^{-n-1}) [a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta] = 1 + \operatorname{sen} \theta \rightarrow$$

$$a_0 = 2, \frac{5}{4} b_1 = 1 \text{ y los demás cero} \rightarrow u(r, \theta) = 2 \ln r + \frac{4}{5} (r - r^{-1}) \operatorname{sen} \theta.$$

En el último ejemplo (no homogéneo) no hay datos implícitos. Todos están a la vista:

Ej 7.
$$\begin{cases} \Delta u = \cos \theta, 1 < r < 2, 0 < \theta < \pi \\ u(1, \theta) = u(2, \theta) = u_\theta(r, 0) = u_\theta(r, \pi) = 0 \end{cases}$$



Las autofunciones del homogéneo las son las de $[P_6]$.

Probamos entonces la serie:
$$u(r, \theta) = R_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r) \cos n\theta \rightarrow$$

$$R_0 + \frac{1}{r} R_0' + \sum_{n=1}^{\infty} \left[R_n'' + \frac{1}{r} R_n' - \frac{n^2}{r^2} R_n \right] \cos n\theta = \cos \theta \text{ [ya desarrollado].}$$

Las condiciones para las R_n salen de las otras condiciones de contorno:

$$\sum_{n=0}^{\infty} R_n(1) \Theta_n(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(2) \Theta_n(\theta) = 0 \Rightarrow R_n(1) = R_n(2) = 0 \forall n.$$

Por la unicidad de los problemas mixtos sólo tendrá solución no nula:

$$r^2 R_1'' + rR_1' - R_1 = r^2 \text{ con los datos de contorno nulos de arriba.}$$

$$R_{1p} = Ar^2 \text{ [}\lambda=2 \text{ no autovalor]} \rightarrow A = \frac{1}{3} \rightarrow R_1 = c_1 r + c_2 r^{-1} + \frac{1}{3} r^2 \xrightarrow{\text{c.c.}} c_1 = -\frac{7}{9}, c_2 = \frac{4}{9}.$$

La solución es, pues:
$$u(r, \theta) = \left(\frac{1}{3} r^2 - \frac{7}{9} r + \frac{4}{9} r^{-1} \right) \cos \theta.$$

Hagamos varias reflexiones sobre el método de separación de variables que generalicen las ideas que hemos venido utilizando en este capítulo.

Todos los problemas que hemos visto estaban formados por una **EDP lineal** $L[u]=F$, con L lineal (es decir, $L[au_1+bu_2]=aL[u_1]+bL[u_2]$) y unas **condiciones adicionales lineales**.

Para los resueltos por separación de variables las EDPs eran '**separables**' (no todas lo son) y los recintos que aparecieron eran '**simples**' (limitados por ' $variable=cte$ ').

Los problemas resueltos por este camino siempre tenían **dos condiciones de contorno** $C_k[u]=h_k$ y además una o dos condiciones iniciales o de contorno. Para Laplace en polares vimos que a veces las condiciones de contorno estaban implícitas (por ejemplo, en un círculo se exigía periodicidad y, cuando el recinto incluía el origen, aparecía la acotación).

Nos hemos ocupado primero de conseguir que fuesen **cero** las condiciones de contorno.

En todos los **problemas homogéneos** hemos buscado soluciones de la EDP que eran productos, por ejemplo $u=XT$, y ello nos condujo a unas X_n **autofunciones** de un problema de contorno y unas T_n soluciones de otra EDO **homogénea** (igual si era $u=XY$, $u=R\theta$...). Gracias a la linealidad pudimos construir la serie $u(x,t)=\sum c_n X_n(x)T_n(t)$ y para hallar la solución sólo faltó **calcular los** c_n imponiendo la condición inicial (o condiciones, o las otras de contorno) y **haciendo desarrollos de Fourier**.

Para los **problemas no homogéneos**, buscando también una serie solución, llevamos a la EDP (con F desarrollada) una serie cuyos términos eran **productos de las autofunciones del problema homogéneo por funciones a determinar de la otra variable**. Si el homogéneo no se había visto previamente, primero se debían precisar esas autofunciones (los pasos iniciales en ambos tipos de problemas son los mismos). Resolviendo la familia resultante de EDOs lineales **no homogéneas** con las condiciones que se deducen del desarrollo de las condiciones iniciales (o de las otras de contorno), obtuvimos la solución.

Pensemos también en general sobre la descomposición en subproblemas y los cambios de variable (aquí y en otros capítulos). Supongamos, por ejemplo, que son 3 las condiciones adicionales (como para el calor en la varilla finita) y que nuestro problema es de la forma:

$$[P] \begin{cases} L[u]=F \\ M[u]=f \\ C_1[u]=h_1, C_2[u]=h_2 \end{cases}$$

El problema de resolver [P] puede ser reducido a resolver otros subproblemas más sencillos. Por ejemplo, si u_1, u_2, u_3 y u_4 son soluciones de

$$[P_1] \begin{cases} L[u]=F \\ M[u]=0 \\ C_1[u]=0 \\ C_2[u]=0 \end{cases} \quad [P_2] \begin{cases} L[u]=0 \\ M[u]=f \\ C_1[u]=0 \\ C_2[u]=0 \end{cases} \quad [P_3] \begin{cases} L[u]=0 \\ M[u]=0 \\ C_1[u]=h_1 \\ C_2[u]=0 \end{cases} \quad [P_4] \begin{cases} L[u]=0 \\ M[u]=0 \\ C_1[u]=0 \\ C_2[u]=h_2 \end{cases}$$

está claro, por la linealidad, que $u=u_1+u_2+u_3+u_4$ es solución de [P], pero, como ya hemos observado, bastantes veces nos convendrá descomponer [P] en menos subproblemas.

Muy a menudo necesitamos hacer homogéneas las condiciones de contorno (la separación de variables y otros métodos lo exigen). Si somos capaces de hallar una v que cumpla $C_1[v]=h_1$ y $C_2[v]=h_2$, el cambio $w=u-v$ lleva [P] a:

$$\begin{cases} L[w]=F-L[v] \\ M[w]=f-M[v] \\ C_1[w]=C_2[w]=0 \end{cases}$$

Otras veces interesa hacer la ecuación homogénea (por ejemplo, cuando no hay datos de contorno, como en algunos problemas del capítulo 1). Así, si lo que tenemos es una solución particular v de la ecuación ($L[v]=F$), haciendo como siempre, $w=u-v$ acabaríamos en:

$$\begin{cases} L[w]=L[u]-L[v]=0 \\ M[w]=f-M[v] \\ C_1[w]=h_1-C_1[v], C_2[w]=h_2-C_2[v] \end{cases}$$

Lo que ya es un lujo (pero se puede intentar buscar por el premio que nos da) es tener una v que cumpla la ecuación y además las dos condiciones de contorno (en algunos ejemplos lo hicimos). Los problemas homogéneos siempre son más sencillos que los no homogéneos (separando variables, por ejemplo, los primeros exigen resolver sólo EDOs homogéneas, más corto que resolver las EDOs no homogéneas de los segundos).

Como vemos, hay mucha variedad en los posibles cambios. En cada caso habrá que ver cuáles nos llevan a problemas mas asequibles. Si inicialmente hay condiciones homogéneas intentaremos que los cambios no las estropeen, aunque a veces no habrá más remedio.

4.4. Algunos problemas en tres variables

Comenzamos estudiando las **series de Fourier dobles**, de teoría inmediata a partir de las de una variable (las triples, que aparecerían en problemas con 4 variables, son también similares).

Sean $X_m(x)$, $x \in [a, b]$ e $Y_n(y)$, $y \in [c, d]$ las autofunciones de dos problemas de Sturm-Liouville de pesos respectivos $r(x)$ y $s(y)$, y sea $f(x, y) \in C^1([a, b] \times [c, d])$. Entonces, para cada $(x, y) \in (a, b) \times (c, d)$ se puede escribir f como la serie:

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{nm} X_m Y_n \quad \text{con} \quad c_{nm} = \frac{1}{\langle X_n, X_n \rangle} \frac{1}{\langle Y_m, Y_m \rangle} \int_a^b \int_c^d f(x, y) X_m Y_n r s \, dy \, dx$$

[$\langle u, v \rangle$ designa, desde luego, $\int_a^b u v r \, dx$ ó $\int_c^d u v s \, dy$].

pues para x fijo se puede poner $f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m(x) Y_m$, $C_m(x) = \frac{\langle f(x, y), Y_m \rangle}{\langle Y_m, Y_m \rangle}$,

y con $C_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{nm} X_n$, $c_{nm} = \frac{\langle C_m(x), X_n \rangle}{\langle X_n, X_n \rangle}$ se tiene la expresión de arriba.

[Se llega a lo mismo, desde luego, desarrollando primero en X_n y luego en Y_m].

Un caso particular de las series anteriores son los desarrollos en **series trigonométricas dobles** de una función $f \in C^1([0, L] \times [0, M])$:

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{M} \quad \text{con} \quad b_{nm} = \frac{4}{LM} \int_0^L \int_0^M f(x, y) \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{M} \, dy \, dx$$

$$f(x, y) = \frac{1}{4} a_{00} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n0} \cos \frac{n\pi x}{L} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} a_{0m} \cos \frac{m\pi y}{M} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{nm} \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi y}{M}$$

$$\text{con} \quad a_{nm} = \frac{4}{LM} \int_0^L \int_0^M f(x, y) \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi y}{M} \, dy \, dx$$

[O los desarrollos parecidos en $\sum \sin \cos$ ó $\sum \cos \sin$, o con series en senos y cosenos].
[Los factores $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{2}$ son, como siempre, para que la fórmula valga también si $n=0$ ó $m=0$].

[Se podría pedir que f fuese sólo C^1 a trozos, pero aquí suponemos que es más suave].

Ej 1. Desarrollemos $f(x, y) = x \cos y$, en $[0, \pi] \times [0, \pi]$ de dos formas:

$$x \cos y = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm} \sin nx \sin my \quad \text{con} \quad b_{nm} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} x \cos y \sin nx \sin my \, dy \, dx$$

$$\rightarrow x \cos y = \frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[-1]^{n+1} m}{n[4m^2-1]} \sin nx \sin 2my$$

$$a_{nm} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} x \cos y \cos nx \cos my \, dy \, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq 1 \\ \pi & \text{si } m=1, n=0 \\ 2[(-1)^n - 1]/(\pi n^2) & \text{si } m=1, n > 0 \end{cases} \rightarrow$$

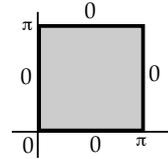
$$x \cos y = \frac{\pi}{2} \cos y - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos[2n-1]x \cos y \quad [\text{ya estaba desarrollada en } y].$$

[La igualdad entre f y su serie se da en los puntos de continuidad de la f extendida, de forma impar en el primer caso y par en el segundo, en cada variable hasta $[-\pi, \pi]$ y luego de forma 2π -periódica; así, la serie en senos converge hacia $x \cos y$ en el lado $x=0$ del cuadrado $[0, \pi] \times [0, \pi]$, pero no lo hace en los otros lados; la serie en cosenos, en cambio, converge (uniformemente) en todo el cuadrado, incluido el borde].

[Como decíamos en 3.2, aunque una $f(x, y)$ se puede desarrollar en cualquier par de familias de autofunciones, será el problema el que nos diga en cuáles].

Resolvamos separando variables varios problemas (homogéneos) en 3 variables. Primero, la **ecuación del calor en un cuadrado**: estudiamos la evolución de las temperaturas de una placa (dadas las iniciales) si el borde se mantiene a 0° :

$$\begin{cases} u_t - k[u_{xx} + u_{yy}] = 0, & (x, y) \in (0, \pi) \times (0, \pi), t > 0 \\ u(x, y, 0) = f(x, y) \\ u(x, 0, t) = u(x, \pi, t) = u(0, y, t) = u(\pi, y, t) = 0 \end{cases}$$



Buscamos soluciones: $u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t) \rightarrow XYT' - k[X''Y + XY'']T = 0$

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{k} \frac{T'}{T} - \frac{Y''}{Y} = -\lambda \rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ \frac{Y''}{Y} = \lambda + \frac{1}{k} \frac{T'}{T} = -\mu \rightarrow \begin{cases} Y'' + \mu Y = 0 \\ T' + k[\lambda + \mu]T = 0 \end{cases} \end{cases}$$

[Como en 2 variables, dejamos para la T la expresión más complicada].

Las condiciones de contorno exigen: $X(0)=X(\pi)=Y(0)=Y(\pi)=0$. Así pues:

$$\begin{cases} \lambda = n^2, X_n = \{\text{sen } nx\}, n = 1, 2, \dots \\ \mu = m^2, Y_m = \{\text{sen } my\}, m = 1, 2, \dots \end{cases} \rightarrow T_{nm} = \{e^{-(n^2+m^2)kt}\}.$$

Cualquier $u_{nm}(x, y, t) = \{e^{-(n^2+m^2)kt} \text{sen } nx \text{ sen } my\}$ satisface la ecuación y todas las condiciones de contorno, así como lo hace cualquier combinación lineal de ellas. Esto nos lleva a probar la serie:

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm} e^{-(n^2+m^2)kt} \text{sen } nx \text{ sen } my$$

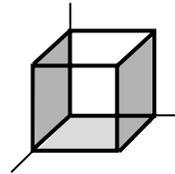
que debe satisfacer además: $u(x, y, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm} \text{sen } nx \text{ sen } my = f(x, y) \rightarrow$

$$b_{nm} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi f(x, y) \text{sen } nx \text{ sen } my \, dx \, dy, \quad n, m \geq 1.$$

[Como en la varilla, aquí también $u \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$].

Ahora, **Laplace en un cubo** con condiciones de contorno mixtas (cuya solución será única como los similares del plano):

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } (0, \pi) \times (0, \pi) \times (0, \pi) \\ u(x, y, 0) = f(x, y) \\ u = 0 & \text{en } x=0, x=\pi, z=\pi \\ u_y = 0 & \text{en } y=0, y=\pi \end{cases}$$



$$u = XYZ \rightarrow \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = -\frac{X''}{X} = \lambda \rightarrow \frac{Z''}{Z} - \lambda = -\frac{Y''}{Y} = \mu \rightarrow \begin{cases} X'' + \lambda X = 0, X(0) = X(\pi) = 0 \\ Y'' + \mu Y = 0, Y'(0) = Y'(\pi) = 0 \\ Z'' - [\lambda + \mu]Z = 0, Z(\pi) = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \lambda = n^2, X_n = \{\text{sen } nx\}, n = 1, 2, \dots \\ \mu = m^2, Y_m = \{\cos my\}, m = 0, 1, \dots \end{cases} \rightarrow Z_{mn} = \{\text{sh}(\sqrt{n^2+m^2}[\pi-z])\} \rightarrow$$

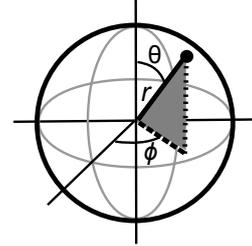
$$u(x, y, z) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_{n0} \text{sh}(n[\pi-z]) \text{sen } nx + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{nm} \text{sh}(\sqrt{n^2+m^2}[\pi-z]) \text{sen } nx \cos my$$

Como $u(x, y, 0) = f(x, y)$, los c_{nm} son:

$$c_{nm} = \frac{4}{\pi^2 \text{sh}(\pi\sqrt{n^2+m^2})} \int_0^\pi \int_0^\pi f(x, y) \text{sen } nx \cos my \, dy \, dx \quad \begin{matrix} n = 1, 2, \dots \\ m = 0, 1, \dots \end{matrix}$$

Resolvamos el **problema de Dirichlet en una esfera**. En los libros de cálculo en varias variables se encuentra la expresión del laplaciano en esféricas:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \operatorname{sen} \theta \cos \phi \\ y &= r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \right\} \rightarrow \Delta u = u_{rr} + \frac{2u_r}{r} + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2} + \frac{\cos \theta u_\theta}{\operatorname{sen} \theta r^2} + \frac{u_{\phi\phi}}{\operatorname{sen}^2 \theta r^2}$$



Veamos primero el caso con **datos independientes de ϕ** :

$$\left\{ \begin{aligned} u_{rr} + \frac{2}{r} u_r + \frac{1}{r^2} \left[u_{\theta\theta} + \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} u_\theta \right] &= 0, \quad r < R \\ u(R, \theta) &= f(\theta), \quad \theta \in [0, \pi] \end{aligned} \right.$$

que, de hecho, es un problema con **dos variables**. Podemos buscar entonces soluciones que tampoco dependan de ϕ . Separando variables:

$$u = R(r) \Theta(\theta) \rightarrow \begin{cases} r^2 R'' + 2rR' - \lambda R = 0 \\ \Theta'' + \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \Theta' + \lambda \Theta = 0 \end{cases}$$

El cambio $s = \cos \theta$ [$\Theta' = -\operatorname{sen} \theta \frac{d\Theta}{ds}$, $\Theta'' = \operatorname{sen}^2 \theta \frac{d^2\Theta}{ds^2} - \cos \theta \frac{d\Theta}{ds}$] lleva la segunda ecuación a:

$$[1-s^2] \frac{d^2\Theta}{ds^2} - 2s \frac{d\Theta}{ds} + \lambda \Theta = 0, \quad \text{ecuación de Legendre.}$$

Imponemos que Θ esté **acotada en $s = \pm 1$** [$\theta = 0, \pi$ polos de la esfera]. Los autovalores de este **problema singular** (citado en 3.1) son $\lambda_n = n(n+1)$, $n=0, 1, \dots$ y sus autofunciones son los **polinomios de Legendre**:

$$\{P_n(s)\} = \{P_n(\cos \theta)\} \quad \left[P_0 = 1, P_1 = s, P_2 = \frac{3}{2}s^2 - \frac{1}{2}, P_3 = \frac{5}{2}s^3 - \frac{3}{2}s, \dots \right]$$

Para estos valores de λ :

$$\begin{aligned} r^2 R'' + 2rR' - n(n+1)R &= 0 \rightarrow \mu^2 + \mu - n(n+1) = 0 \rightarrow \mu = n, -(n+1) \\ \rightarrow R_n &= c_1 r^n + c_2 r^{-(n+1)} \xrightarrow{R \text{ acotada}} R_n = \{r^n\}, \quad n=0, 1, \dots \end{aligned}$$

Probamos entonces:

$$\begin{aligned} u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos \theta) &\rightarrow u(R, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n P_n(\cos \theta) = f(\theta) \\ \rightarrow a_n &= \frac{2n+1}{2R^n} \int_0^\pi f(\theta) P_n(\cos \theta) \operatorname{sen} \theta d\theta, \quad n=0, 1, \dots \end{aligned}$$

pues el **peso** es $r(\theta) = \operatorname{sen} \theta$ [$(\operatorname{sen} \theta \Theta')' + \lambda \operatorname{sen} \theta \Theta = 0$] y de los P_n se sabe que:

$$\int_0^\pi [P_n(\cos \theta)]^2 \operatorname{sen} \theta d\theta \stackrel{s=\cos \theta}{=} \int_{-1}^1 [P_n(s)]^2 ds = \frac{2}{2n+1}$$

Ej 2. Si $R=1$ y $f(\theta) = \cos^2 \theta$ se tiene: $a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 s^2 P_n(s) ds$.

Así pues: $a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 s^2 ds = \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{5}{2} \int_{-1}^1 [\frac{3}{2}s^4 - \frac{1}{2}s^2] ds = \frac{2}{3}$, y los demás $a_n = 0$ (ya que P_1 es impar ($\Rightarrow a_1 = 0$), y para desarrollar s^2 bastan P_0, P_1 y P_2).

La solución es, por tanto, $u(r, \theta) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}r^2 + r^2 \cos^2 \theta$ [$= \frac{1}{3}(1-x^2-y^2+2z^2)$].

Para un dato como este se podrían determinar los coeficientes tanteando:

$$\cos^2 \theta = \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{3} \rightarrow a_2 = \frac{2}{3}, \quad a_0 = \frac{1}{3}, \quad \text{como antes.}$$

[Para resolver problemas con términos no homogéneos $F(r, \theta)$ en la ecuación, se probaría como siempre una serie de autofunciones: $u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r) P_n(\cos \theta)$].

Pasemos ahora a resolver, con menos detalles, el problema general en 3 variables:

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2}\left[u_{\theta\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}u_{\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}u_{\phi\phi}\right] = 0, & r < R \\ u(R, \theta, \phi) = f(\theta, \phi), & \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Vamos en este caso a separar primero la parte radial y la que depende de los dos ángulos:

$$u = R(r)Y(\theta, \phi) \rightarrow \begin{cases} r^2R'' + 2rR' - \lambda R = 0 \\ Y_{\phi\phi} + \sin\theta(\sin\theta Y_{\theta})_{\theta} + \lambda \sin^2\theta Y = 0 \end{cases}$$

Separando ahora la parte angular: $Y(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi) \rightarrow \begin{cases} \Phi'' + \mu\Phi = 0 \\ (\sin\theta\Theta')' + (\lambda \sin\theta - \frac{\mu}{\sin\theta})\Theta = 0 \end{cases}$

La solución ha de ser 2π -periódica en ϕ : $\mu_m = m^2$, $\Phi_m(\phi) = \{\cos m\phi, \sin m\phi\}$, $m = 0, 1, \dots$

Llevando estos μ_m a la otra ecuación y haciendo como antes $s = \cos\theta$ se tiene:

$$\frac{d}{ds}\left[(1-s^2)\frac{d\Theta}{ds}\right] + \left[\lambda - \frac{m^2}{1-s^2}\right]\Theta = 0, \quad \Theta \text{ acotada en } s = \pm 1.$$

La EDO, nueva para nosotros, se llama **ecuación asociada de Legendre**. Si $m = 0$ es la de Legendre y las autofunciones eran los P_n . Se prueba que los autovalores del problema singular son también $\lambda_n = n(n+1)$, y sus autofunciones están relacionadas con ellos:

$$P_n^m(s) = (1-s^2)^{m/2} \frac{d^m}{ds^m} P_n(s), \quad \text{con } m \leq n$$

$$[P_n^0 = P_n, P_1^1 = \sin\theta, P_2^1 = 3\sin\theta\cos\theta, P_2^2 = 3\sin^2\theta, \dots]$$

$$\rightarrow Y_n^m(\theta, \phi) = \{\cos m\phi P_n^m(\cos\theta), \sin m\phi P_n^m(\cos\theta)\}, \quad n = 0, 1, \dots, m = 0 \dots n.$$

$$[Y_0^0 = \{1\}, Y_1^0 = \{\cos\theta\}, Y_1^1 = \{\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi\}, Y_2^0 = \{\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\}, Y_2^1 = \{3\sin\theta\cos\theta\cos\phi, 3\sin\theta\cos\theta\sin\phi\}, Y_2^2 = \{3\sin^2\theta\cos 2\phi, 3\sin^2\theta\sin 2\phi\}, \dots]$$

Las soluciones acotadas en $r=0$ para esos λ_n son como antes $R_n = \{r^n\}$.

Los **armónicos esféricos** son las soluciones de la ecuación de Laplace $u_n^m = r^n Y_n^m(\theta, \phi)$.

[Hay libros que llaman armónicos esféricos a los Y_n^m , otros a múltiplos concretos de los $Y_n^m \dots$].

Con ellos formamos la serie:

$$u(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \left[a_{n0} P_n(\cos\theta) + \sum_{m=1}^n (a_{nm} \cos m\phi + b_{nm} \sin m\phi) P_n^m(\cos\theta) \right] \rightarrow$$

$$a_{n0} = \frac{2n+1}{4\pi R^n} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \phi) P_n(\cos\theta) \sin\theta d\theta d\phi,$$

$$a_{nm} = \frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi(n+m)!R^n} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \phi) \cos m\phi P_n^m(\cos\theta) \sin\theta d\theta d\phi$$

$$b_{nm} = \frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi(n+m)!R^n} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \phi) \sin m\phi P_n^m(\cos\theta) \sin\theta d\theta d\phi, \quad m \geq 1$$

$$\text{puesto que se cumple } \int_{-1}^1 [P_n^m(t)]^2 dt = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}.$$

Ej 3. Para $R=1$ y $f(\theta, \phi) = \sin^2\theta \sin^2\phi$. Buscamos identificar como en el ejemplo 2.

$$\begin{aligned} \text{Debe ser: } f(\theta, \phi) &= \frac{1}{2} \sin^2\theta - \frac{1}{2} \sin^2\theta \cos 2\phi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos^2\theta - \frac{1}{2} \sin^2\theta \cos 2\phi \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left[\frac{3}{2} \cos^2\theta - \frac{1}{2} \right] - \frac{1}{2} \sin^2\theta \cos 2\phi = \frac{1}{3} Y_0^0 - \frac{1}{3} Y_2^0 - \frac{1}{2} Y_2^2. \end{aligned}$$

Por tanto, $a_{00} = \frac{1}{3}$, $a_{20} = -\frac{1}{3}$, $a_{22} = -\frac{1}{2}$ y los otros son cero. La solución es, pues:

$$u = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} r^2 \left[\frac{3}{2} \cos^2\theta - \frac{1}{2} \right] - \frac{1}{2} r^2 \sin^2\theta \cos 2\phi.$$

$$\text{Escrita en cartesianas: } u = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{6} [x^2 + y^2 + z^2] - \frac{1}{2} [x^2 - y^2] = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} x^2 + \frac{2}{3} y^2 - \frac{1}{3} z^2,$$

función que cumple $\Delta u = 0$ y que cuando $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ vale y^2 [$= f(\theta, \phi)$ si $r = 1$].

Veamos ahora el **problema exterior** de Dirichlet para Laplace en el círculo y en la esfera con simetría (con datos independientes de ϕ). Para que haya unicidad, las condiciones en el infinito han de ser distintas:

plano:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{si } r > R \\ u(R, \theta) = f(\theta), & 0 \leq \theta < 2\pi \\ u \text{ acotada cuando } r \rightarrow \infty \end{cases}$$

espacio:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{si } r > R \\ u(R, \theta) = f(\theta), & 0 \leq \theta \leq \pi \\ u \rightarrow 0 \text{ cuando } r \rightarrow \infty \end{cases}$$

Separando variables se llega a las mismas Θ_n que en los problemas interiores:

$$\{\Theta_n\} = \{\cos n\theta, \sin n\theta\}, \quad n=0, 1, \dots \quad \{\Theta_n\} = \{P_n(\cos \theta)\}, \quad n=0, 1, \dots$$

Pero hay que elegir diferentes R_n , para las nuevas condiciones en el infinito:

$$\begin{aligned} n=0, \quad c_1 + c_2 \ln r \rightarrow R_0 = \{1\} & \qquad n=0, \quad c_1 + c_2 r^{-1} \rightarrow R_0 = \{r^{-1}\} \\ n > 0, \quad c_1 r^n + c_2 r^{-n} \rightarrow R_n = \{r^{-n}\} & \qquad n > 0, \quad c_1 r^n + c_2 r^{-(n+1)} \rightarrow R_n = \{r^{-(n+1)}\} \end{aligned}$$

[En el plano ningún $R_0 \rightarrow 0$, y en el espacio están acotadas tanto 1 como r^{-1} ; tender a 0 nos dejaría sin soluciones en el plano y pedir acotación daría infinitas en el espacio].

Probando las series correspondientes e imponiendo $u(R, \theta) = f(\theta)$, se obtiene que las soluciones respectivas son estas series con los coeficientes indicados:

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta] & u(r, \theta) &= \frac{a_0}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^{-(n+1)} P_n(\cos \theta) \\ a_n &= \frac{R^n}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta, \quad n=0, 1, \dots & a_n &= \frac{(2n+1)R^{n+1}}{2} \int_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta \\ b_n &= \frac{R^n}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta \, d\theta, \quad n=1, 2, \dots & & n=0, 1, \dots \end{aligned}$$

Ej 4. Hallemos la solución en ambos casos cuando $f(\theta) = a$ constante.

Basta mirar las series para deducir las soluciones en ambos casos:

$$u = a \quad \text{en el plano.}$$

$$u = \frac{aR}{r} \quad \text{en el espacio.}$$

[Interpretemos estos resultados mirándolos como soluciones estacionarias de la ecuación del calor. Si mantenemos la superficie de una bola de radio R constantemente a a^0 , la temperatura que tenderían a tener todos los puntos del espacio sería aR/r , disminuyendo con la distancia a la bola. Para el primer caso, en vez de imaginarnos en un mundo bidimensional, situémonos en el espacio con datos y soluciones independientes de la variable z : si toda la superficie de un cilindro infinito de radio R se mantiene a a^0 , todo el espacio tenderá a tener esa temperatura].

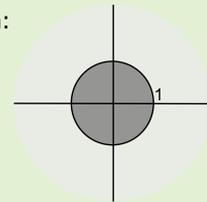
[Si nos planteásemos el problema en el interior $r < R$, es inmediato ver que la solución, tanto en el plano como en infinito, es $u = a$].

Ej 5. Sea $R=1$ y $f(\theta) = \cos^2 \theta$. Resolvamos y comparemos con las soluciones en $r < 1$.

En el plano, la serie del interior y exterior llevan a la misma condición:

$$\begin{aligned} u(1, \theta) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \rightarrow \\ u &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} r^2 \cos 2\theta \quad (\text{interior}), \quad u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2r^2} \cos 2\theta \quad (\text{exterior}). \end{aligned}$$

$$\left[\text{En cartesianas } u = \frac{1+x^2-y^2}{2} \text{ y } u = \frac{1}{2} + \frac{x^2-y^2}{2(x^2+y^2)^2}, \text{ respectivamente.} \right]$$

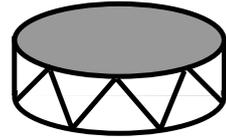


Para el espacio, el interior ya se ha resuelto en el ejemplo 2. Y en el exterior la condición que aparece al hacer $r=1$ vuelve a coincidir con la del interior.

Las soluciones respectivas son, pues:

$$u = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} r^2 + r^2 \cos^2 \theta \quad (\text{interior}), \quad u = \frac{1}{3r} - \frac{1}{3r^3} + \frac{1}{r^3} \cos^2 \theta \quad (\text{exterior}).$$

Si los problemas ‘esféricos’ llevan a Legendre, los ‘cilíndricos’ (Laplace en polares más otra coordenada, t en calor y ondas, z en Laplace) llevan a Bessel, como sucede en los problemas de **vibración de una membrana circular** (de un tambor).



Como hicimos con Laplace en la esfera, para empezar tratamos el caso más sencillo con 2 variables en el que la vibración no depende de θ . Y para simplificar aún más suponemos que inicialmente es $u_t=0$:

$$\begin{cases} u_{tt} - [u_{rr} + \frac{1}{r}u_r] = 0, & r \leq 1, t \in \mathbf{R} \\ u(r, 0) = f(r), & u_t(r, 0) = 0 \\ u(1, t) = 0 \end{cases}$$

[Las vibraciones con simetría radial en el espacio, como se vio en 4.2, son más sencillas].

$$u = RT \rightarrow \frac{T''}{T} = \frac{R'' + \frac{R'}{r}}{R} = -\lambda \rightarrow \begin{cases} [rR']' + \lambda rR = 0, & R \text{ acotada en } 0, R(1) = 0 \\ T'' + \lambda T = 0, & T'(0) = 0 \rightarrow \{ \cos(\sqrt{\lambda} t) \} \end{cases}$$

El problema de contorno singular para la R fue visto al final de 3.1. Recordemos que con $s=r\sqrt{\lambda}$ desaparecía λ y la ecuación pasaba a ser una de Bessel:

$$sR''(s) + R'(s) + sR(s) = 0 \rightarrow R = c_1 J_0(s) + c_2 K_0(s) = c_1 J_0(wr) + c_2 K_0(wr), \quad w = \sqrt{\lambda}$$

Imponiendo los datos se tenían los autovalores $\lambda_n = w_n^2$ tales que $J_0(w_n) = 0$, y las autofunciones asociadas $R_n = \{J_0(w_n r)\}$.

Nos falta imponer la condición inicial aún no utilizada a la serie:

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(w_n t) J_0(w_n r) \rightarrow u(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(w_n r) = f(r)$$

Este desarrollo ya lo discutimos en el último ejemplo de 3.2. Allí vimos que era:

$$c_n = \frac{2}{J_1^2(w_n)} \int_0^1 r f(r) J_0(w_n r) dr$$

Ej 6. Hallemos si $f(r) = 1 - r^2$ la integral $\int_0^1 (r - r^3) J_0(w_n r) dr$, $w_n = \sqrt{\lambda_n}$, que define c_n .

$$\text{Haciendo } s = w_n r: \int_0^1 = \frac{1}{w_n^2} \int_0^{w_n} s J_0(s) ds - \frac{1}{w_n^4} \int_0^{w_n} s^3 J_0(s) ds.$$

La primera primitiva es inmediata, pues $[sJ_1]' = sJ_0$. La segunda, por partes:

$$\int s^2 J_0 ds = s^3 J_1 - 2 \int s^2 J_1 ds = s^3 J_1 - 2s^2 J_2 = (s^3 - 4s) J_1 + 2s^2 J_0,$$

ya que $[s^2 J_2]' = s^2 J_1$ y $J_{n+1} = \frac{2n}{s} J_n - J_{n-1}$. Y como $J_0(w_n) = 0$ concluimos:

$$\int_0^1 = \frac{4}{w_n^3} J_1(w_n) \Rightarrow u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{w_n^3 J_1(w_n)} \cos(w_n t) J_0(w_n r).$$

Pese a su aspecto complicado, esta solución no lo es mucho más que la $\sum k_n \cos(n\pi t) \sin(n\pi x)$ que se obtendría para la cuerda vibrante con datos similares (que resolvimos en 4.2).

En muchos libros (o en programas tipo Maple o Sage) se pueden encontrar los ceros w_n de J_0 :

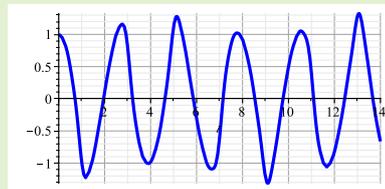
$$\{w_n\} \approx 2.4048256, 5.5200781, 8.6537279, 11.791534, 14.930918, \dots$$

$$\text{y los valores de } J_1(w_n): 0.519147, -0.340265, 0.271452, -0.232461, 0.206547, \dots$$

Necesitamos sólo un programa que reconozca la J_0 para dar valores o hacer dibujos aproximados de la solución. Por ejemplo, utilizando los 5 primeros términos de la serie, podemos (con Maple en este caso) aproximar y dibujar $u(0, t)$:

$$\begin{aligned} u(0, t) \approx & 1.108 \cos(2.405 t) - 0.1398 \cos(5.520 t) \\ & + 0.04548 \cos(8.654 t) - 0.02099 \cos(11.79 t) \\ & + 0.01164 \cos(14.93 t) \end{aligned}$$

Las vibraciones de un tambor, a diferencia de lo que pasa en una cuerda, no son periódicas (los w_n no son múltiplos exactos unos de otros).



Para acabar esta sección, tratemos el problema más general y complicado en 3 variables:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2[u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}] = 0, & r \leq 1, t \in \mathbf{R} \\ u(r, \theta, 0) = f(r, \theta), & u_t(r, \theta, 0) = 0 \\ u(1, \theta, t) = 0 \end{cases}$$

$$u = R\Theta T \rightarrow \frac{T''}{c^2 T} = \frac{R'' + \frac{R'}{r}}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''}{\Theta} = -\lambda \rightarrow \frac{r^2 R'' + rR'}{R} + \lambda r^2 = \frac{\Theta''}{\Theta} = -\mu \rightarrow$$

$$\begin{cases} \Theta'' + \mu\Theta = 0, & \Theta \text{ } 2\pi\text{-periódica} \rightarrow \mu_m = m^2, m=0, 1, \dots, \Theta_m = \{\cos m\theta, \sin m\theta\}, \Theta_0 = \{1\} \\ T'' + \lambda c^2 T = 0, & T'(0) = 0 \rightarrow \{\cos[\sqrt{\lambda} ct]\} \\ r^2 R'' + rR' + [\lambda r^2 - \mu]R = 0, & R \text{ acotada en } 0 \end{cases}$$

Para $\mu = m^2$ consideramos el problema de contorno singular para R :

$$\begin{cases} r^2 R'' + rR' + [\lambda r^2 - m^2]R = 0 \\ R \text{ acotada en } 0, R(1) = 0 \end{cases}$$

Haciendo $s = r\sqrt{\lambda}$ desaparece como siempre λ y la ecuación se convierte en Bessel:

$$s^2 R''(s) + sR'(s) + [s^2 - m^2]R(s) = 0 \rightarrow$$

$$R = c_1 J_m(s) + c_2 K_m(s) = c_1 J_m(wr) + c_2 K_m(wr), w = \sqrt{\lambda}$$

R acotada $\Rightarrow c_2 = 0$. Los autovalores serán los $\lambda = w^2$ que hagan $J_m(wr) = 0$, que son una sucesión infinita para cada m : $w_{m_1}, \dots, w_{m_k}, \dots$

Y las autofunciones son $R_{mk} = \{J_m(w_{m_k} r)\}$. Así que probamos:

$$u(r, \theta, t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} c_{0k} \cos(cw_{0k} t) J_0(w_{0k} r) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} [c_{mk} \cos n\theta + d_{mk} \sin n\theta] \cos(cw_{m_k} t) J_m(w_{m_k} r)$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} c_{0k} J_0(w_{0k} r) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} [c_{mk} \cos n\theta + d_{mk} \sin n\theta] J_m(w_{m_k} r) = f(r, \theta)$$

Para r fijo, $f(r, \theta) = \frac{1}{2} A_0(r) + \sum_{m=1}^{\infty} [A_m(r) \cos m\theta + B_m(r) \sin m\theta]$, con

$$A_m(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \theta) \cos m\theta d\theta, m=0, 1, \dots,$$

$$B_m(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \theta) \sin m\theta d\theta, m=1, 2, \dots$$

Desarrollando:

$$A_m(r) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{mk} J_m(w_{m_k} r), B_m(r) = \sum_{k=1}^{\infty} d_{mk} J_m(w_{m_k} r)$$

Teniendo en cuenta (se puede probar) que: $\int_0^1 r J_m^2(w_{m_k} r) dr = \frac{1}{2} J_{m+1}^2(w_{m_k})$,

se llega a la expresión para los coeficientes de la serie doble de arriba:

$$\begin{aligned} c_{mk} &= \frac{2}{\pi J_{m+1}^2(w_{m_k})} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r f(r, \theta) \cos n\theta J_m(w_{m_k} r) dr d\theta \\ d_{mk} &= \frac{2}{\pi J_{m+1}^2(w_{m_k})} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r f(r, \theta) \sin n\theta J_m(w_{m_k} r) dr d\theta \end{aligned}$$

4.5. Funciones de Green.

Comencemos tratando las funciones de Green para **problemas de contorno no homogéneos para EDOs**. Veamos una fórmula que para cualquier $f(x)$ nos da en términos de integrales la solución (en el caso de que sea única) de:

$$(P_f) \begin{cases} [p(x)y']' + g(x)y = f(x) \\ \alpha y(a) - \alpha' y'(a) = \beta y(b) + \beta' y'(b) = 0 \end{cases}, \quad p \in C^1, g, f \in C, p > 0 \text{ en } [a, b].$$

conocidas las soluciones de la ecuación homogénea (algo parecido a la fórmula de variación de las constantes para problemas de valores iniciales):

Supongamos que (P_h) tiene sólo la solución $y \equiv 0$ y sean y_1 e y_2 soluciones no triviales de la homogénea $[py']' + gy = 0$ que cumplen, respectivamente, $\alpha y_1(a) - \alpha' y_1'(a) = 0$ y $\beta y_2(b) + \beta' y_2'(b) = 0$. Entonces la solución única de (P_f) es:

Teor 1

$$y(x) = \int_a^b G(x, s) f(s) ds, \quad \text{con } G(x, s) = \begin{cases} \frac{y_1(s)y_2(x)}{\rho |W|(y_1, y_2)}, & a \leq s \leq x \\ \frac{y_1(x)y_2(s)}{\rho |W|(y_1, y_2)}, & x \leq s \leq b \end{cases}.$$

A la $G(x, s)$ se le llama **función de Green** del problema.

[Observemos que el denominador que aparece en la G es constante:

$$[p(y_1 y_2' - y_2 y_1')] = y_1 [p(y_2')] - y_2 [p(y_1')] = -g y_1 y_2 + g y_2 y_1 = 0].$$

Comprobemos que la $y(x)$ de arriba cumple (P_f) . Desarrollando la integral:

$$y(x) = y_1(x) \int_a^b \frac{y_2(s)}{|W|(s)} \frac{f(s)}{\rho(s)} ds + y_2(x) \int_a^x \frac{y_1(s)}{|W|(s)} \frac{f(s)}{\rho(s)} ds - y_1(x) \int_a^x \frac{y_2(s)}{|W|(s)} \frac{f(s)}{\rho(s)} ds = c y_1 + y_p$$

Por tanto, $y(x)$ es solución de la no homogénea $y'' + \frac{p'}{p} y' + \frac{q}{p} y = \frac{f}{p}$.

Además como $y'(x) = y_1' \int_a^b \frac{y_2}{|W|} \frac{f}{\rho} + y_2' \int_a^x \frac{y_1}{|W|} \frac{f}{\rho} - y_1' \int_a^x \frac{y_2}{|W|} \frac{f}{\rho}$ se tiene que:

$$y(a) = c y_1(a), \quad y'(a) = c y_1'(a), \quad y(b) = k y_2(b), \quad y'(b) = k y_2'(b), \quad c = \int_a^b \frac{y_2 f}{|W| \rho}, \quad k = \int_a^b \frac{y_1 f}{|W| \rho}$$

Como y_1, y_2 cumplen cada condición de contorno, también lo hace la y .

Una vez **hallada la G , dada cualquier f , basta hacer un par de integraciones para encontrar la solución del problema no homogéneo (P_f) .**

[Que quede claro que cada y_k satisface solamente una condición (o en a o en b ; ambas condiciones sólo las cumple la trivial). La f y la p del teorema son, como siempre, las de la ecuación escrita en la forma $[py']' + gy = f$; en muchos casos será $p \equiv 1$ (como en el ejemplo siguiente), pero en otros deberemos reescribir la ecuación].

Ej 1.

$$(P_1) \begin{cases} y'' = f(x) \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y'' = 0 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases} \quad \text{sólo lo satisface } y \equiv 0.$$

Por tanto, (P_1) tiene solución única. Hallemos su función de Green:

La solución general de la ecuación homogénea es $y = c_1 + c_2 x$.

De la primera condición de contorno $y(0) = c_1 = 0$. Podemos tomar $y_1 = x$.

De la segunda, $y(1) = c_1 + c_2 = 0$. Elegimos $y_2 = x - 1$. Entonces:

$$|W|(x) = \begin{vmatrix} x & x-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad p(x) = 1, \quad G(x, s) = \begin{cases} s(x-1), & 0 \leq s \leq x \\ x(s-1), & x \leq s \leq 1 \end{cases}$$

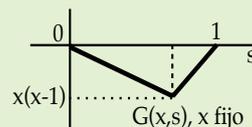
Si, por ejemplo, $f(x) = 1$, la solución de (P_1) viene dada por:

$$y(x) = \int_0^1 G(x, s) 1 ds = (x-1) \int_0^x s ds + x \int_x^1 (s-1) ds = \frac{1}{2} [x^2 - x]$$

Para resolver un problema con una f dada, calcular la G puede ser un rodeo inútil. Por ejemplo, la última solución se podría obtener:

$$y'' = 1 \rightarrow y = c_1 + c_2 x + \frac{1}{2} x^2 \rightarrow \begin{cases} y(0) = c_1 = 0 \\ y(1) = c_1 + c_2 + \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \rightarrow y = \frac{1}{2} [x^2 - x] \text{ como antes.}$$

Pero para cada nueva f habría que volver a hallar la y_p e imponer $y(0) = y(1) = 0$.



Las funciones de Green están muy ligadas a la 'función' δ . Observemos que la $G(x, s)$ del ejemplo 1 para x fijo (o para s fijo, pues G es simétrica) es continua pero no derivable en $s=x$ y su 'derivada' segunda es $\delta(s-x)$. De hecho, esto es lo que sucede en general:

Teor 2 $G(x, s)$ es la solución para $x \in (a, b)$ fijo de
$$\begin{cases} [p(s)G']' + g(s)G = \delta(s-x) \\ \alpha G(a) - \alpha' G'(a) = \beta G(b) + \beta' G'(b) = 0 \end{cases}$$

[La prueba es trivial: $\int_a^b G(s, u) \delta(u-x) du = G(s, x) = G(x, s)$].

Hallamos la G del (P_1) por este camino más largo, pero que es el que se generaliza a las EDPs.

$$\begin{cases} G''(s) = \delta(s-x) & G''=0, s \neq x \\ G(0)=G(1)=0 \end{cases} \xrightarrow{G''=0, s \neq x} G(s) = \begin{cases} c_1 + c_2 s, & y(0)=0 \rightarrow G = c_2 s, s \leq x \\ k_1 + k_2 s, & y(1)=0 \rightarrow G = k_2 [s-1], s \geq x \end{cases}$$

Y como $G'' = \delta$, ha de ser continua G y su derivada tener un salto en x de magnitud unidad:

$$\rightarrow \begin{cases} G(x^-) = c_2 x = k_2 [x-1] = G(x^+) \\ G'(x^+) - G'(x^-) = k_2 - c_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_2 = x-1 \\ k_2 = x \end{cases}$$

La idea de la función de Green se utiliza en diversos problemas de EDOs y EDPs. Aquí nos limitaremos a hablar de las **funciones de Green para la ecuación de Laplace**.

[En lo que sigue operaremos formalmente con la δ en dos variables, utilizando sólo:

i. $\delta(\xi-x, \eta-y) = 0$ para $(\xi, \eta) \neq (x, y)$

ii. $\iint_D F(\xi, \eta) \delta(\xi-x, \eta-y) d\xi d\eta = F(x, y)$ si F continua en $D \subset \mathbf{R}^2$ y $(x, y) \in D$].

Consideremos el problema de **Dirichlet no homogéneo:**

$$(P_D) \begin{cases} \Delta u = F(x, y) \text{ en } D \\ u = f \text{ en } \partial D \end{cases}$$

Nuestro objetivo es (como en lo anterior) expresar su solución única en función de integrales en las que sólo aparezcan una función de Green G y los datos F y f :

Teor 3 A la solución $G(x, y; \xi, \eta)$ de $(P_G) \begin{cases} \Delta G = \delta(\xi-x, \eta-y) \text{ en } D \\ G = 0 \text{ en } \partial D \end{cases}$, para cada $(x, y) \in D$, vista como función de (ξ, η) , se le llama **función de Green de (P_D)** . Entonces: $u(x, y) = \iint_D G(x, y; \xi, \eta) F(\xi, \eta) d\xi d\eta + \oint_{\partial D} G_{\mathbf{n}}(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta) ds$, es solución de (P_D)

[$G_{\mathbf{n}}$ es, como siempre, la derivada de G en la dirección de \mathbf{n} , vector unitario exterior a D].

Del teorema de la divergencia es fácil deducir la llamada segunda identidad de Green:

$$\text{Si } u \text{ y } G \text{ son } C^2(\bar{D}) \text{ se tiene } \iint_D [G \Delta u - u \Delta G] d\xi d\eta = \oint_{\partial D} [G u_{\mathbf{n}} - u G_{\mathbf{n}}] ds$$

Si u es la solución de (P_D) y G la de (P_G) , y admitimos que la identidad anterior es válida para nuestra G (que claramente no es C^2 , pero se justifica con 'distribuciones') tenemos:

$$\iint_D [G F - u \delta] d\xi d\eta = \oint_{\partial D} [-f G_{\mathbf{n}}] ds \rightarrow u = \iint_D G F d\xi d\eta + \oint_{\partial D} G_{\mathbf{n}} f ds$$

¿Cómo resolver (P_G) ? Comencemos buscando una $v(x, y; \xi, \eta)$ que, como función de (ξ, η) , satisfaga $\Delta v = \delta$, aunque no cumpla la condición de contorno. ¿Para qué funciones es $\Delta v = 0$ y pueden originar una δ ? Las soluciones de Laplace en polares dependiendo de r son:

$$v_{rr} + \frac{1}{r} v_r = 0 \rightarrow v = c_1 + c_2 \ln r$$

Así que algún múltiplo del discontinuo logaritmo de la distancia $r = \overline{PQ}$ del punto $P = (\xi, \eta)$ al $Q = (x, y)$ es buen candidato a v :

Teor 4 $v = \frac{1}{4\pi} \ln[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2] = \frac{1}{2\pi} \ln \overline{PQ}$ satisface $\Delta v = \delta(\xi-x, \eta-y)$ para (x, y) fijo. A v se le llama **solución fundamental** para el punto (x, y) .

Volvemos a hacer 'trampa' con la δ . Ya vimos que $\Delta v = 0$ si $r \neq 0$, o sea, si $(\xi, \eta) \neq (x, y)$. Además, el 'teorema' de la divergencia en un círculo de centro Q y radio R nos da:

$$\iint_{r \leq R} \Delta v d\xi d\eta = \oint_{r=R} v_{\mathbf{n}} ds = \oint_{r=R} v_r ds = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi R} R d\theta = 1 \rightarrow \Delta v = \delta$$

Si w satisface $\Delta w = 0$ en D , la función $v+w$ seguirá satisfaciendo $\Delta[v+w] = \delta$ para cada $(x, y) \in D$ fijo. Por tanto, **para encontrar G [y tener resuelto (P_D)] basta encontrar la w armónica en D tal que $v+w = G$ se anule en la frontera ∂D .**

La forma práctica de hallar la w (en recintos D limitados por rectas y circunferencias) es el **método de las imágenes**. Viendo la geometría de D se tratará de escribir G como suma de la solución fundamental v y de funciones armónicas w del mismo tipo, logaritmos de distancias a puntos Q' **exteriores** a D ('imágenes' de Q respecto de la ∂D), elegidos de forma que sea $G=0$ en la frontera de D . En un primer ejemplo, D está limitado por rectas:

Ej 2. $(P_2) \begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } D = \{x > 0\} \times \{y > 0\} \\ u(x, 0) = f(x), u(0, y) = 0, u \text{ acotada} \end{cases}$ Sean $Q=(x, y) \in D$ fijo, $P=(\xi, \eta)$, $v = \frac{1}{2\pi} \ln \overline{PQ}$.

Si $Q' = (-x, y)$, es claro que $w' = -\frac{1}{2\pi} \ln \overline{PQ'}$ es una función de P que es armónica en D (lo es en $\mathbf{R}^2 - \{Q'\}$) y que $v + w' = 0$ si P pertenece al eje y , pues entonces $\overline{PQ} = \overline{PQ'}$. Análogamente $w_* = -\frac{1}{2\pi} \ln \overline{PQ_*}$, con $Q_* = (x, -y)$, es armónica en D y $v + w_* = 0$ si P está en el eje x . Para que G sea cero en ambos ejes a la vez hay que sumar una nueva $w'_* = -\frac{1}{2\pi} \ln \overline{PQ'_*}$, $Q'_* = (-x, -y)$. Entonces $G(P, Q) = v + w' + w_* + w'_*$ es la función de Green buscada, ya que $\Delta G = \delta$ [pues $\Delta v = \delta$ y $\Delta(w' + w_* + w'_*) = 0$] y $G = 0$ si $P \in \partial D$ [si P está en el eje y es $\overline{PQ} = \overline{PQ'}$ y $\overline{PQ_*} = \overline{PQ'_*}$; y similar en el eje x].

Escribiendo las distancias analíticamente tenemos:

$$G(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{4\pi} \ln [(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2] - \frac{1}{4\pi} \ln [(\xi+x)^2 + (\eta-y)^2] - \frac{1}{4\pi} \ln [(\xi-x)^2 + (\eta+y)^2] + \frac{1}{4\pi} \ln [(\xi+x)^2 + (\eta+y)^2]$$

Y como $\mathbf{n} = -\mathbf{j}$ en el eje x , la solución de nuestro problema (P_2) será:

$$u(x, y) = \oint_{\partial D} G \mathbf{n} f ds = \int_0^\infty -G|_{\eta=0} f(\xi) d\xi = \dots = \frac{y}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{1}{(\xi-x)^2 + y^2} - \frac{1}{(\xi+x)^2 + y^2} \right] f(\xi) d\xi$$

Resolvamos ahora el **problema no homogéneo de Dirichlet en el círculo**:

$(P_3) \begin{cases} \Delta u = F(r, \theta) \text{ en } r < R \\ u(R, \theta) = f(\theta), \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$ $Q=(r, \theta) \in D$ fijo, $P=(\sigma, \phi)$ variable.

La solución fundamental v en estas coordenadas queda:

$$v = \frac{1}{2\pi} \ln \overline{PQ} = \frac{1}{4\pi} \ln [\sigma^2 + r^2 - 2r\sigma \cos(\theta - \phi)]$$

¿Dónde situar el punto imagen Q' ? Las cosas no son tan claras como en el ejemplo anterior. Es claro que su θ ha de ser igual, pero ¿a qué distancia del origen O colocarlo? Podríamos llegar al resultado tanteando, pero nos limitamos a comprobar que la G es:

$$G(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \left[\ln \overline{PQ} - \ln \overline{PQ'} + \ln \frac{R}{r} \right], \quad Q' = \left(\frac{R^2}{r}, \theta \right), \text{ es decir,}$$

$$G(r, \theta; \sigma, \phi) = \frac{1}{4\pi} \ln [\sigma^2 + r^2 - 2r\sigma \cos(\theta - \phi)] - \frac{1}{4\pi} \ln \left[R^2 + \frac{r^2\sigma^2}{R^2} - 2r\sigma \cos(\theta - \phi) \right]$$

En efecto: $G = v + v' + cte \Rightarrow \Delta G = 0$ [v' armónica en $\mathbf{R}^2 - \{Q'\}$ y $Q' \notin D$] y además $G = 0$ si $P \in \partial D$, o sea, si $\sigma = R$.

Además, $G_{\mathbf{n}} = G_{\sigma}|_{\sigma=R}$ y $ds = R d\phi$, por lo que la solución de (P_3) es:

$$u(r, \theta) = \int_0^R \int_0^{2\pi} \sigma G(r, \theta; \sigma, \phi) F(\sigma, \phi) d\phi d\sigma + \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\phi) d\phi}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi) + r^2}$$

[Expresión más compacta que las series de Fourier, aunque estas integrales, en general, no son calculables (y hay que aproximarlas, pero son aproximaciones también las sumas parciales)].

Las cuentas en **tres dimensiones** son similares a los de dos. Si G es solución de (P_G) :

$$u(x, y, z) = \iiint_D G F d\xi d\eta d\gamma + \oint_{\partial D} G_{\mathbf{n}} f dS \quad (\partial D \text{ es ahora una superficie})$$

La solución fundamental en el espacio es $v = -\frac{1}{4\pi PQ}$ [$v_{rr} + \frac{2}{r} v_r = 0 \rightarrow v = c_1 + \frac{c_2}{r}$]

Los puntos imágenes respecto a planos son igual de sencillos y para la esfera de radio R vuelve a situarse el punto Q' a una distancia R^2/r del origen.

Apéndice

Repaso de EDOs

Algunas EDOs de primer orden $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ resolubles

$[f, f_y$ continuas en un entorno de $(x_0, y_0) \Rightarrow$ existe solución única de $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$].

Separables: $\frac{dy}{dx} = \frac{p(x)}{q(y)} \rightarrow \int q(y) dy = \int p(x) dx + C$.

Se convierten en separables: $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ con $z = \frac{y}{x}$. $\frac{dy}{dx} = f(ax+by)$ con $z = ax+by$.

Lineales: $\frac{dy}{dx} = a(x)y + f(x) \rightarrow y = C e^{\int a(x) dx} + e^{\int a(x) dx} \int e^{-\int a(x) dx} f(x) dx$.

[solución general de la homogénea + solución y_p de la no homogénea].

Exactas: $M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$ con $M_y \equiv N_x \rightarrow \begin{matrix} M = U_x \\ N = U_y \end{matrix} \rightarrow U(x, y) = C$ solución.

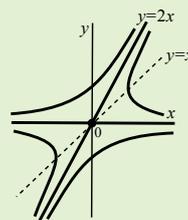
Ej. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y-x}$ (con solución única si $y \neq x$) se puede resolver por tres caminos diferentes:

$$z = \frac{y}{x} \rightarrow xz' + z = \frac{z}{z-1} \rightarrow \int \frac{(2z-2) dz}{z^2-2z} = -2 \int \frac{dx}{x} + C \rightarrow z^2 - 2z = \frac{y^2}{x^2} - 2\frac{y}{x} = \frac{C}{x^2} .$$

$$y + (x-y) \frac{dy}{dx} = 0, M_y \equiv N_x = 1 \rightarrow \begin{matrix} U_x = y \rightarrow U = xy + p(y) \\ U_y = x-y \rightarrow U = xy - \frac{1}{2}y^2 + q(x) \end{matrix}, y^2 - 2xy = C .$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y-x}{y} = -\frac{x}{y} + 1 \text{ lineal (solución única si } y \neq 0) . x = \frac{C}{y} + \frac{1}{y} \int y dy = \frac{C}{y} + \frac{y}{2} .$$

[Pasa una única curva integral (solución de $\frac{dy}{dx} = \dots$ o de $\frac{dx}{dy} = \dots$) salvo por el origen $(0, 0)$].



EDOs lineales de orden 2

$$[n] \quad y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x), \quad a, b, f \text{ continuas en } I. \quad |W|(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} .$$

Si $x_0 \in I$, tiene una sola solución (definida en todo I) con $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'$.

Si y_1, y_2 son soluciones de la homogénea ($f \equiv 0$) con wronskiano $|W|(s) \neq 0$ para algún $s \in I$, la solución general de la homogénea es: $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$.

Si y_p es una solución de $[n]$, la solución general de $[n]$ es: $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p$.

Una solución particular de $[n]$ es: $y_p = y_2 \int \frac{y_1 f}{|W|} dx - y_1 \int \frac{y_2 f}{|W|} dx$ [fvc].

Si $b(x) \equiv 0, y' = v$ lleva $[n]$ a lineal de primer orden en v .

y_1 solución de la homogénea $\Rightarrow y_2 = y_1 \int e^{-\int a dx} y_1^{-2} dx$ solución de la homogénea.

Ej. $xy'' - 2y' = x \xrightarrow{y'=v} v' = \frac{2v}{x} + 1 \rightarrow v = Cx^2 + x^2 \int \frac{dx}{x^2} = Cx^2 - x \rightarrow y = K + Cx^3 - \frac{1}{2}x^2$.

[También se podrá ver como una ecuación de Euler: $x^2 y'' - 2xy' = x^2$, estudiadas en la sección 2.2].

Ej. $x^3 y'' - xy' + y = 0$. Es claro que $y_1 = x$ es solución de esta homogénea.

Como $a(x) = -\frac{1}{x^2}$ otra solución es: $y_2 = x \int \frac{e^{-\int -x^{-2} dx}}{x^2} dx = x e^{-1/x}$.

Por tanto, la solución general de la ecuación es: $y = c_1 x + c_2 x e^{-1/x}$.

[Las rectas $y = x+b$ son soluciones de la homogénea que saltan a la vista, pues el término con la y'' no aparece y basta mirar los otros dos].

Lineales de orden 2 con coeficientes constantes

$$[h] \quad y'' + ay' + by = 0, \quad \mu^2 + a\mu + b = 0 \quad (\text{sus raíces: autovalores de [h]}).$$

La solución general de [h] ($a, b \in \mathbf{R}$) es:

$$\begin{aligned} \text{Si } \mu_1 \neq \mu_2 \text{ reales} &\rightarrow y = c_1 e^{\mu_1 x} + c_2 e^{\mu_2 x} \\ \text{Si } \mu \text{ doble (real)} &\rightarrow y = (c_1 + c_2 x) e^{\mu x} \\ \text{Si } \mu = p \pm iq &\rightarrow y = (c_1 \cos qx + c_2 \sin qx) e^{px} \end{aligned}$$

$$[\text{Si } a, b \in \mathbf{C} \text{ será } y = c_1 e^{\mu_1 x} + c_2 e^{\mu_2 x} \text{ ó } y = (c_1 + c_2 x) e^{\mu x} \text{ con } \mu_1, \mu_2, \mu, c_1, c_2 \in \mathbf{C}].$$

$$\begin{aligned} \text{Ej. } y'' + 4y' + 3y = 0, \mu^2 + 4\mu + 3 = 0 &\rightarrow \mu = -1, -3 \rightarrow y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}. \\ y'' + 4y' + 4y = 0, \mu^2 + 4\mu + 4 = 0 &\rightarrow \mu = -2 \text{ doble} \rightarrow y = (c_1 + c_2 x) e^{-2x}. \\ y'' + 4y' + 5y = 0, \mu^2 + 4\mu + 5 = 0 &\rightarrow \mu = -2 \pm i \rightarrow y = (c_1 \cos x + c_2 \sin x) e^{-2x}. \\ y'' - 4iy' - 3y = 0, \mu^2 - 4i\mu - 3 = 0 &\rightarrow \mu = i, 3i \rightarrow y = c_1 e^{ix} + c_2 e^{3ix}, c_1, c_2 \in \mathbf{C}. \end{aligned}$$

Método de coeficientes indeterminados para [c] $y'' + ay' + by = f(x)$:

Si $f(x) = e^{\mu x} p_m(x)$, con p_m polinomio de grado m , y μ no es autovalor, tiene [c] solución particular de la forma $y_p = e^{\mu x} P_m(x)$, con P_m del mismo grado. Si μ es autovalor de multiplicidad r , hay $y_p = x^r e^{\mu x} P_m(x)$.

Si $f(x) = e^{\mu x} [p_j(x) \cos qx + q_k(x) \sin qx]$, p_j, q_k de grados j, k , y $p \pm iq$ no es autovalor, hay $y_p = e^{\mu x} [P_m(x) \cos qx + Q_m(x) \sin qx]$ con P_m y Q_m de grado $m = \max\{j, k\}$. Si $p \pm iq$ es autovalor hay $y_p = x e^{\mu x} [P_m(x) \cos qx + Q_m(x) \sin qx]$.

$$\text{Ej. } \begin{cases} y'' - y = e^x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases} \cdot \mu = \pm 1. \text{ La solución general de la homogénea es: } y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}.$$

$$y_p = A x e^x \rightarrow A(x+2) - Ax = 1 \rightarrow y_p = \frac{1}{2} x e^x. \text{ O más largo con la [fvc]:}$$

$$|W|(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2, \quad y_p = e^{-x} \int \frac{e^x e^x}{-2} dx - e^x \int \frac{e^{-x} e^x}{-2} dx = -\frac{1}{4} e^x + \frac{1}{2} x e^x.$$

$$\text{La solución general de la no homogénea será: } y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x e^x.$$

$$\text{Imponiendo los datos iniciales: } \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 + \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \rightarrow y = \frac{1}{4} e^{-x} - \frac{1}{4} e^x + \frac{1}{2} x e^x.$$

Ej. Hallemos una y_p de $y'' + y = f(x)$ para diferentes $f(x)$.

$$[\text{Su solución general es } y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + y_p].$$

$$\text{Si } f(x) = x^3, \text{ hay } y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \text{ (} P_3 \text{ arbitrario pues } \lambda = 0 \text{ no es autovalor)} \\ \rightarrow 6Ax + 2B + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = x^3 \rightarrow y_p = x^3 - 6x.$$

$$\text{Si } f(x) = 2xe^x, \text{ existe } y_p = e^x(Ax + B), y_p' = e^x(Ax + B + A), y_p'' = e^x(Ax + B + 2A) \\ \rightarrow e^x[(Ax + B + 2A) + (Ax + B)] = 2xe^x \rightarrow A = 1, B = -1 \rightarrow y_p = e^x(x - 1).$$

$$\text{Si } f(x) = e^x \cos x, \text{ hay } y_p = e^x(A \cos x + B \sin x) \rightarrow \\ (A + 2B) \cos x + (B - 2A) \sin x = \cos x \rightarrow \begin{cases} A + 2B = 1 \\ B - 2A = 0 \end{cases} \rightarrow y_p = e^x(\frac{1}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x).$$

$$\text{Si } f(x) = \sin x, \text{ como } \pm i \text{ es autovalor simple, } y_p = x(A \cos x + B \sin x) \\ \rightarrow 2B \cos x - 2A \sin x = \sin x \rightarrow y_p = -\frac{x}{2} \cos x.$$

$$\text{Si } f(x) = \cos^2 x, \text{ parece que no podemos usar coeficientes indeterminados, pero} \\ \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \rightarrow \text{hay } y_p = A + B \cos 2x + C \sin 2x \rightarrow y_p = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos 2x.$$

$$\text{Si } f(x) = (\cos x)^{-1}, \text{ hay que acudir a la fórmula de variación de las constantes:} \\ |W|(x) = 1 \rightarrow y_p = \sin x \int \frac{\cos x}{\cos x} dx - \cos x \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = x \sin x + \cos x \ln(\cos x).$$

Si [n] no es de coeficientes constantes, ni de Euler $x^2 y'' + ax y' + by = 0$, ni tiene $b(x) \equiv 0$, ni se puede encontrar una y_1 de la homogénea, hay que resolverla utilizando series de potencias [capítulo 2].

Repaso de cálculo en varias variables

Sean $\mathbf{a}, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $A \subset \mathbf{R}^n$. **Entorno** $B_r(\mathbf{a}) \equiv \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r\}$. \mathbf{a} **interior** a A si existe $B_r(\mathbf{a}) \subset A$. A **abierto** si $A = \text{int} A \equiv \{\mathbf{x} \text{ interiores a } A\}$. A **acotado** si hay $M \in \mathbf{R}$ tal que $\|\mathbf{a}\| < M \ \forall \mathbf{a} \in A$. **Frontera** de A es $\partial A \equiv \{\mathbf{x} : \forall r, B_r(\mathbf{x}) \text{ tiene puntos de } A \text{ y de } \mathbf{R}^n - A\}$. $\bar{A} = \text{int} A \cup \partial A$.

La **derivada según el vector \mathbf{v}** de un campo escalar $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ en un punto \mathbf{a} es:

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) \equiv f_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{h} = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}, \text{ siendo } \nabla f = (f_x, f_y)$$

Si $f(x(r, s), y(r, s))$, con $f, x, y \in C^1$, la **regla de la cadena** dice $f_r = f_x x_r + f_y y_r$
 $f_s = f_x x_s + f_y y_s$.

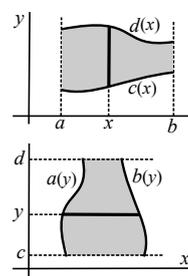
Si $\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ y_n = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$, el determinante **jacobiano** es $\frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \begin{vmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \dots & \partial f_1 / \partial x_n \\ \vdots & & \vdots \\ \partial f_n / \partial x_1 & \dots & \partial f_n / \partial x_n \end{vmatrix}$.

Polares: $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \rightarrow \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r$. **Esféricas:** $\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \rightarrow \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = r^2 \sin \theta$.

Integrales dobles:

Si f continua en $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\}$,
 $c(x) \leq d(x)$ continuas en $[a, b] \Rightarrow \iint_D f = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy dx$.

Si f continua en $D = \{(x, y) : c \leq y \leq d, a(y) \leq x \leq b(y)\}$,
 $a(y) \leq b(y)$ continuas en $[c, d] \Rightarrow \iint_D f = \int_c^d \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx dy$.



Cambios de variable en integrales dobles:

Sea $\mathbf{g}: (u, v) \rightarrow (x(u, v), y(u, v))$ de C^1 , inyectiva en D^* , $\mathbf{g}(D^*) = D$ y f integrable.

Entonces: $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$.

En particular: $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} r f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr d\theta$.

Integrales de línea de campos escalares:

Sea C la curva C^1 descrita por una función vectorial $\mathbf{c}(t): [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$ y sea f un campo escalar tal que $f(\mathbf{c}(t))$ es continua. Entonces: $\int_C f ds \equiv \int_a^b f(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\| dt$.

[No depende de la $\mathbf{c}(t)$ elegida. Si C es C^1 a trozos, se divide $[a, b]$ y se suman las integrales].

Teorema de la divergencia [en el plano; $\text{div } \mathbf{f} = f_x + g_y$ si $\mathbf{f} = (f, g)$]:

Sea $D \subset \mathbf{R}^2$ limitado por ∂D curva cerrada simple, $\mathbf{f}: D \rightarrow \mathbf{R}^2$ campo vectorial C^1 y \mathbf{n} vector normal unitario exterior a ∂D . Entonces $\iint_D \text{div } \mathbf{f} dx dy = \oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} ds$.

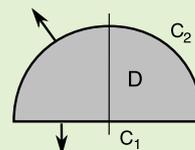
[Si ∂D viene descrita por $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$ un normal unitario es $\mathbf{n} = (y'(t), -x'(t)) / \|\mathbf{c}'(t)\|$].

Ej. Comprobemos el teorema para $\mathbf{f}(x, y) = (7, y^2 - 1)$ en el semicírculo $r \leq 3, 0 \leq \theta \leq \pi$:

En cartesianas: $\iint_D 2y dx dy = \int_{-3}^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} 2y dy dx = 36$.

O cambiando el orden: $= \int_0^3 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} 2y dx dy = 36$.

En polares: $= \int_0^\pi \int_0^3 2r^2 \sin \theta dr d\theta = 36$.



$\oint_{\partial D} = \int_{C_1} + \int_{C_2}$. Para C_1 , si $\mathbf{c}(x) = (x, 0), x \in [-3, 3] \rightarrow \int_{C_1} (1 - y^2) ds = \int_{-3}^3 dx = 6$.

Para C_2 , si $\mathbf{c}(t) = (3 \cos t, 3 \sin t), t \in [0, \pi] \rightarrow \|\mathbf{c}'(t)\| = 3$. Como $\mathbf{n} = (\cos t, \sin t)$,

$\int_{C_2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} ds = 3 \int_0^\pi (7 \cos t + 9 \sin^3 t - \sin t) dt = 30$.

Repaso de convergencia uniforme

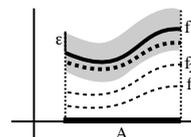
Sea la **sucesión de funciones** definidas en $A \subset \mathbf{R}$: $\{f_n(x)\} = f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$

$\{f_n\}$ **converge puntualmente** f en A si para cada $x \in A$ es $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$.

$\{f_n\}$ **converge uniformemente** hacia su límite puntal f en A si

$\forall \varepsilon > 0$ existe N tal que si $n \geq N$ entonces $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A$.

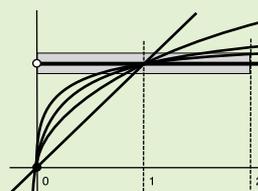
Gráficamente, si $\{f_n\} \rightarrow f$ uniformemente, a partir de un N todas las gráficas de las f_n quedan dentro de toda banda de altura 2ε alrededor de la de f . Si la convergencia es sólo puntual, para cada x el N es distinto y no se puede dar uno válido para todos los puntos de A .



Ej. $f_n(x) = x^{1/n} \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ 1 & \text{si } x \in (0, \infty) \end{cases}$ (puntualmente).

La convergencia es uniforme en $[1, 2]$, pero no en $[0, 1]$.

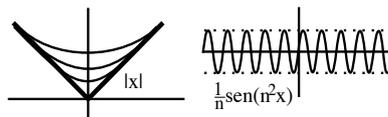
Para cada $x \in [0, 1]$ existe N tal que si $n \geq N$ el punto $(x, x^{1/n})$ está dentro de la banda, pero hace falta elegir N mayores según nos acercamos a 0. En $[1, 2]$ la convergencia es uniforme, pues el N que vale para $x=2$ claramente vale también para el resto de los x del intervalo.



f_n continuas en un intervalo I y $\{f_n\} \rightarrow f$ uniformemente en $I \Rightarrow f$ continua en I .

f_n integrables en $[a, b]$ y $\{f_n\} \rightarrow f$ uniformemente en $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n$.

Si las f_n son derivables, que $f_n \rightarrow f$ uniformemente no basta para que f sea derivable, o puede existir f' y no ser el límite de las f'_n (como en los ejemplos de la derecha); para que pasen ambas cosas, deben también converger las f'_n uniformemente.



Las **series de funciones** son un caso particular

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ **converge puntualmente o uniformemente** en A hacia f si lo hace la sucesión de sus **sumas parciales** $S_n = f_1 + \dots + f_n$.

Criterio de Weierstrass

Sean $\{f_n\}$ definidas en A y $\{M_n\}$ una sucesión de números tal que $|f_n(x)| \leq M_n \quad \forall x \in A$ y tal que $\sum M_n$ converge. Entonces $\sum f_n$ converge uniformemente en A .

Ej. $\sum \frac{\text{sen } nx}{n^2}$ converge uniformemente en todo \mathbf{R} pues $|\frac{\text{sen } nx}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2}$ y $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

[Se tiene entonces, por ejemplo, que la suma $f(x)$ de esta serie es continua en todo \mathbf{R}].

La serie obtenida derivando término a término: $\sum \frac{\text{cos } nx}{n}$ diverge, por ejemplo, si $x=0$.

[Para otros x , como $x=\pi$, converge por Leibniz, y para casi todos es difícil decirlo].

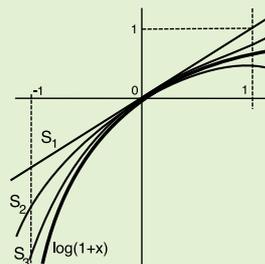
En general, no se pueden derivar (ni integrar) término a término las sumas infinitas como las finitas. Aunque esto sí se puede hacer siempre con las **series de potencias** en cualquier intervalo cerrado contenido en el intervalo de convergencia $|x| < R$, pues en ellos convergen uniformemente la serie y sus derivadas.

Ej. $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$ con $R=1$, converge puntualmente si $|x| < 1$

[hacia $\log(1+x)$, y lo sigue haciendo cuando $x=1$] y converge uniformemente en cualquier intervalo $[a, 1]$, $a > -1$, aunque no lo hace en todo $(-1, 1)$, pues las sumas parciales están acotadas en ese intervalo y el $\log(1+x)$ no.

La serie obtenida derivándola término a término $1 - x + x^2 + \dots$ converge en $(-1, 1)$ [hacia $\frac{1}{1+x}$, esta no converge en $|x| < 1$].

En cualquier $[a, b] \subset (-1, 1)$ la convergencia es uniforme.



problemas 1

- Resolver los siguientes problemas de Cauchy:
 - $(2y-x)u_y + xu_x = 2y$
 $u(1, y) = 0$
 - $u_y + 3y^2 u_x = \frac{2u}{y} + 6y^4 x$
 $u(x, 1) = x^2$
 - $yu_y + (2y-x)u_x = x$
 $u(x, 1) = 0$
 - $3x^2 u_y - u_x = 4yu$
 $u(1, y) = 1$
- Resolver los siguientes problemas de Cauchy y precisar si la solución es única:
 - $u_y + u_x = u - x - y$
 $u(x, -2) = x$
 - $u_y - 2yu_x = 4xy$
 $u(x, -1) = 2x + 1$
 - $2yu_y - xu_x = u - x^2 y$
 $u(2, y) = 0$
 - $(2x-y)u_y + xu_x = yu$
 $u(-1, y) = 1$
- Resolver $(3y+3)u_y - xu_x = 2xy$ con el dato $u(x, 0) = 0$. ¿Con $u(0, y) = 0$ habría solución única?
- Sea $yu_y - xu_x = u + 2x$ y los datos iniciales: i) $u(x, 0) = -x$, ii) $u(x, 2) = 7x$. Hallar la única solución que satisfice uno de ellos y dos soluciones distintas que cumplan el otro.
- Resolver $u_y + 2yu_x = 3xu$ con $\begin{matrix} \text{i) } u(x, 1) = 1 \\ \text{ii) } u(0, y) = 0 \end{matrix}$, estudiando la unicidad de la solución.
- Reducir a forma canónica, si es necesario, y, si es posible, encontrar la solución general:
 - $u_{yy} + 4u_{xy} + 5u_{xx} + u_y + 2u_x = x$
 - $u_{yy} + 6u_{xy} + 9u_{xx} + 9u = 9$
 - $u_{xx} + 4u_{xy} - 5u_{yy} + 6u_x + 3u_y = 9u$
 - $u_{xx} - 3yu_x + 2y^2 u = y$
- Escribir (E) $u_{tt} + 2u_{xt} = 2$ en forma canónica y hallar su solución general. De los datos de Cauchy: i) $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$, ii) $u(0, t) = 0$, $u_x(0, t) = t$, hay unos que determinan una única solución de (E). Hallarla en ese caso.
- Sea $u_{tt} + 4u_{tx} + 4u_{xx} + u_t + 2u_x = 0$. Escribirla en forma canónica y hallar su solución general. Hallar la solución que cumple los datos $u(x, 0) = 1 - x$, $u_t(x, 0) = 1$ y comprobar esta solución.
- Sea (E) $Au_{yy} + Bu_{xy} + Cu_{xx} + Du_y + Eu_x + Hu = F(x, y)$. Probar que un cambio de la forma $u = e^{py} e^{qx} w$, con p y q adecuadas, lleva (E), si no es parabólica, a una (E*) sin derivadas de primer orden. ¿Para qué relación entre las constantes A, \dots, H no tiene (E*) término en w ? Aplicar lo anterior para resolver $u_{xy} + 2u_y + 3u_x + 6u = 1$. Probar que toda ecuación parabólica o es resoluble o se puede poner con cambios de variable en la forma $w_\xi + Kw_{\eta\eta} = G(\xi, \eta)$.
- Resolver utilizando diferentes caminos (intentando encontrar atajos):
 - $\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = e^{-t}, x, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = x^2, u_t(x, 0) = -1 \end{cases}$
 - $\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 16, x, t \in \mathbf{R} \\ u(0, t) = t, u_x(0, t) = 0 \end{cases}$
 - $\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 2 \\ u(x, x) = x^2, u_t(x, x) = x \end{cases}$
- Sea $\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = \begin{cases} \cos x - 1, x \in [2\pi, 4\pi] \\ 0, x \in [0, 2\pi] \cup [4\pi, \infty) \end{cases} \\ u_t(x, 0) = u(0, t) = 0 \end{cases}$. Dibujar la extensión f^* . Hallar $u(3\pi, 3\pi)$. Dibujar $u(x, 3\pi)$. Hallar $u(2\pi, t)$ para $t \geq 3\pi$.
- Sea $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = u(0, t) = 0, u_t(x, 0) = \begin{cases} 2x - x^2, x \in [0, 2] \\ 0, x \in [2, \infty) \end{cases} \end{cases}$. a) Dibujar g^* y dar su expresión. b) Hallar: i) $u(3, 2)$, ii) $u(1, 2)$.
- Sea $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = \begin{cases} (x-1)(x-4), x \in [1, 4] \\ 0, x \in [0, 1] \cup [4, \infty) \end{cases} \\ u_t(x, 0) = u(0, t) = 0 \end{cases}$. a) Hallar $u(1, 3)$. b) Dibujar $u(x, 3)$. c) Hallar $u(x, 3)$ para $x \in [0, 1]$.
- Sea $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = 1, u_t(x, 0) = 0, u(0, t) = \cos t \end{cases}$ [$v = \cos t \cos x$ cumple dato de contorno y ecuación]. a) Hallar $u(\frac{\pi}{3}, 2\pi)$. b) Hallar $u(x, \pi)$ para $x \geq \pi$.
- Sea $\begin{cases} u_{tt} - 9u_{xx} = 0, x \in [0, 4], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = \begin{cases} (x-1)(x-2), x \in [1, 2] \\ 0, x \in [0, 1] \cup [2, 4] \end{cases}, u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = u(4, t) = 0 \end{cases}$. a) Hallar $u(\frac{5}{2}, \frac{4}{3})$. b) Dibujar $u(x, 1)$.

16. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, x \in [0,2], t \in \mathbf{R} \\ u(x,0)=0, u_t(x,0)=(x-1)^2, u(0,t)=u(2,t)=t \end{cases}$. Hallar $u(\frac{3}{2}, 1)$.
17. Sea $\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}=0, x \in [0,2], t \in \mathbf{R} \\ u(x,0)=4x-x^3, u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=u(2,t)=0 \end{cases}$. Hallar $u(\frac{3}{2}, \frac{3}{4})$. Dibujar $u(x,2)$. Hallar $u(x,1)$.
18. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=6x, x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x,0)=u_t(x,0)=u_x(0,t)=0 \end{cases}$. Calcular $u(0,t)$ para todo t .
19. Sea $\begin{cases} u_{tt}-(u_{rr}+\frac{2}{r}u_r)=0, r \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(r,0)=r, u_t(r,0)=-2 \end{cases}$ a) Hallar $u(1,2)$.
b) Hallar $u(1,t)$ para todo $t \geq 0$.
20. Resolver, a partir de las características y utilizando transformadas de Fourier, los problemas:
- a) $\begin{cases} 2u_t+u_x=tu \\ u(x,0)=e^{-x^2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} tu_t-u_x=u \\ u(x,1)=f(x) \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_t+e^t u_x+2tu=0 \\ u(x,0)=f(x) \end{cases}$
21. Sea $t^2 u_t - u_x = tu$. a) Hallar la solución con $u(x,1)=x$ a partir de las características.
b) Resolver con $u(x,1)=f(x)$ utilizando la transformada de Fourier.
22. a) Hallar la solución de $3u_t - u_x = 2$, que cumple el dato inicial $u(x,0)=x$.
b) Resolver $\begin{cases} 3u_t - u_x = g(x) \\ u(x,0)=f(x) \end{cases}$ i) utilizando las características, y comprobar a).
ii) con transformadas de Fourier.
23. a) Resolver por Fourier y por las características: $\begin{cases} u_t + (\cos t)u_x = u, x \in \mathbf{R}, t \geq 0 \\ u(x,0)=f(x) \end{cases}$.
b) Si $f(x) = \begin{cases} \cos^2 x, x \in [-\pi/2, \pi/2] \\ 0 \text{ en el resto} \end{cases}$ describir $u(x,t)$ para $t \geq 0$.
24. Resolver $\begin{cases} u_t - u_x = 2xe^{-x^2} \\ u(x,2)=0 \end{cases}$ i) con las características, [El término no homogéneo es derivada de función de transformada conocida].
ii) utilizando la \mathcal{F} .
25. Resolver $\begin{cases} u_{tt} - 6u_{tx} + 9u_{xx} = 0 \\ u(x,0)=f(x), u_t(x,0)=0 \end{cases}$ a) A partir de las características.
b) Utilizando la transformada de Fourier.
26. a) Utilizando la \mathcal{F} resolver $\begin{cases} 2u_{tt} + 5u_{tx} + 2u_{xx} = 0 \\ u(x,0)=f(x), u_t(x,0)=0 \end{cases}$. b) Escribir la solución para $f(x)=x^2$.
27. Obtener la fórmula de D'Alembert utilizando transformadas de Fourier.
28. Hallar la solución de $\begin{cases} u_t - u_{xx} = (x^2 - 1)e^{-x^2/2}, x \in \mathbf{R}, t > 0 \\ u(x,0)=0, u \text{ acotada} \end{cases}$ [el término no homogéneo es la derivada segunda de $e^{-x^2/2}$]:
a) Aplicando \mathcal{F} directamente. b) Con un cambio que haga la ecuación homogénea y evaluando la integral de los apuntes mediante un cambio de variable. Hallar el $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x,t)$.
29. Comprobar, paso a paso y utilizando la \mathcal{F} , que la solución de:
 $\begin{cases} u_t - u_{xx} = e^{-x^2/4}, x \in \mathbf{R}, t > 0 \\ u(x,0)=0, u \text{ acotada} \end{cases}$ viene dada por: $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-k^2} - e^{-k^2(t+1)}}{k^2} e^{-ikx} dk$.
Deducir el valor de $u(0,t)$ integrando por partes y utilizando que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-as^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}$.
30. Hallar, utilizando la \mathcal{F} , su solución sin que aparezcan integrales:
- a) $\begin{cases} u_t - \frac{1}{4}u_{xx} + u_x = 0, x \in \mathbf{R}, t > 0 \\ u(x,0) = e^{-x^2}, u \text{ acotada} \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_t - t^{-2}u_{xx} = 0, x \in \mathbf{R}, t > 1 \\ u(x,1) = e^{-x^2}, u \text{ acotada} \end{cases}$
- c) $\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, x \in \mathbf{R}, t \in \mathbf{R} \\ u(x,0) = 2e^{-x^2/2}, u_t(x,0) = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} u_t - 2tu_{xx} = 0, x \in \mathbf{R}, t > 0 \\ u(x,0) = \delta(x), u \text{ acotada} \end{cases}$

problemas 2

- Resolver por series en torno a $x=0$:
 a) $y'' + xy = 0$ b) $(1+x^2)y'' - 2y = 0$ c) $\cos x y'' + (2 - \sin x)y' = 0$
- Sea $y'' + 2xy' + 2y = 0$. Calcular 3 términos no nulos del desarrollo en serie de la solución con $y(0)=1, y'(0)=0$. Hallar su término general e identificarla con una función elemental.
- Sea $y'' + (2-2x)y' + (1-2x)y = 0$. Hallar el desarrollo hasta x^4 de la solución que cumple $y(0)=0, y'(0)=1$. Comprobarlo sabiendo que $y=e^{-x}$ es otra solución.
- Sea $2\sqrt{x}y'' - y' = 0$. Precisar si $x=0$ es punto singular regular. Calcular, hasta tercer orden, el desarrollo en serie en torno a $x=1$ de la solución que cumple $y(1)=y'(1)=1$.
- Hallar el desarrollo de la solución de $(1-x)(1-2x)y'' + 2xy' - 2y = 0$ con $y(0)=y'(0)=1$. ¿Dónde converge la serie? Hallar las raíces del polinomio indicial en cada punto singular regular.
- Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones de Euler:
 a) $xy'' + 2y' = x$ b) $x^2y'' - 3xy' + 3y = 9 \ln x$ c) $x^2y'' + 4xy' + 2y = e^x$
- Sean a) $y'' + xy' + y = 0$, b) $3xy'' + y' + xy = 0$, c) $xy'' - 2y' + 4e^xy = 0$. Hallar los 3 primeros términos no nulos del desarrollo en serie de una solución que se anule en $x=0$, encontrando la regla de recurrencia cuando se pueda. ¿Están acotadas en $x=0$ todas las soluciones?
- Sea $3xy'' + (2-6x)y' + 2y = 0$. Hallar una solución que no sea analítica en $x=0$. Hallar 4 términos del desarrollo de una solución no trivial que sea analítica en $x=0$.
- Dar 2 términos no nulos del desarrollo de una solución de $3xy'' - y' - 3x^2y = 0$ que se anule en $x=0$ y la regla de recurrencia. ¿En $x=0$ son todas las soluciones analíticas? ¿Son derivables?
- Hallar el desarrollo de una solución no trivial analítica en $x=0$ de $4xy'' + 2y' + y = 0, x > 0$, y la solución general en términos de funciones elementales. Comprobar haciendo $s=x^{1/2}$.
- Sea $3xy'' + 2y' + 4y = 0$. Hallar los 4 primeros términos no nulos del desarrollo de una solución que se anule en $x=0$ dando la regla de recurrencia. ¿Para qué x converge la serie?
- Sea $x^2y'' - x(x+5)y' + 9y = 0$. Dar 3 términos no nulos del desarrollo de una solución analítica en $x=0$. Hallar la regla de recurrencia. ¿Tienden a 0 todas las soluciones cuando $x \rightarrow 0$?
- Sea $x^2(1+x^2)y'' - 6y = 0$. Hallar 3 términos no nulos del desarrollo de una solución acotada en $x=0$, dando la regla de recurrencia. ¿Cuál es el coeficiente de x^{2012} en ese desarrollo?
- Hallar una solución analítica no trivial de $x^2y'' + x^3y' - 2(1+x^2)y = 0$, escribiendo la regla de recurrencia. ¿Son todas las soluciones analíticas en $x=0$?
- Hallar el desarrollo de una solución acotada en $x=0$ de $x(1+x)y'' + (2+3x)y' + y = 0$ y probar que hay soluciones no analíticas en $x=-1$. Comprobarlo utilizando que $y=\frac{1}{x}$ es solución.
- Sea $xy'' + (1-x^2)y' + pxy = 0$. Precisar, resolviendo por series en torno a $x=0$, los valores de p para los que hay soluciones polinómicas y escribir uno de estos polinomios para $p=4$.
- Sea $(1-x^2)y'' - 2xy' + y = 0$ (Legendre con $p=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$). Hallar 3 términos no nulos del desarrollo de la solución con $y(0)=0, y'(0)=1$. Estudiar si hay soluciones acotadas en $x=-1$.
- Resolver $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$, i) mediante un cambio de la forma $y=x^r u$, ii) por series.
- Sea $(x^2-1)y'' - 4xy' + 6y = 0$. Hallar la solución con $y(0)=-1, y'(0)=3$. Utilizando Frobenius, hallar una solución que se anule en $x=1$. ¿Hay soluciones no triviales acotadas para $x \rightarrow \infty$?
- Sea $x(x-1)y'' + y' - py = 0$. Determinar para qué valores de p posee solución polinómica. Probar que si $p=2$ existen soluciones que tienden a 0 cuando $x \rightarrow \infty$.

problemas 3

1. Determinar sus autovalores y autofunciones, y desarrollar $f(x) = x$ en las autofunciones de cada uno de los problemas:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } y'' + \lambda y = 0 & \text{b) } y'' + \lambda y = 0 & \text{c) } x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y'(1) = 0 & y(-1) = y(1) = 0 & y'(1) = y'(e) = 0 \\ \text{d) } x^2 y'' + xy' + [\lambda x^2 - \frac{1}{4}]y = 0 & \text{(hacer } s = \sqrt{\lambda}x \text{ o } u = \sqrt{x}y) & \\ y(1) = y(4) = 0 & & \end{array}$$

2. Sea $y'' + \lambda y = 0$ Probar que hay infinitos autovalores positivos $\forall \alpha$. Discutir si $y'(0) - \alpha y(0) = y(1) = 0$ los hay ≤ 0 . Estudiar cómo varía con α el menor autovalor.
3. Sea $y'' + \lambda y = 0$ Hallar sus λ_n y sus $\{y_n\}$, y calcular $\langle y_n, y_n \rangle \forall n$. $y(0) - 2y'(0) = y(1) - 2y'(1) = 0$ [Son calculables exactamente los λ_n , y hay uno negativo].
4. Desarrollar $f(x) = \cos^3 x$, $x \in [0, \pi]$, en serie de i) $\{\cos nx\}$, ii) $\{\sin nx\}$, dibujando las funciones hacia las que tienden las series y estudiando la convergencia uniforme.
5. Desarrollar a) $f(x) = 1$ y b) $f(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$, en serie de i) $\{\sin n\pi x\}$, ii) $\{\cos n\pi x\}$. Dibujar con algún programa de ordenador algunas sumas parciales de las series obtenidas.
6. Desarrollar en senos y cosenos en $[-\pi, \pi]$, estudiando la convergencia puntual y uniforme:
 a) $f(x) = \sin^2 x$, b) $f(x) = |\sin x|$, c) $f(x) = \sin \frac{x}{2}$, d) $f(x) = \begin{cases} -\pi, & \text{si } -\pi \leq x < 0 \\ \sin x, & \text{si } 0 \leq x < \pi \end{cases}$
7. Sea $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$. Hallar su desarrollo en serie de Fourier $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{2}$. ¿Cuánto debe sumar la serie para i) $x=1$, ii) $x=2$? Comprobarlo sustituyendo en la serie.
8. Sea (P) $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(1) - y'(1) = 0 \end{cases}$ a) Probar que $\lambda_0 = 0$ es autovalor y hallar la $\{y_0\}$. Probar gráficamente que hay infinitos $\lambda_n > 0$. [Dato: no hay $\lambda_n < 0$].
 b) Hallar el coeficiente de y_0 en el desarrollo de $f(x) = 1$ en serie de autofunciones de (P).
9. Desarrollar $f(x) = 1$ en serie de autofunciones del problema $\begin{cases} y'' + 2y' + \lambda y = 0 \\ y(0) + y'(0) = y(\frac{1}{2}) = 0 \end{cases}$.
10. Sea $\begin{cases} ([1-x^2]y')' + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0, y \text{ acotada en } 1 \end{cases}$ Hallar los 3 primeros términos del desarrollo de $f(x) = 1$ en serie de sus autofunciones [los P_{2n-1} de Legendre].
11. Sea $\begin{cases} xy'' - 2y' = 2 \\ y(1) + y'(1) = y(2) = 0 \end{cases}$ Escribir la ecuación en forma autoadjunta. Precisar cuántas soluciones tiene el problema.
12. Sea (P) $\begin{cases} y'' - y' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$ a) Escribir la ecuación en forma autoadjunta y hallar el peso.
 b) Determinar si $\lambda = -2$ y $\lambda = \frac{5}{4}$, son o no autovalores de (P).
 c) Precisar cuántas soluciones tiene $y'' - y' + \lambda y = e^{x/2}$, $y(0) = y(\pi) = 0$ para $\lambda = -2$ y $\lambda = \frac{5}{4}$.
13. Sea $\begin{cases} x^2 y'' + 3xy' + y + \lambda y = 0 \\ y(1) = y(e) = 0 \end{cases}$ a) Escribir la ecuación en forma autoadjunta y hallar el peso.
 b) Para $\lambda = \pi^2$, hallar la autofunción $\{y_1\}$ y calcular $\langle y_1, y_1 \rangle$.
 c) Precisar cuántas soluciones tiene $x^2 y'' + 3xy' + y = 1$ con esos mismos datos de contorno.
14. Sea $\begin{cases} y'' + \lambda y = \sin x \\ y(0) = y'(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$ Precisar, si lo hay, un λ para el que: i) tenga solución única, ii) tenga infinitas soluciones, iii) no tenga solución.
15. Sea $\begin{cases} y'' + \lambda y = \cos 3x \\ y'(0) = y'(\frac{\pi}{4}) + y(\frac{\pi}{4}) = 0 \end{cases}$ Hallar el primer término del desarrollo de $f(x) = \cos 3x$ en serie de autofunciones del problema homogéneo.
 Precisar para i) $\lambda = 0$, ii) $\lambda = 1$ cuántas soluciones tiene el problema no homogéneo.

problemas 4

1. Resolver por separación de variables:

a)
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = e^{-2t}, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = \text{sen } t, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = \text{sen}^2 x, u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = e^{-2t} \cos x, & x \in (0, \frac{\pi}{2}), t > 0 \\ u(x, 0) = 1, u_x(0, t) = 0, u(\frac{\pi}{2}, t) = 1 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 6 \text{sen } 6x \cos 3x, & x \in (0, \frac{\pi}{2}), t > 0 \\ u(x, 0) = u(0, t) = u_x(\frac{\pi}{2}, t) = 0 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} u_t - \frac{1}{t} u_{xx} = 2 \cos x, & x \in (0, \frac{\pi}{2}), t > 1 \\ u(x, 1) = \cos 3x, u_x(0, t) = u(\frac{\pi}{2}, t) = 0 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + 2u = 0, & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = x, u(0, t) = u(1, t) - u_x(1, t) = 0 \end{cases}$$

2. Sea
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = 0, u_x(0, t) = 0, u(1, t) = 1 \end{cases}$$
 Resolverla y hallar la distribución estacionaria hacia la que tiende la solución cuando $t \rightarrow \infty$.

3. Sea
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = 0, u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = t \end{cases}$$
 Resolverlo y hallar para cada $x \in (0, \pi)$ el límite de la solución $u(x, t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

4. Resolver
$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = 0, u(0, t) = t, u_x(\pi, t) = 0 \end{cases}$$
 [Hay una v muy sencilla, pero se puede hallar otra que no estropea la ecuación].

5. Sea
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - au = 0, & x \in (0, 3\pi), t > 0 \\ u(x, 0) = 1, u(0, t) - 4u_x(0, t) = u(3\pi, t) = 0 \end{cases}$$
 Determinar, según la constante a , el límite de la solución cuando $t \rightarrow \infty$.

6. a) Hallar los autovalores y autofunciones del problema
$$\begin{cases} X'' + 2X' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(1) + X'(1) = 0 \end{cases}$$

b) Resolver
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - 2u_x = 0, & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = e^{-x}, u(0, t) = u(1, t) + u_x(1, t) = 0 \end{cases}$$
 [directamente o tras un cambio $u = e^{\rho t + q x} w$].

7. Sea
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in [0, 2\pi], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = \begin{cases} 2 \text{sen } x, & x \in [0, \pi] \\ 0, & x \in [\pi, 2\pi] \end{cases}, u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = u(2\pi, t) = 0 \end{cases}$$
 Dibujar $u(x, \pi)$ y hallar su expresión con D'Alembert. Resolver por separación de variables y comprobar.

8. Resolver
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = t \text{sen } x, & x \in [0, \pi], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$
 a) Por separación de variables.
b) Mediante extensiones y D'Alembert:
i) directamente, ii) haciendo $w = u - t \text{sen } x$.

9. Hallar valores de w para los que la solución de
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in [0, \pi], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = \text{sen } wt, u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$
 no esté acotada.

10. Resolver por separación de variables
$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, & x \in [0, \frac{1}{2}], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, u(0, t) = t, u_x(\frac{1}{2}, t) = 0 \end{cases}$$

11. Resolver
$$\begin{cases} u_{tt} + 2u_t - 5u_{xx} = 0, & x \in [0, \pi], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = g(x), u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$
 i) para cualquier $g(x)$
ii) para $g(x) = 2 \text{sen } x$

12. Resolver
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{rr} - \frac{2}{r} u_r = 0, & r \leq 1, t \geq 0 \\ u(r, 0) = 0, u_t(r, 0) = \frac{1}{r} \text{sen } \pi r, u(1, t) = 0 \end{cases}$$
 i) por separación de variables,
ii) con las técnicas del capítulo 1.

13. Resolver por separación de variables estos problemas planos en cartesianas:

a)
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (0, \pi) \times (0, \pi) \\ u(0, y) = 0, u(\pi, y) = 5 + \cos y \\ u_y(x, 0) = u_y(x, \pi) = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \Delta u = y \cos x, & (0, \pi) \times (0, 1) \\ u_x(0, y) = u_x(\pi, y) = 0 \\ u_y(x, 0) = u_y(x, 1) = 0 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} \Delta u + 6u_x = 0, & (0, \pi) \times (0, \pi) \\ u_x(0, y) = 0, u(\pi, y) = \cos 4y \\ u_y(x, 0) = u_y(x, \pi) = 0 \end{cases}$$

14. Resolver por separación de variables estos problemas planos:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} \Delta u = 0, r < 4, 0 < \theta < \pi \\ u(4, \theta) = \cos \frac{5\theta}{2}, u_\theta(r, 0) = u(r, \pi) = 0 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} \Delta u = r^4 \cos 2\theta, r < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ u(1, \theta) = 3, u_\theta(r, 0) = u_\theta(r, \frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} \\ \text{c) } \begin{cases} \Delta u = \cos \theta, r < 2 \\ u(2, \theta) = \sin 2\theta \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} \Delta u = 0, r < 1, 0 < \theta < \pi \\ u_r(1, \theta) = \cos \theta, u(r, 0) = u(r, \pi) = 0 \end{cases} \\ \text{e) } \begin{cases} \Delta u = 0, 1 < r < 2 \\ u(1, \theta) = 1 + \sin 2\theta, u_r(2, \theta) = 0 \end{cases} & \text{f) } \begin{cases} \Delta u = 4 \sin 2\theta, \theta \in (0, \frac{\pi}{2}), r < 1 \\ u(1, \theta) = \sin 4\theta, u(r, 0) = u(r, \frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} \end{array}$$

15. a) Sea $\begin{cases} \Theta'' + \lambda\Theta = 0 \\ \Theta(-\frac{\pi}{4}) = \Theta(\frac{\pi}{4}) = 0 \end{cases}$ i) Probar directamente que $\lambda = 4$ es autovalor y escribir su autofunción. ii) Haciendo $s = \theta + \frac{\pi}{4}$, hallar todos los λ_n y $\{\Theta_n\}$.
 b) Sea $\begin{cases} \Delta u = 0, r < 1, -\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4} \\ u_r(1, \theta) = f(\theta), u(r, -\frac{\pi}{4}) = u(r, \frac{\pi}{4}) = 0 \end{cases}$ Hallar, separando variables, la solución con: i) $f(\theta) = 2 \cos 2\theta$, ii) $f(\theta) = 1$.

16. Probar que $\frac{2}{3} \leq u(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}) \leq 1$, si $u(r, \theta)$ es la solución del problema plano $\begin{cases} \Delta u = 0, r < 1 \\ u(1, \theta) = \begin{cases} 1, 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0, \pi < \theta < 2\pi \end{cases} \end{cases}$.

17. a) Discutir cuántas soluciones $y(r)$ tiene $\begin{cases} r^2 y'' + ry' - y = r^2 \\ y'(1) + ay(1) = y(2) = 0 \end{cases}$.
 b) Resolver el problema plano: $\begin{cases} \Delta u = \sin \theta, 1 < r < 2 \\ u_r(1, \theta) = u(2, \theta) = 0 \end{cases}$.

18. Resolver el problema plano $\begin{cases} \Delta u = 0, r < 2, \theta \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ u_r(2, \theta) + ku(2, \theta) = 8 \cos 2\theta, \text{ para: i) } k=1, \text{ ii) } k=0. \\ u_\theta(r, 0) = u_\theta(r, \frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$

19. Hallar la única solución del problema $\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, r < 1, \theta \in (0, \pi) \\ u(1, \theta) + 2u_r(1, \theta) = 4 \sin \frac{3\theta}{2}, u(r, 0) = u_\theta(r, \pi) = 0 \end{cases}$.
 Comprobar que cambiando $+2u_r(1, \theta)$ por $-2u_r(1, \theta)$ el problema físicamente imposible que resulta pasa a tener infinitas soluciones.

20. Hallar (en términos de funciones elementales) una solución acotada de:
 $\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + 4u = 0, r < 1, 0 < \theta < \pi \\ u(1, \theta) = \sin \frac{\theta}{2}, u(r, 0) = u_\theta(r, \pi) = 0 \end{cases}$ [Separando variables y haciendo $s = 2r$ aparece una ecuación conocida].

21. Hallar la única solución de los problemas en el plano $\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = \frac{2 \sin \theta}{1+r^2} \\ u(1, \theta) = 1, u \text{ acotada} \end{cases}$:
 i) en el círculo $r < 1$, ii) en la región infinita $r > 1$ [¡ojo!, $r \arctan r \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \infty$].

22. Hallar la solución de: $\begin{cases} \Delta u = 0, \text{ si } r > R \\ u(R, \theta) = \cos^3 \theta, 0 \leq \theta < 2\pi \\ u \text{ acotada cuando } r \rightarrow \infty \end{cases}$ y $\begin{cases} \Delta u = 0, \text{ si } r > R \\ u(R, \theta) = \cos^3 \theta, 0 < \theta < \pi \\ u \rightarrow 0 \text{ cuando } r \rightarrow \infty \end{cases}$
 (en el plano) (en el espacio)

23. Resolver los problemas en 3 variables:
 a) $\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, (x, y) \in (0, \pi) \times (0, \pi), t > 0 \\ u(x, y, 0) = 1 + \cos x \cos 2y \\ u_x(0, y, t) = u_x(\pi, y, t) = 0 \\ u_y(x, 0, t) = u_y(x, \pi, t) = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, (x, y) \in (0, \pi) \times (0, \pi), t \in \mathbf{R} \\ u(x, y, 0) = 0, u_t(x, y, 0) = \sin 3x \sin^2 2y \\ u(0, y, t) = u(\pi, y, t) = 0 \\ u_y(x, 0, t) = u_y(x, \pi, t) = 0 \end{cases}$

24. Resolver los problema para la ecuación de Laplace en el espacio:
 a) $\begin{cases} \Delta u = 0, 1 < r < 2 \\ u(1, \theta) = \cos \theta, u(2, \theta) = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \Delta u = 0, r < 1 \\ u_r(1, \theta) = \cos^3 \theta \end{cases}$ c) $\begin{cases} \Delta u = 0, x^2 + y^2 + z^2 < 1 \\ u = x^3 \text{ si } x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$

25. Sea una placa circular homogénea de 1 cm de de radio, inicialmente a 0° . Supongamos que en $t = 0$ todo su borde se calienta hasta 1° y luego se mantiene a esa temperatura. Hallar las temperaturas en la placa para $t > 0$ y la distribución estacionaria hacia la que tienden.

problemas adicionales 1

1. Resolver (si es posible) los siguientes problemas de Cauchy:

a) $y u_y - (x+1) u_x = u + 2x$
 $u(1, y) = y$

b) $(y+2x) u_y - x u_x = y$
 $u(1, y) = 1$

c) $u_y + x u_x = -x^2 e^{-y}$
 $u(-1, y) = 0$

d) $x u_y - y u_x = 2xyu$
 $u(x, 0) = x$

e) $u_x - u_y = \frac{x-y}{xy} u$
 $u(x, 1) = x$

f) $y u_y + e^{x^2} u_x = 2x$
 $u(x, 0) = 0$

2. Sean $2y u_y + x u_x = 4yx^2 u$ y los datos de Cauchy: i) $u(-2, y) = 1$, ii) $u(x, x^2) = 0$. Hallar la solución para el dato que proporciona solución única. ¿Por qué es única?
3. Sea $u_y - 2y u_x = 2yu$ y los datos iniciales: i) $u(x, 1) = e^{-x}$, ii) $u(-y^2, y) = 0$. Hallar la única solución que satisface uno de ellos y dos soluciones distintas que cumplan el otro.
4. Sea (E) $y^2 u_y + x^2 u_x = x^2 + y^2$. Resolver (E) con el dato $u(x, 1) = x + 1$. ¿Es única la solución? Imponer unos datos de Cauchy para los que (E) tenga infinitas soluciones y dar dos de ellas.
5. Sea [E] $(y+1) u_y + x u_x = 2xyu$. Resolver [E] con el dato $u(1, y) = 1$. ¿Es única la solución? Imponer un dato de Cauchy para el que [E] tenga infinitas soluciones y escribir 2 de ellas. ¿En qué puntos es tangente la curva $y = x^2$ a las características de [E]?
6. Sea [E] $y^3 u_y - u_x = 2y^2 u - 2xy^2$. a) Hallar su solución general tomando i) $\eta = y$, ii) $\eta = x$. b) Resolver [E] con el dato inicial $u(x, 1) = 2x$, estudiando la unicidad de la solución. c) Imponer un dato de Cauchy para el que (E) tenga infinitas soluciones y dar dos de ellas. d) ¿En qué puntos del plano es tangente la curva $2x = -y^2$ a alguna característica de [E]?
7. Resolver $3x^2 u_y + u_x = x^5$, $u(x, 0) = x^3$, estudiando la unicidad.
8. Hallar la solución de (E) $u_t - 2t u_x = 2t(x - t^2)u$ con $u(x, 1) = 1$, tomando i) $\eta = t$, ii) $\eta = x$. Escribir 2 soluciones distintas de (E) válidas en un entorno de origen que cumplan $u(0, t) = 0$.
9. Precisar para qué valores de n entero positivo el dato de Cauchy $u(x, x^n) = x^n$ determina una única solución de la ecuación $u_x + y u = y^2$ cerca de $(0, 0)$.
10. Sea (E) $A(x, y, u) u_y + B(x, y, u) u_x = C(x, y, u)$ 'ecuación cuasilineal'. Probar que si las soluciones del sistema de ecuaciones: $\frac{du}{dx} = \frac{C}{B}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{A}{B}$ son $\eta(x, y, u) = c_1$ [curvas características de (E)], $\xi(x, y, u) = c_2$ entonces $\eta(x, y, u) = p[\xi(x, y, u)]$ (o bien, $\xi(x, y, u) = q[\eta(x, y, u)]$) con p, q arbitrarias es la solución general de (E). Resolver la cuasilineal: $u_y + u u_x = 0$ con: i) $u(x, 0) = x$, ii) $u(0, y) = 0$.
11. i] Resolver $v_y + e^{x+y} v_x - v = 0$ con el dato inicial $v(x, 0) = e^{-x}$.
 ii] Hallar la solución general de $u_{yy} + e^{x+y} u_{xy} - u_y = 0$.
12. Reducir a forma canónica y, si es posible, encontrar la solución general:
 a) $u_{yy} + 2u_{xy} + 2u_{xx} = 0$ b) $u_{yy} - 4u_{xy} + 4u_{xx} - 4u = 8$
13. Sea [E] $u_{tt} + 2u_{xt} + u_{xx} + u = 0$. Hallar su solución general y la que satisface $u(x, -x) = 0$, $u_t(x, -x) = 1$. Escribir una solución, distinta de la $u \equiv 0$, que cumpla $u(x, x) = u_t(x, x) = 0$.
14. Sea (e) $u_{tt} - u_{xx} + D u_t + E u_x = 4$, con D y E constantes. a) Escribir (e) en forma canónica. ¿Para qué relaciones entre D y E es esta forma resoluble? b) Para $D = -2$, $E = 2$, hallar la o las soluciones de (e) con los datos: $u(0, t) = e^{2t}$, $u_x(0, t) = 2$.
15. El potencial v y la intensidad i en una línea telegráfica satisfacen: $v_x + L i_t + R i = 0$
 $i_x + C v_t + G v = 0$,
 donde L, R, C y G son constantes características de la línea. a) Hallar la EDP de segundo orden (E) que verifica v . b) Si $GL = RC$, comprobar que un cambio adecuado reduce (E) a la ecuación de ondas y hallar $v(x, t)$ si inicialmente $v(x, 0) = V(x)$ e $i(x, 0) = I(x)$.

16. Estudiar la unicidad de los problemas (D dominio acotado en \mathbf{R}^2):

$$\begin{cases} \Delta u - k^2 u = F \text{ en } D \\ u = f \text{ en } \partial D \end{cases} \quad \begin{cases} u_t - k \Delta u = F(x, y, t) \text{ en } D \\ u(x, y, 0) = f(x, y) \text{ en } D, \quad u(x, y, t) = 0 \text{ en } \partial D \end{cases}$$

17. Si la distribución inicial de temperaturas en una varilla es $f(x) = 2x^2 - 3x$, $x \in [0, 2]$, y la temperatura para $t > 0$ en los extremos es $h_0(t) = -t/(1+t^2)$, $h_2(t) = 2 \operatorname{sen} t/t$, y suponemos que no existen fuentes de calor en el interior de la varilla, determinar la máxima y mínima temperaturas alcanzadas en la varilla para $t \geq 0$.

18. Sea $\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = \begin{cases} 2x - x^2, x \in [0, 2] \\ 0, x \in [2, \infty) \end{cases}, u_t(x, 0) = u(0, t) = 0 \end{cases}$. i) Hallar $u(1, 1)$. ii) Dibujar $u(x, 1)$.

19. Sea $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1 - \cos x, x \in [0, 2\pi] \\ 0, x \in [2\pi, \infty) \end{cases} \\ u_t(x, 0) = 0, u(0, t) = 0 \end{cases}$. a) Dibujar la extensión f^* y dar su expresión. b) Hallar $u(2\pi, 3\pi)$. c) Dibujar $u(x, 3\pi)$.

20. Sea $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2}, x \in [1, 3] \\ 0, x \in [0, 1] \cup [3, \infty) \end{cases}, u_t(x, 0) = u(0, t) = 0 \end{cases}$. a) Hallar $u(1, 3)$. b) Dibujar $u(x, 2)$.

21. Sea $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = u(0, t) = 0, u_t(x, 0) = \begin{cases} \operatorname{sen} \pi x, 1 \leq x \leq 2 \\ 0 \text{ en } [0, 1] \cup [2, \infty) \end{cases} \end{cases}$. Dibujar $u(x, 1)$, $u(x, 2)$ y $u(x, 3)$.

22. Sea $\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, u(0, t) = t \end{cases}$. Hallar $u(2, 4)$.

23. Sea $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = \cos^2 x, u(0, t) = t \end{cases}$. a) Hallar $u(\pi, 2\pi)$. b) Hallar $u(x, 2\pi)$ para $x \geq 2\pi$.

24. Sea $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = \begin{cases} x^2 - 1, x \in [0, 1] \\ 0, x \in [1, \infty) \end{cases} \\ u(0, t) = -t \end{cases}$. a) Hallar $u(2, 1)$ y $u(\frac{3}{2}, 1)$. b) Hallar $u(x, 1)$ para todo $x \geq 0$.

25. Sea $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, u(0, t) = \operatorname{sen} t \end{cases}$. a) Hallar $u(\frac{\pi}{2}, \pi)$. b) Hallar $u(x, \pi)$ para $x \geq \pi$. [$v = \operatorname{sen} t \cos x$ cumple dato de contorno y ecuación].

26. Sea $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, x \in [0, \pi], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = \operatorname{sen}^2 x \\ u_t(x, 0) = u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$. Dibujar la extensión f^* , hallar el valor de $u(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$ y hallar $u(x, \frac{3\pi}{4})$ para $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$.

27. Sea $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, x \in [0, 4], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = \begin{cases} \operatorname{sen} \pi x, 2 \leq x \leq 3 \\ 0 \text{ resto de } [0, 4] \end{cases} \\ u_t(x, 0) = u(0, t) = u(4, t) = 0 \end{cases}$. i) Dibujar $u(x, 1)$, $u(x, 2)$ y $u(x, 3)$. ii) Dibujar $u(3, t)$, $t \geq 0$.

28. Sea $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, x \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = e^{-x}, u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = e^{-t} \end{cases}$. a) Hallar $u(2, 3)$. [Ayuda: una buena $v(x, t)$ sale de separar variables y tomar $\lambda = -1$]. b) Hallar $u(x, t)$, $x, t \geq 0$. c) Dibujar aproximadamente $u(x, 3)$.

29. Sea $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, x \in [0, 1], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = 0, u(1, t) = \operatorname{sen} t \end{cases}$. Hallar $u(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y $u(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

30. Sea $\begin{cases} u_{tt} - (u_{rr} + \frac{2}{r}u_r) = 0, r \geq 0 \\ u(r, 0) = 6, u_t(r, 0) = 5r^3 \end{cases}$. Hallar $u(2, 3)$.

31. Sea $\begin{cases} u_{tt} - (u_{rr} + \frac{2}{r}u_r) = 0, r \geq 0 \\ u(r, 0) = \frac{2}{4+r^2}, u_t(r, 0) = 0 \end{cases}$. a) Hallar $u(1, 5)$ y $u(7, 5)$. Hallar $u(0, t)$. b) Dibujar aproximadamente y simplificar $u(r, 5)$.

$$32. \text{ Sean } \begin{cases} v_{tt} - v_{rr} = 0, r \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ v(r, 0) = \begin{cases} 2r - r^2, r \in [0, 2] \\ 0 \text{ en el resto} \end{cases} \equiv F(r) \\ v_t(r, 0) = v(0, t) = 0 \end{cases} \text{ y } \begin{cases} u_{tt} - u_{rr} - \frac{2}{r}u_r = 0, r \geq 0, t \in \mathbf{R} \\ u(r, 0) = \begin{cases} 2 - r, r \in [0, 2] \\ 0 \text{ en el resto} \end{cases} \equiv f(r) \\ u_t(r, 0) = 0 \end{cases} .$$

- a) Hallar $v(6, 3)$, $v(2, 3)$ y $u(4, 3)$. b) Dibujar y hallar la expresión de $v(r, 3)$.
c) Hallar el valor máximo de $u(r, 3)$ [$\sqrt{15} \approx 3.873$].

$$33. \text{ Hallar } I(a, x) = \int_0^\infty e^{-ak^2} \cos kx \, dk \text{ probando que } \frac{dI}{dx} = -\frac{x}{2a}I \text{ e } I(a, 0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} .$$

Usar lo anterior para calcular $\mathcal{F}^{-1}(e^{-ak^2})$ y $\mathcal{F}(e^{-ax^2})$.

$$34. \text{ Resolver: a) } \begin{cases} u_t + 2tu_x = 4tu \\ u(x, 1) = f(x) \end{cases}, \text{ b) } \begin{cases} t^2u_t - u_x = g(x) \\ u(x, 1) = 0 \end{cases} \text{ por las características y mediante la } \mathcal{F} .$$

35. Sea $u_t + 2u_x = -\frac{1}{t}u$. a) Hallar su solución general y la que satisface $u(x, 1) = x$. b) Utilizando la \mathcal{F} , hallar la solución con $u(x, 1) = f(x)$ y además: i) Comprobar que si $f(x) = x$ se obtiene el resultado de a). ii) Si $f(x) = \begin{cases} \sin^2 \pi x, x \in [0, 1] \\ 0, \text{ resto de } \mathbf{R} \end{cases}$, dibujar y dar la expresión de $u(x, 2)$.

$$36. \text{ Hallar la solución de a) } \begin{cases} u_{tt} + 2u_{tx} + u_{xx} = 0, x, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = g(x) \end{cases} \text{ y b) } \begin{cases} u_{tt} + 2u_{tx} + u_{xx} = u, x, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = g(x) \end{cases} ,$$

- i) a partir de su forma canónica, ii) con transformadas de Fourier.

$$37. \text{ Sea } \begin{cases} u_{tt} - 3u_{xt} + 2u_{xx} = 0, x, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = 0 \end{cases} \text{ Resolverlo con transformadas de Fourier y deducir la solución para } f(x) = x^2 .$$

$$38. \text{ Resolver, utilizando la } \mathcal{F}, \begin{cases} u_{tt} - 9u_{xx} = 0, x, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 1) = f(x), u_t(x, 1) = 0 \end{cases} \text{ [Con } s = t - 1 \text{ y D'Alembert se comprueba el resultado].}$$

$$39. \text{ Resolver } \begin{cases} u_t - 2u_{xx} + tu = 0, x \in \mathbf{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = e^{-x^2/8}, u \text{ acotada} \end{cases}$$

$$40. \text{ Resolver extendiendo } f: \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, x, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), u_x(0, t) = 0, u \text{ acotada} \end{cases}$$

$$41. \text{ Resolver (en términos de funciones elementales) } \begin{cases} u_t - u_{xx} - 2u_x = 0, x \in \mathbf{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = e^{-x^2/2}, u \text{ acotada} \end{cases} :$$

- a) con la \mathcal{F} directamente, b) con un cambio $u = e^{pt} e^{qx} w$ que lleve a la ecuación del calor.

42. Sea (E) $u_t - u_{xx} - 2u_x + au = 0$. Simplificarla con un cambio de variable adecuado. Hallar la solución de (E) que cumple $u(x, 0) = e^{-x^2}$ y analizar su comportamiento cuando $t \rightarrow \infty$.

problemas adicionales 2

1. Estudiar si las siguientes ecuaciones tienen puntos singulares o no y clasificarlos:
 $(2x-x^2)y''+y'-y=0$ $x^2y''+2y'+4y=0$ $xy''+e^xy'+\cos xy=0$ $x\operatorname{sen}xy''+3y'+xy=0$
2. Sea $(x-1)y''+2xy'+(x+1)y=0$. Comprobar que tiene solución de la forma e^{ax} y escribir la solución con $y(0)=1$, $y'(0)=0$ en términos de funciones elementales. Hallar los 3 primeros términos no nulos del desarrollo en torno a 0 de esta solución directamente por series.
3. Sea $(a+4x^2)y''+y=0$. a) Para $a=0$ hallar la solución general de la ecuación para $x>0$. b) Para $a=1$ hallar el desarrollo hasta x^4 de la solución que satisface $y(0)=2$, $y'(0)=0$. ¿Dónde converge, al menos, la serie solución anterior?
4. Sea $3(1+x^2)y''+2xy'=0$. Hallar 3 términos no nulos del desarrollo de una solución no trivial que se anule en $x=0$. Estudiar si todas las soluciones están acotadas cuando $x \rightarrow \infty$.
5. Sea $4x^2y''-3y=x^2$. a) Hallar la solución general de la no homogénea. b) Hallar el desarrollo hasta orden 4 en $x=1$ de la solución de la homogénea con $y(1)=0$, $y'(1)=1$.
6. Sea $x^2y''+x(1-x^2)y'+(3x^2-1)y=0$. Hallar una solución no trivial que sea analítica en $x=0$, dando la regla de recurrencia. ¿Están acotadas todas las soluciones en $x=0$?
7. Hallar una (corta) solución no analítica de $2xy''-(1-2x)y'-5y=0$, $x \geq 0$, dando la regla de recurrencia.
8. Sea $2x^2y''+x(3-2x)y'-(1+4x)y=0$. Hallar el desarrollo en serie de una solución no trivial acotada cerca de $x=0$ e identificarla con una función elemental.
9. Dar un valor de b para el que la solución general por series de $xy''+be^{\operatorname{sen}x}y'=0$ en torno a $x=0$ no contenga logaritmos y otro valor para el que sí.
10. Sea $2x^2y''+x(x+1)y'-(2x+1)y=0$. Hallar una solución no nula que sea analítica en $x=0$. ¿Están acotadas todas las soluciones de dicha ecuación en un entorno del origen?
11. Hallar el término general del desarrollo de una solución de $xy''+y=0$ que se anule en $x=0$. Calcular el valor de la constante del término que contiene el $\ln x$ en la segunda solución.
12. Sea $xy''-xy'-y=0$. Hallar una serie solución (no nula) que se anule en $x=0$ e identificarla con una función elemental. En $x=0$: ¿están acotadas todas las soluciones? ¿hay soluciones no analíticas? Hallar el desarrollo hasta $(x+1)^3$ de la solución con $y(-1)=1$, $y'(-1)=0$.
13. Sea $xy''-2y'+y=0$. Hallar una solución no trivial que se anule en $x=0$, escribiendo la regla de recurrencia, sus 4 primeros términos y la expresión de su término general.
14. Hallar la solución general de $x^2y''+x(4-x)y'+2(1-x)y=0$, desarrollando en torno a $x=0$ e identificar las series solución con funciones elementales.
15. Sea $xy''+(2x^2-1)y'-4\alpha xy=0$. a) Precisar los α para los que hay polinomios solución que se anulan en $x=0$. b) Para $\alpha=1$, hallar una solución analítica en $x=0$ y determinar si todas las soluciones lo son. c) Para $\alpha=0$, hallar la solución general sin utilizar series.
16. Estudiar las soluciones en $x=0$ de la ecuación de Laguerre $xy''+(1-x)y'+py=0$, precisar para qué valores de p hay soluciones polinómicas y escribir los 4 primeros polinomios.
17. Hallar las soluciones en el punto $x=0$ de la ecuación $(1-x^2)y''-xy'+p^2y=0$ (Chebyshev), y determinar para qué valores de p las soluciones son polinomios.
18. Hallar, sin series, una solución linealmente independiente de P_1 de la ecuación de Legendre con $p=1$. Comparar su desarrollo con el de la teoría. Hacer $x=1/s$, resolver y comparar.
19. Hallar las funciones de Bessel $J_{3/2}$ y $J_{5/2}$.

- 20.** Sea $x(x-1)y'' + (4x-2)y' + 2y = 0$. a] Probar que hay una solución analítica en $x = 0$ y calcularla. b] Identificar esta solución entre las que se obtendrían resolviendo por series en torno a $x=1$. c] Estudiar si todas las soluciones de la ecuación tienden a 0 cuando $x \rightarrow \infty$.
- 21.** Sea $x^2(1+x)y'' + x(3+2x)y' + y = 0$. Hallar, trabajando en $x=0$, una solución no trivial que no contenga el $\ln x$. Probar que todas sus soluciones están acotadas cuando $x \rightarrow \infty$.
- 22.** Sea $x(1+x)y'' - y' = 0$. Hallar, con Frobenius, una solución que se anule en $x=0$. Hacer $x = \frac{1}{5}$ y deducir si hay soluciones no acotadas cuando $x \rightarrow \infty$. Resolver sin series y comprobar.
- 23.** Sea $[x^4+x^2]y'' + [5x^3+x]y' + [3x^2-1]y = 0$. Escribir la ecuación para su punto del infinito. Probar que posee soluciones no triviales que tienden a 0 cuando i) $x \rightarrow 0$, ii) $x \rightarrow \infty$. ¿Existen soluciones que tiendan a 0 tanto cuando $x \rightarrow 0$ como cuando $x \rightarrow \infty$?
- 24.** Sea $x^4y'' + 2x^3y' - y = 1$. Determinar si $x = 0$ y $x = \infty$ son puntos regulares o singulares regulares de la homogénea. Hallar la solución que satisface $y(1) = 0, y'(1) = 1$.
- 25.** Hallar una solución de la forma $t^r \sum a_n t^n$ de $t^2x'' + (3t-1)x' + x = 0$ y discutir su validez.

problemas adicionales 3

- Desarrollar $f(x)=x$ en las autofunciones de los problemas:
 - $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0)=y(1)+y'(1)=0 \end{cases}$
 - $\begin{cases} y'' - 2y' + y + \lambda y = 0 \\ y(0)=y(1)=0 \end{cases}$
 - $\begin{cases} xy'' + 2y' + \lambda xy = 0 \\ y \text{ acotada en } 0, y'(1)=0 \end{cases}$
- Sea $f(x)=\begin{cases} \sin x, & |x| \leq \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < |x| \leq \pi \end{cases}$. Hallar su serie de Fourier en senos y cosenos en $[-\pi, \pi]$. Dibujar la función hacia la que converge y la cuarta suma parcial. ¿Cuál debe ser la suma de la serie si i) $x = \frac{\pi}{4}$, ii) $x = \frac{\pi}{2}$? Comprobarlo para ii).
- Sea $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0)=y(\pi)+4y'(\pi)=0 \end{cases}$. Hallar sus autovalores y autofunciones [λ_1 e y_1 son calculables exactamente]. Calcular el primer término del desarrollo en serie de $f(x)=1$ en las autofunciones anteriores.
- Sea $\begin{cases} y'' - 6y' + \lambda y = 0 \\ y(0)=y(1)=0 \end{cases}$. a) Hallar sus autovalores λ_n y autofunciones $\{y_n\}$, escribir la ecuación en forma autoadjunta y calcular $\langle y_n, y_n \rangle$. b) Precisar cuántas soluciones tiene $y'' - 6y' - 7y = 7$ con esas condiciones de contorno.
- Sea (P) $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(-\pi)=y'(\pi)=0 \end{cases}$. a) Haciendo $x+\pi=s$, deducir todas sus autofunciones $\{y_n\}$. b) Hallar el primer término no nulo del desarrollo de $f(x)=x$ en autofunciones de (P). c) Precisar cuántas soluciones tiene $y'' + \frac{1}{9}y = x$ con esas condiciones de contorno.
- Sea $\begin{cases} y'' - 4y' + 4y + \lambda y = 0 \\ y(0)=y(\pi)=0 \end{cases}$. a) Hallar el desarrollo de $f(x)=e^{2x}$ en sus autofunciones $\{y_n\}$. b) Precisar cuántas soluciones tiene $y'' - 4y' + \alpha y = \pi$ con esos datos de contorno para $\alpha=4$ y $\alpha=5$.
- Estudiar cuántas soluciones tienen los problemas:
 - $\begin{cases} y'' = e^{x^2} \\ y(0)=y(1)-y'(1)=0 \end{cases}$
 - $\begin{cases} y'' + y' = 2x-1 \\ y'(0)=y'(1)=0 \end{cases}$
 - $\begin{cases} xy'' + 2y' = x + c \\ y'(1)-\alpha y(1)=y'(2)=0 \end{cases}$
- Sea $\begin{cases} \cos x y'' - 2 \sin x y' = f(x) \\ y'(-\frac{\pi}{4})=y'(\frac{\pi}{4})-\alpha y(\frac{\pi}{4})=0 \end{cases}$. Ver para qué α no tiene solución única y dar para ese α una $f(x)$ para el que haya infinitas soluciones.
- Precisar cuándo tiene solución o soluciones $u'' + r^{-1}u' = F(r)$
 $u'(1)-\alpha u(1)=A, u'(2)+\beta u(2)=B$, $\alpha, \beta \geq 0$.
[se puede interpretar como un problema para Laplace en el plano con simetría radial].
- Estudiar la unicidad de $y'' = f(x)$, $x \in (0, 1)$ [ecuación de Poisson en una dimensión] con diferentes condiciones separadas, utilizando técnicas similares a las de las EDPs.
- Precisar para i) $\lambda = -2$, ii) $\lambda = 0$ cuántas soluciones tienen los problemas:
 - $\begin{cases} y'' + y' + \lambda y = 1-x \\ y'(0)=y'(2)=0 \end{cases}$
 - $\begin{cases} x^2 y'' + \lambda y = 3x-4 \\ y(1)+y'(1)=y(2)=0 \end{cases}$
- Sea $\begin{cases} x^2 y'' + \lambda y = 5x^2 - 3x^3 \\ y(1)=y(2)-y'(2)=0 \end{cases}$. a) Estudiar si $\lambda=0$ y $\lambda=\frac{1}{2}$ son autovalores del homogéneo, escribiendo la autofunción cuando lo sea. [$\tan \frac{\ln 2}{2} \approx 0.36$]. b) Precisar ambos casos cuántas soluciones tiene el problema no homogéneo.
- Sea $\begin{cases} y'' + \lambda y = 1 \\ y'(-1)=y(1)=0 \end{cases}$. Hallar autovalores y autofunciones del problema homogéneo. ¿Existen para algún λ infinitas soluciones del no homogéneo?
- Sea $\begin{cases} y'' + \lambda y = x \\ y(0)=y'(1)-y(1)=0 \end{cases}$. Hallar los autovalores y autofunciones del homogéneo. ¿Tiene el no homogéneo infinitas soluciones para algún λ ?
- Hallar una fórmula para la solución de un problema de Sturm-Liouville no homogéneo utilizando desarrollos en serie de autofunciones del homogéneo. Escribir, si $\lambda \neq n^2 \pi^2$, el desarrollo en autofunciones de la solución de $\begin{cases} y'' + \lambda y = 1 \\ y(0)=y(1)=0 \end{cases}$. Hallar la solución exacta para $\lambda=0$, desarrollarla y comprobar.

problemas adicionales 4

- Resolver por separación de variables, estudiar el comportamiento cuando $t \rightarrow \infty$ y dar una interpretación física cuando se pueda:
 - $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = 1, & u(0, t) = 0, u(\pi, t) = \cos t \end{cases}$
 - $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & u(0, t) = 1, u_x(\pi, t) = 0 \end{cases}$
 - $\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & u_x(0, t) = 0, u(\pi, t) = 8t \end{cases}$
 - $\begin{cases} u_t - u_{xx} + 2u = 0, & x \in (0, \frac{\pi}{2}), t > 0 \\ u(x, 0) = \cos 5x, & u_x(0, t) = u(\frac{\pi}{2}, t) = 0 \end{cases}$
- Sea $\begin{cases} y'' + \lambda y = x \\ y'(-1) = y'(1) = 0 \end{cases}$ Hallar autovalores y autofunciones del homogéneo y precisar si hay para algún λ infinitas soluciones del no homogéneo.
 - Resolver: $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in [-1, 1], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = \cos 2\pi x, & u_t(x, 0) = 1; u_x(-1, t) = u_x(1, t) = 0 \end{cases}$
- Resolver por separación de variables:
 - $\begin{cases} u_t - (1+2t)u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & u(0, t) = 0, u_x(\pi, t) = 1 \end{cases}$
 - $\begin{cases} u_t - u_{xx} + u = 4t \cos x, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = 1, & u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 \end{cases}$
 - $\begin{cases} u_t - u_{xx} + 2tu = 0, & x \in (0, \frac{1}{2}), t > 0 \\ u(x, 0) = 1 - 2x, & u_x(0, t) = u(\frac{1}{2}, t) = 0 \end{cases}$
 - $\begin{cases} u_t - u_{xx} + 2u = 0, & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = 2 \cos^2 \frac{\pi x}{4}, & u_x(0, t) = 0, u(1, t) = e^{-2t} \end{cases}$
 - $\begin{cases} u_t - u_{xx} + \frac{u}{t+1} = 0, & x \in (0, 2), t > 0 \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & 1 < x \leq 2 \end{cases}, & u_x(0, t) = u_x(2, t) = 0 \end{cases}$
- Resolver $\begin{cases} u_t - u_{xx} = F(t), & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 \end{cases}$ Hallar la distribución estacionaria si $f(x) = \sin^2 \frac{x}{2}$ y $F(t) = e^{-t}$.
- Sea $\begin{cases} u_t - u_{xx} = A, & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = B, & u_x(0, t) = C, u_x(1, t) = D \end{cases}$ Resolverlo y determinar para qué relación entre A, B, C, D hay solución estacionaria.
- Sean $\begin{cases} u_t - u_{xx} = F(x), & x \in (-1, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & u_x(-1, t) = u_x(1, t) = 0 \end{cases}$ y $Q(t) = \int_{-1}^1 u(x, t) dx$. Calculando $Q'(t)$ deducir para qué F es constante. Resolver si: i) $F(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$, ii) $F(x) = \sin^2 \frac{\pi x}{2}$. ¿Tiene límite u cuando $t \rightarrow \infty$?
- Sea $\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = \cos \frac{\pi x}{2}, & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = T, & u_x(0, t) = F, u(1, t) = T \end{cases}$ Calcular la solución y su límite cuando $t \rightarrow \infty$ (F y T constantes).
- Desarrollar $f(x) = \cos \frac{x}{2}$, $x \in [0, \pi]$, en serie de $\{\sin nx\}$, dibujando la función hacia la que tiende la serie y estudiando la convergencia uniforme.
 - Resolver: $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & u(0, t) = e^{-t/4}, u(\pi, t) = 0 \end{cases}$ [Conviene buscar una v que cumpla también la ecuación].
- Resolver $\begin{cases} u_t - \frac{1}{4}u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = 1, & u(0, t) = u(\pi, t) = e^{-t} \end{cases}$
 - utilizando la $v = e^{-t}$ de los apuntes.
 - utilizando $v = e^{-t} \cos 2x$.
- Resolver $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & u_x(0, t) = 0, u_x(1, t) = 2e^{-t} \end{cases}$ y hallar el $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$. [Simplifica los cálculos hallar una $v(x, t) = X(x)T(t)$ cumpliendo ecuación y condiciones de contorno].
- Sea $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X(\pi) + 4X'(\pi) = 0 \end{cases}$ Probar que hay infinitos $\lambda_n > 0$ y escribir las $\{X_n\}$. [Ayuda: λ_1 e X_1 son calculables exactamente].
 - Resolver $\begin{cases} u_t - 8tu_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & u_x(0, t) = u(\pi, t) + 4u_x(\pi, t) = 0 \end{cases}$, para: i) $f(x) = \cos \frac{x}{4}$, ii) $f(x) = 1$.
- Resolver $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, 1), t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & u(0, t) + u_x(0, t) = 1, u_x(1, t) = 0 \end{cases}$ y comprobar que $u \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -\infty$.
- Resolver $\begin{cases} u_t - 2tu_{xx} = 0, & x \in (0, 3), t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & u(0, t) = 0, u_x(3, t) = t^2 \end{cases}$ y demostrar que tiene solución única.
- Sea $\begin{cases} u_t - u_{xx} - 2u_x = F(x), & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$
 - Probar que tiene solución única.
 - Resolverlo en general, y para $F(x) = f(x) = e^{-x} \sin 2x$.

15. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, x \in [0, 3], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0)=0, u_t(x, 0)=3x-x^2 \\ u(0, t)=u(3, t)=0 \end{cases}$ Hallar $u(1, 2)$ utilizando la fórmula de D'Alembert. Resolver por separación de variables y aproximar $u(1, 2)$ con el primer término de la serie solución.
16. Sean $g(x)=\begin{cases} x, 0 \leq x \leq 1/2 \\ 0, 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$ y (P) $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, x \in [0, 1], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0)=0, u_t(x, 0)=g(x), u(0, t)=u(1, t)=0 \end{cases}$
a) Desarrollar g en serie de $\{\sin n\pi x\}$ y precisar el valor de la suma para: i) $x=\frac{1}{4}$, ii) $x=\frac{1}{2}$.
b) Resolver (P) mediante separación de variables y hallar el valor de $u(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ con D'Alembert.
17. Resolver separando variables $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=2 \sin x, x \in [0, \pi], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0)=\sin 3x, u_t(x, 0)=0 \\ u(0, t)=u(\pi, t)=0 \end{cases}$. Comprobar con D'Alembert.
18. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, x \in [0, 2], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0)=u_t(x, 0)=0 \\ u(0, t)=u(2, t)=t^2 \end{cases}$ Hallar $u(1, 3)$: a) usando la v de los apuntes, b) con una v que cumpla la ecuación, c) por separación de variables.
19. Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=x, x \in [0, \pi], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0)=x, u_t(x, 0)=0 \\ u(0, t)=0, u(\pi, t)=\pi \end{cases}$ Hallar $u(\frac{\pi}{2}, \pi)$ con D'Alembert y separando variables.
20. Resolver $\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}=0, x \in [0, 1], t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0)=1, u_t(x, 0)=\sin^2 \pi x \\ u_x(0, t)=u_x(1, t)=0 \end{cases}$ separando variables y comprobar con D'Alembert.
21. a) Sea $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}+2u_t+u=0, x, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0)=f(x), u_t(x, 0)=0 \end{cases}$ Resolverlo con la \mathcal{F} y haciendo $u=we^{-t}$. Si $f(x)=\begin{cases} \sin \pi x, x \in [0, 1] \\ 0, \text{ en el resto} \end{cases}$ dibujar $u(x, 3)$.
b) Resolver $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}+2u_t+u=0, 0 < x < 1, t \in \mathbf{R} \\ u(x, 0)=\sin \pi x, u_t(x, 0)=u(0, t)=u(1, t)=0 \end{cases}$.
22. Sea $tu_{tt}-4t^3u_{xx}-u_t=0$. a) Escribirla en forma canónica haciendo el cambio $\begin{cases} \xi=x+t^2 \\ \eta=x-t^2 \end{cases}$.
b) Hallar la solución que satisface: $u(x, 1)=x, u_t(x, 1)=2x$.
c) Separar variables $u=XT$ en la ecuación y comprobar que la solución particular de a) aparece como producto de soluciones asociadas a $\lambda=0$.
23. Resolver $\begin{cases} \Delta u = -1, (x, y) \in (0, \pi) \times (0, \pi) \\ u=0 \text{ en } x=0, x=\pi, y=0, y=\pi \end{cases}$ a) usando $v(x)$ solución que se anule en 0 y π . b) directamente por separación de variables.
24. Sea $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}-5u=0 \text{ en } (0, \pi) \times (0, 1) \\ u(0, y)=u(\pi, y)=0 \\ u_y(x, 0)=0, u_y(x, 1)=f(x) \end{cases}$ Resolverlo para i) $f(x)=\sin 2x$ y ii) $f(x)=1$. ¿Es única la solución?
25. Resolver por separación de variables:
a) $\begin{cases} \Delta u = 0, r < 2 \\ u(2, \theta) = \begin{cases} 3, \theta \in (-\pi/2, \pi/2) \\ 1, \theta \in (\pi/2, 3\pi/2) \end{cases} \end{cases}$
b) $\begin{cases} \Delta u = r^2 \cos 2\theta, 1 < r < 2 \\ u(1, \theta)=u(2, \theta)=0 \end{cases}$
c) $\begin{cases} \Delta u = r, r < 2, 0 < \theta < \pi \\ u_\theta(r, 0)=u_\theta(r, \pi)=0, u(2, \theta)=3 \end{cases}$
d) $\begin{cases} \Delta u = \cos \theta, 1 < r < 2 \\ u_r(1, \theta)=0, u_r(2, \theta)=\cos 2\theta \end{cases}$
e) $\begin{cases} \Delta u = 1, 1 < r < 2 \\ u(1, \theta)=0, u_r(2, \theta)=\sin 2\theta \end{cases}$
f) $\begin{cases} \Delta u = r \sin \frac{5\theta}{2}, r < 4, \theta \in (0, \pi) \\ u(4, \theta)=0, u(r, 0)=u_\theta(r, \pi)=0 \end{cases}$
g) $\begin{cases} \Delta u = r^2 \cos 3\theta, r < 2, 0 < \theta < \frac{\pi}{6} \\ u(2, \theta)=u_\theta(r, 0)=u(r, \frac{\pi}{6})=0 \end{cases}$
h) $\begin{cases} \Delta u = 0, r < 1, 0 < \theta < \pi \\ u_r(1, \theta)=\theta, u(r, 0)=u_\theta(r, \pi)=0 \end{cases}$
26. Resolver de varias formas el problema plano $\begin{cases} \Delta u = 9r, 1 < r < 2 \\ u(1, \theta)=2 \sin^2 \theta, u_r(2, \theta)=0 \end{cases}$.
27. Sea $\begin{cases} \Delta u = 0, r < 2, 0 < \theta < \frac{\pi}{3} \\ u_r(2, \theta)=a + \cos 3\theta, u_\theta(r, 0)=u_\theta(r, \frac{\pi}{3})=0 \end{cases}$ Resolverlo para la única constante a para la que tiene solución.

28. Resolver el problema plano $\begin{cases} \Delta u = 0, 1 < r < 2, 0 < \theta < \frac{\pi}{4} \\ u(1, \theta) = 0, u_r(2, \theta) = \sin \theta \\ u(r, 0) = u(r, \frac{\pi}{4}) - u_\theta(r, \frac{\pi}{4}) = 0 \end{cases}$
29. Resolver el problema plano $\begin{cases} \Delta u = \pi, r < 1, \theta \in (0, \pi) \\ u(r, 0) = u(r, \pi) = u(1, \theta) = 0 \end{cases}$ y probar que $u(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}) \leq 0$.
30. Sean $(P_\alpha) \begin{cases} \Delta u = 0, r < 1, 0 < \theta < \alpha \\ u(1, \theta) = \sin \frac{\pi\theta}{\alpha}, u(r, 0) = u(r, \alpha) = 0 \end{cases}$ y $(P) \begin{cases} \Delta u = 0, r < 1 \\ u(1, \theta) = \sin \frac{\theta}{2}, \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$.
Comparar las soluciones de (P) con las de (P_α) si $\alpha \rightarrow 2\pi$.
Hallar cotas superiores e inferiores para todas las soluciones.
31. Resolver $\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = \cos^2\theta, r < 1, 0 < \theta < \pi \\ u_r(1, \theta) = \alpha, u_\theta(r, 0) = u_\theta(r, \pi) = 0 \end{cases}$ para los α que se pueda.
32. Hallar la solución de $\begin{cases} \Delta u + u = 0, r < 1, \pi/2 < \theta < 3\pi/2 \\ u(1, \theta) = \sin 2\theta, u(r, \frac{\pi}{2}) = u(r, \frac{3\pi}{2}) = 0 \end{cases}$ en términos de una J de Bessel.
33. Calcular el valor en el origen de la solución del problema plano $\begin{cases} \Delta u = r \cos^2\theta, r < 1 \\ u(1, \theta) = 0, 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases}$.
34. Resolver el problema en la semiesfera: $\begin{cases} u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{\cos\theta}{r^2 \sin\theta}u_\theta = 0, r < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ u_r(1, \theta) = f(\theta), u_\theta(r, \pi/2) = 0 \end{cases}$
¿Qué condición debe cumplir $f(\theta)$ para que exista solución?
Hallar la solución si $f(\theta) = \cos^2\theta - \alpha$ para el único α para el que existe.
35. Resolver los problemas para la ecuación de Laplace en el espacio:
a) $\begin{cases} \Delta u = 0, r < 3 \\ u_r(3, \theta) + u(3, \theta) = \sin^2\theta \end{cases}$ b) $\begin{cases} \Delta u = z, x^2 + y^2 + z^2 < 1 \\ u = z^3 \text{ si } x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$
36. Escribir en cartesianas los armónicos esféricos: $Y_0^0, rY_1^0, rY_1^1, r^2Y_2^0, r^2Y_2^1, r^2Y_2^2$.
37. Resolver por separación de variables estos problemas en 3 variables:
a) $\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, (x, y) \in (0, \pi) \times (0, \pi), t \in \mathbf{R} \\ u(x, y, 0) = \sin^3 x \sin y, u_t(x, y, 0) = 0 \\ u(0, y, t) = u(\pi, y, t) = 0 \\ u(x, 0, t) = u(x, \pi, t) = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, 1 < r < 2, 0 < z < 1, t > 0 \\ u(r, z, 0) = \sin \pi z \\ u(1, z, t) = u(2, z, t) = 0 \\ u(r, 0, t) = u(r, 1, t) = 0 \end{cases}$
38. Un cubo homogéneo de lado π , inicialmente a temperatura constante T_1 , se sumerge en el instante $t = 0$ en un baño que se mantiene a temperatura T_2 . Hallar la distribución de temperaturas en cualquier tiempo $t > 0$.
39. Hallar la función de Green y la solución para $f(x) = x$:
a) $y'' = f(x), y(0) = y'(1) = 0$ b) $x^2y'' + xy' - y = f(x), y(1) + y'(1) = y(2) = 0$ c) $y'' + y' - 2y = f(x), y(0) - y'(0) = y(1) = 0$
40. Calcular para $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$ la solución (si la hay) de $x^2y'' - xy' + \lambda y = x^3$
 $y(1) - y'(1) = y(2) - 2y'(2) = 0$,
haciendo uso de la función de Green en el caso de que exista.
41. Sea $xy'' + 2y' + \lambda xy = f(x), y(1) = y(2) = 0$. Determinar autovalores y autofunciones del homogéneo.
Precisar para qué $n \in \mathbf{N}$ el problema con $\lambda = \pi^2, f(x) = \sin n\pi x$ tiene soluciones, hallándolas en ese caso. Si $\lambda = 0, f(x) = 1$, hallar la solución con la función de Green.

42. Sea $y'' = f(x)$ y las constantes a y b , por el camino utilizado en el cálculo de la G para Laplace [$v(s) = \frac{1}{2}|s-x|$ satisface $v'' = \delta(s-x)$ para x fijo].
 a) Hallar su solución en términos de la función de Green, la función f y las constantes a y b , por el camino utilizado en el cálculo de la G para Laplace [$v(s) = \frac{1}{2}|s-x|$ satisface $v'' = \delta(s-x)$ para x fijo].
 b) Llegar al resultado con técnicas del capítulo 3. c) Hallar la solución si $f(x)=1$, $a=0$, $b=1$.

43. Hallar la función de Green para la ecuación de Laplace en el semiplano $\{(x, y): x \in \mathbf{R}, y > 0\}$ y utilizarla para la hallar la solución de $\begin{cases} \Delta u = F(x, y), & x \in \mathbf{R}, y > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & u \text{ acotada} \end{cases}$.
 Resolver el mismo problema para $F \equiv 0$ con transformadas de Fourier.

44. Sabiendo que $u(1, \theta) = \begin{cases} \sin \theta, & \theta \in [0, \pi] \\ 0, & \theta \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$, calcular el potencial u en el punto del plano de coordenadas $r=2$, $\theta=0$, i) con la función de Green adecuada, ii) en función de una serie.

45. Escribir, en coordenadas esféricas, la función de Green G para la ecuación de Laplace en la esfera unidad y deducir la expresión, en términos de G , F y f , de la solución de:

$$(P) \begin{cases} \Delta u = F, & r < 1 \\ u = f & \text{si } r = 1 \end{cases}$$

Hallar el valor de la solución de (P) en el origen en caso de que: i) $F=f=1$, ii) $F=z$, $f=z^3$.